Si no se tuviese en cuenta más que el valor de estas líneas, para hallar en el papel que ha de contener el plano la proyección del punto C, se trazará una recta *ab* que contenga tantas partes de la escala adoptada como unidades tiene la AB, y á partir de los puntos *a* y *b* las *ad* y *bd'* que representan del mismo modo á la AD, por los puntos *d* y *d'* se levantarán perpendiculares indefinidas á la *ab*, y la proyección del punto que buscamos deberá hallarse en las intersecciones de estas perpendiculares con una de las dos paralelas tiradas á la *ab* á una distancia $cd = dc'$, que represente en la escala á la CD; con lo que los puntos *c*, *c'*, *c''* y *c'''* satisfarán á la cuestión.

Pero si se expresa además que la magnitud *ad* que ha de representar á la AD ha de contarse desde el origen ó punto de partida *a*, y que *c* ha de hallarse á la izquierda de *ab*, como sucede para C, suponiendo que las operaciones se ejecuten en el sentido AB, como haremos siempre en lo sucesivo, la posición de *c* quedará completamente determinada.

La línea AD y su proyección *ad* se llaman *abscisas*, las CD, *cd*, *ordenadas*, y ambas las *coordenadas* respectivas de los puntos C y *c*. Las líneas AB y *ab* se llaman *ejes de las abscisas*, y también *directrices*.

Del modo explicado se habrá obtenido la posición relativa de los puntos A, C y B; y para obtener la absoluta ó su *orientación*, será necesario hallar el rumbo *r* de la AB, para conocer la dirección que esta línea tiene en el terreno. Cuando los dos puntos dados A y B se hallan en una línea AB situada en la dirección Este-oeste, la perpendicular CD representa la meridiana del punto C.

290. Recíprocamente, dada en el papel la proyección *c*, conocidos en el terreno los A y B, se obtendrá el punto C en la hipótesis del caso directo relativa á su situación, trazando por dichos puntos A y B la recta AB, ó bien desde uno de ellos A la que forma el rumbo *r*, la cual pasará por el otro punto B. Tomando con la cadena la longitud AD que tiene *ad* en la escala, y levantando en D la perpendicular DC de la longitud que marque la *cd*, su extremo C será el punto pedido, en el cual se colocará un jalón ó piquete para fijarle en el terreno. En general, la operacion por medio de la cual se fijan en el terreno y en su verdadera posición los puntos y rectas cuyas proyecciones se hallan en el plano, se llama *replanteo*.

291. Esta resolución es propia de las escuadras, y debemos entenderla en el supuesto de ser accesibles los puntos dados y el que se trata de determinar, y además visibles entre sí.

El método expuesto, aplicado á la determinación de los vértices y otros puntos cualesquiera de un polígono, y en el cual vemos que solamente hay que trazar y medir líneas perpendiculares entre sí, le llamaremos por *alineaciones perpendiculares*.

292. 2.º—**Por el trazado y medición de dos rectas cualesquiera.**—Se trazarán y medirán las dos rectas AC y BC (figura 133, lám. 5) desde el punto C á los dos dados A y B.

Si sólo se tuviese en cuenta el valor de las distancias AC y BC para hallar en el papel la proyección del punto C, vemos también que habría cuatro soluciones: los dos puntos de intersección *c* y *c'* de las dos circunferencias trazadas, la una desde el extremo *a* de la *ab*, que representa en la escala á la AB, con un radio *ac* que equivalga á AC, y la otra desde el otro extremo *b* con el radio *bc* que represente á la BC: los otros dos puntos serán los *c''* y *c'''*, intersecciones de otras dos circunferencias iguales á las anteriores y trazadas desde los mismos puntos *a* y *b*, pero tomando los radios en sentido inverso del anterior. Pero se tendrá una sola solución, la *c* por ejemplo, si se indica además que el punto C se halla á la izquierda de la AB y más cerca de A que de B. Conocida su posición relativa, y hallando el rumbo *r* de la AB se tendrá la absoluta que le corresponde.

Recíprocamente, para hallar el punto C del terreno, dada su proyección *c* en el papel, se fijarán en los extremos A y B de la AB, determinada como hemos dicho en el caso anterior, los extremos de dos cuerdas cuyas longitudes sean las que indiquen en la escala las *ac* y *bc*; y poniéndolas tirantes á la izquierda de la AB hasta que se unan los otros dos extremos, el punto de unión será el punto pedido C.

Esta resolución es peculiar de la cadena ó cuerda, piquetes y jalones, debiendo entenderse en el supuesto de ser los tres puntos accesibles y visibles entre sí, y cortas además las distancias que median entre ellos cuando han de replantearse de la manera que acabamos de indicar.

El mismo método, aplicado á la determinación de los vértices y otros puntos cualesquiera de un polígono, cuyas proyecciones pueden obtenerse trazando y midiendo rectas como las AC y BC, suele llamarse *por alineaciones oblicuas*.

293. *Casos particulares.*—Si el punto C (fig. 134, lám. 5) se ha-

lla situado en una alineación AB cuya proyección *ab* se conoce, así como la *d* de un punto accesible D, para hallar la proyección *c* del punto C puede trazarse y medirse la CD, y haciendo centro en *d* con esta distancia reducida á escala, describir un arco que corte á *ab*; el punto *c* de intersección será la proyección pedida.

Si el punto C (fig. 135, lám. 5) pertenece á una sola AB de dos alineaciones AB y DE, y se conocen las proyecciones *ab* y *de*, se prolongará en el terreno la DE hasta su encuentro en C′ con AB, y se medirá CC′; se prolongará la *de* en el papel hasta encontrar á *ab* en *c′*, se tomará *c′c* que represente en la escala á CC′ y se obtendrá la proyección *c* de C.

Cuando el punto C′ pertenece en el terreno á dos alineaciones AB y DE, cuyas proyecciones *ab* y *de* se conocen, prolongando estas líneas ó sólo una de ellas como en el caso actual, hasta su encuentro, el punto *c′* de intersección será la proyección de C′.

Si el punto se halla fuera de las dos alineaciones AB y DE (figura 136, lám. 5) como en C ó C′ y se conocen las proyecciones *ab* y *de*, se bajará en el terreno sobre la AB una perpendicular CM′ ó C′ M′, y se medirán MM′ y CM′ ó C′M′; se tomará *mm′* que represente á la MM′, y levantando en *m′* una perpendicular, se tomará *cm′* ó *c′m′* que represente á CM′ ó C′M′.

Si el punto C se halla fuera y es inaccesible, pero visible desde otro punto N (fig. 137, lám. 5), y se conocen en el papel *ab*, *ed* y *n*, se determinará la alineación CN y se medirán CP y MP; se llevará la MP reducida á escala de *m* á *p*, se trazará la *n p* indefinida, y tomando *cp* que represente á CP se tendrá la proyección *c* de C. En el caso de poderse medir la MC no se necesita conocer la proyección *n*; pues midiendo además una parte arbitraria MP de la AB y la CP, se tomará la *mp* equivalente á MP, y haciendo centro en los puntos *m* y *p* con las *mc* y *pc* que representen á MC y PC se obtendrá la intersección *c*, que será la proyección que se busca.

294 3.°—**Por la medición de una recta y un ángulo.**—*Con los goniómetros.*—Se trazará y medirá la BC (fig. 138, lám. 5) que va desde el punto dado C á uno de los extremos B de la AB, y se medirá también el ángulo ABC que forman entre sí estas dos rectas.

Para hallar en el papel la proyección del punto C, si sólo se diesen los valores de la recta y el ángulo, podrían satisfacer á la cuestión los cuatro puntos *c*, *c′*, *c″* y *c‴*, que son las intersecciones de los arcos trazados desde los puntos *a* y *b* de la *ab*, que representa

en la escala á la AB, siendo el radio una recta que representa á la BC, con las líneas *bc*, *bc′*, *ac″* y *ac‴*, las cuales forman con la *ab* en sus extremos ángulos iguales al ABC; pero si se dice además que el ángulo se ha de formar en el punto B y á la izquierda de la AB, entonces no habrá más que una sola solución que será el punto *c*, el cual representará la verdadera proyección del C; con lo que tendremos la posición relativa de dicho punto: hallando el rumbo *r* se tendrá la posición absoluta. Dado el sentido AB de la marcha, el vértice B y el ángulo de dirección, la indeterminación cesa por completo.

Recíprocamente, para hallar en el terreno el punto C, conocida en el papel su proyección *c*, después de determinada la AB, como ya se ha dicho, se formará en B el ángulo ABC, igual al *abc*, y tomando la BC de la longitud que marque en la escala la *bc*, su extremo C será el punto pedido.

295. *Con la brújula.*—Los rumbos de las BA y BC darán la posición relativa de estas líneas, y también la absoluta si la brújula está bien orientada (171). El punto C se determina por la longitud de BC.

296. *Con la plancheta.*—Conocida la *ab* (fig. 139, lám. 5), proyección de AB y su rumbo *r*, se hace estación en B, colocando *b* en la vertical de B; se declina *ab* sobre AB, se dirige la visual *bc* y se mide BC: tomando en la escala la longitud *bc* que la represente, el punto *c* será la proyección de C.

Puede aplicarse esta resolución no sólo al caso en que los tres puntos A, B y C son accesibles y visibles entre sí, sino también para cuando solamente lo sean los B y C, pudiendo ser accesible ó inaccesible el otro punto A, pero visible solamente desde B. Cuando es invisible también, se orienta *ab* por la declinatoria (195 y 196).

297. La aplicación de este método á la determinación de los vértices y otros puntos cualesquiera de un polígono, en el cual se conoce de antemano ó se mide una recta AB, después el ángulo ABC, y por último la recta BC, como hemos indicado en los párrafos que preceden, repitiéndose estas operaciones para la determinación de los demás puntos, se llama *levantamiento del plano por rodeo*, en atención á que se ejecuta recorriendo el contorno del polígono.

298. 4.°—**Por la medición de dos ángulos, haciendo estación en los puntos dados.**—*Con los goniómetros.*—Para de-

terminar la posición absoluta y relativa del punto C (fig. 140, lámina 6), no habrá más que medir los ángulos CAB y CBA y determinar el rumbo *r*, expresando además que el punto C se halla á la izquierda de la AB, para que análogamente á los casos anteriores veamos que de las dos soluciones *c* y *c'* que presenta este caso en el papel, el punto *c* resuelve la cuestión y es la verdadera proyección del C. Pudiera haber cuatro soluciones, si no se sabe á qué extremo de la AB corresponde cada ángulo. La necesidad de tomar en el caso actual y en todos los expuestos anteriormente el rumbo *r* de la línea que une los puntos dados, ó el de otra cualquiera, es la razón de que hasta los instrumentos más sencillos vayan acompañados de su correspondiente brújula.

299. *Con la brújula.*—Conocida y orientada la base AB, basta hallar los rumbos de las líneas AC y BC. Si los puntos dados A y B fuesen inaccesibles, se podrían tomar los rumbos de estas líneas desde el C que se trata de determinar, advirtiendo que las observaciones son *inversas* (167), y deben hacerse con el extremo blanco de la aguja. Esta circunstancia coloca á los rumbos en las mismas condiciones que si se hubiesen obtenido directamente desde los puntos dados, y la determinación de *c* se consigue del mismo modo que en el caso general de ser A y B accesibles.

300. *Con la plancheta.*—Colocaremos este instrumento en el extremo A (fig. 141, lám. 6), y hallaremos la proyección *a* de este punto en el tablero; dirigiendo la alidada á B y trazando *ab*, que represente en la escala á AB, dirigiremos la visual *a*C y trazaremos *ac'*. Trasladando después la plancheta á B, se colocará *b* en la vertical de B, se declinará *ba* sobre BA, y trazando *bc''* se obtendrá la proyección *c* del punto C por la intersección de las *ac'* y *bc''*. Se hallará además el rumbo *r* por medio de la declinatoria.

301. Este método, aplicado á la determinación de los vértices y otros puntos cualesquiera de un polígono, en el cual queda fijo el punto que se busca por la intersección de dos rectas, se llama propiamente *por intersección*, y se aplica cuando el punto accesible ó inaccesible C, que se quiere determinar, es visible desde los puntos A y B. Se puede comprobar trazando una nueva línea DE desde un punto D, que se refiere á *ab* por su distancia AD á uno de los puntos dados, orientando en D la plancheta con relación á la base AB, y viendo si la línea *de*, tirada según la visual dirigida á E, pasa por el punto *c*, intersección de las *ac'* y *bc''*.

302. Se comprende fácilmente la manera de hacer el replanteo en los casos 3.° y 4.° explicados (294 y 298).

303. 5.° **Por la medición de dos ángulos haciendo estación en uno de los puntos dados y en el que se trata de determinar.**—*Con los goniómetros.*—Cuando conocida la proyección *ab* (fig. 142, lám. 6) de la AB, no se puede hacer estación en uno de los puntos dados A por ser inaccesible, pero sí en el otro B, y en el que se trata de hallar C, siendo los tres visibles entre sí y queriendo evitar la medida de la recta BC, se tomarán los ángulos en B y C, y restando su suma de 180° se tendrá el valor del ángulo A para hacer en el papel la construcción como anteriormente.

También se puede hallar la proyección *c* en el papel formando en *b* el ángulo *abd* = ABC, tirando la *ae* paralela á *bd*, y formando sobre ella el ángulo *eaf* = ACB: el punto de intersección *c* de *bd* y *af* será la proyección que se busca, puesto que se tiene *eac* = *acb* = ACB.

Por último, se puede hacer la construcción tomando *ab* (figura 143, lám. 6), que representa á AB (fig. 142, lám. 6); se construirá entonces el ángulo *abc'* = ABC, y en un punto cualquiera *c'* de la recta *bc'* se formará igualmente el ángulo *a'c'b* = ACB; por el punto *a* se tirará una paralela *ac* á la *a'c'*, y se tendrá el punto *c* hallado también por la intersección de las *ac* y *bc*, como en los casos anteriores.

Obsérvese que como las BC y AC se obtienen en el papel sin medirlas en el terreno, este problema resuelve el de hallar la posición de un punto C con respecto á otros dos dados A y B, siendo inaccesible uno de dichos puntos A y las distancias del punto C á los dos dados.

304. *Con la brújula.*—Hállese desde C (fig. 142, lám. 6) el rumbo de CA como observación inversa (299) y tírese *af* desde *a*, con el rumbo hallado; su intersección *c* con la recta *bc* obtenida directamente, dará la proyección buscada.

305. *Con la plancheta.*—Después de tomado en la plancheta el ángulo en *b* (fig. 144, lám. 6), igual al B del terreno, y *ab*, equivalente en la escala á AB, se trasladará el instrumento al punto C que se quiere determinar, y como la longitud BC no se ha podido medir ó no se ha creído conveniente, no se conoce en la línea indefinida *bc'* el punto que es la proyección de C, por lo que se hará corresponder un punto cualquiera *c'* de dicha línea con el del te-

rreno C, y se declinará bc' sobre BC; por el punto c' se dirigirá la visual c'A por medio de la alidada, y la línea $c'd$ trazada en la plancheta no pasará por a; tirando por este punto una paralela ac á $c'd$, cortará á la bc' en un punto c, que será la verdadera proyección de C; en términos que si ahora se mueve la plancheta para hacer corresponder c con C y se declina cb sobre CB, quedará ca en el plano vertical de CA.

Este método, aplicado á la determinación de los vértices y otros puntos cualesquiera de un polígono, en el cual se determina primero un punto c' por la intersección con la bc de una línea auxiliar, y después se la vuelve á cortar con la ac paralela á la anterior, resultando dos puntos de intersección, de los cuales el segundo es la proyección que se busca, le llamaremos *por doble intersección*. Los franceses le llaman *par recoupement*. En la construcción de la figura 142 (lám. 6) vemos, sin embargo, que el punto c se ha obtenido por una sola intersección.

Este método podría comprobarse también por una nueva línea que pasase por la intersección de las dos que dan el punto c.

El método por doble intersección sirve para auxiliar al método *por rodeo*, en el caso de no poderse medir directamente la BC (figura 138, lám. 5), y de no convenir la aplicación de ninguno de los métodos establecidos para medirla indirectamente como una línea inaccesible.

305. Obsérvese que los métodos acabados de exponer para la determinación de un punto con relación á otros dos dados, no son otra cosa que los distintos casos de resolución de triángulos. Advertimos de paso que, si bien hemos designado los instrumentos más propios para cada uno de los dichos métodos, se pueden emplear todos con un mismo instrumento.

306. **Determinación de la posición absoluta y relativa de un punto del terreno con relación á dos rectas que se cortan y cuyo ángulo es conocido.**—Sean AB y BD (fig. 145, lám. 6) las rectas dadas, y C el punto cuya proyección se busca: se bajarán desde este punto las perpendiculares CC′ y CC″ sobre las AB y BD, y se medirán las distancias AC′ y BC″, pues suponemos conocidos el punto de partida A y el de intersección B, así como el ángulo ABD. Tomando además el rumbo r de una de ellas AB, se podrá hallar en el papel la proyección de C en su posición absoluta y relativa.

En efecto, se trazará en el papel ab, que represente en la escala

á AB; se formará en b el ángulo abd = ABD; se tomarán ac' y bc'', que equivalgan á AC′ y BC″, y levantando las perpendiculares $c'm$ y $c''n$, éstas se cortarán en un punto c, que será la proyección de C en su posición relativa; pues se demuestra en Geometría que si dos rectas se cortan, sus perpendiculares se cortan también. Por medio del rumbo r se podrá colocar el punto c en el plano en su posición absoluta.

Si las líneas AB y BD (fig. 146, lám. 6) se eligen perpendiculares entre sí, la figura CC′BC″ será un rectángulo y nos dará CC′ = C″B y BC′ = CC″, y entonces, midiendo BC′ y BC″, tendríamos conocidas las longitudes de las perpendiculares CC″ y CC′. Si la línea AB se elige en el terreno en dirección de Este á Oeste, la DB representará la meridiana del punto B, y se tendrá conocida la distancia CC″ á la *meridiana*, así como la CC′ á la *perpendicular* á ésta en el punto B.

En el replanteo se seguirá una marcha análoga á la seguida en la construcción.

Como en los dos métodos que acabamos de exponer nos valemos de *abscisas* y *ordenadas*, llamaremos al primero por *coordenadas oblicuas* y al segundo por *coordenadas rectangulares*. Se puede observar, sin embargo, que en la construcción de este problema la proyección del punto se determina por la intersección de dos rectas.

307. **Determinación de la posición de tres ó más puntos con relación á otro cuya proyección es conocida.**—Este problema puede resolverse, como vamos á exponer, cuando son visibles desde el punto de estación los que se quiere determinar, no presenta dificultades el trazado y medición de las rectas tiradas desde dicho punto á los demás, y la longitud de estas líneas no excede de los límites asignados para los valores angulares que deben observarse con cada instrumento. El método que vamos á indicar se llama *por radiación*.

Con los goniómetros.—Mídanse los ángulos ADB, BDC (fig. 147, lámina 6), que forman las visuales tiradas desde el punto dado á los A, B y C que se trata de determinar, así como las longitudes DA, DB, DC de estas visuales, que pueden obtenerse directa ó indirectamente. El rumbo de una de ellas determinará las posiciones absolutas de los puntos A, B y C.

Con la brújula.—Se determinan las direcciones de las visuales por los rumbos que les corresponden.

Con la plancheta.—Se coloca d' (fig. 148, lám. 6), proyección de D, en la vertical de este punto, orientando la plancheta por medio de la declinatoria si se quiere hallar la posición absoluta de los puntos A, B y C, y se trazan en el tablero las direcciones de las visuales tiradas á estos puntos, tomando en ellas las distancias $d'a'$, $d'b'$, $d'c'$, que representan á las DA, DB y DC.

Con las escuadras.—Pueden determinarse los ángulos ADB y BDC (fig. 147, lám. 6), midiendo las abscisas DP, DQ y las ordenadas EP, QE, y proceder como con los goniómetros; ó bien trazando desde D (fig. 149, lám. 6), las rectas *mn* y *rs* perpendiculares entre sí, que pasen lo más cerca que sea posible de los puntos A, B y C. Trazadas estas alineaciones, se bajan las ordenadas A*a*, B*b*, C*c*, las cuales se miden, así como las abscisas correspondientes. Cuando se aplica este procedimiento á la determinación de mayor número de puntos, pueden evitarse las ordenadas demasiado grandes, trazando los ejes, que forman ángulos de 45° con los primeros.

Con la cadena ó cinta, piquetes y jalones.—Se resuelve como con los goniómetros, determinando los ángulos por la medida de las rectas iguales DF, DE, DH (fig. 147, lám. 6) y las FE y EH (238).

308. **Determinación de la posición de un punto con relación á tres puntos dados.—Problema de la Carta.**— Este problema, llamado por los autores franceses *problema de la Carta*, porque se aplica á la determinación de un punto con relación á tres situados en sus posiciones relativas y absolutas en una carta ó plano topográfico, se resuelve también cuando se trata de conocer la posición de un punto accesible D (fig. 150, lám. 6), referida á la de otros tres, A, B, C, inaccesibles, pero visibles desde el primero.

Resolución gráfica.—*Con los goniómetros.*—Mídanse los ángulos $ADB = m$ y $BDC = n$, y construyendo sobre la recta *ab* del papel, homóloga á la AB del terreno, el ángulo $hab = m$, se traza sobre ella el arco capaz de este ángulo (Geom., Probl. 19) tirando la *ao*, perpendicular en *a* á la *ah*, y la perpendicular en el punto medio de *ab;* ambas perpendiculares determinan en su intersección *o* el centro del arco capaz. Trazando después sobre *bc* el arco capaz del ángulo *n*, la intersección *d* de estos arcos será la representación en el plano del punto D del terreno. Es, en efecto, el único punto que satisface á la condición de que las rectas tiradas desde él á los puntos dados *a*, *b* y *c*, forman los ángulos consecu-

tivos *m* y *n*, como tiene lugar en el terreno para D, con relación á los puntos A, B y C.

Si se unen los *a* y *c*, y se construye sobre la recta así determinada el arco capaz del ángulo $adc = m + n$, este tercer arco pasará también por *d*, lo cual puede servir de comprobación.

Cuando las circunferencias descritas tienen hacia *d* muchos puntos comunes, se halla el verdadero punto de intersección tirando desde *b* una perpendicular *be* á la línea *oo'*, que une los centros, y prolongándola hasta los arcos. En efecto, la línea que une los puntos de intersección *b* y *d* es perpendicular á la línea que une los centros (Geom., Teor. 45).

309. *Caso excepcional.*—Puede suceder que las dos circunferencias se confundan: entonces todos los puntos de la que así resulta satisfacen á la doble condición exigida, el punto *d* (fig. 151, lámina 6) corresponde á la circunferencia que pasa por *a*, *b* y *c*, y queda indeterminado; se ve en la figura que d' satisface á las mismas condiciones que *d*. Se recurre entonces á un nuevo punto, cuya posición respecto á dos de los dados primitivamente sea conocida, fijando la de *d* con relación á los tres acabados de mencionar; y en el caso de no existir el cuarto punto fijo á que nos referimos, se elige en su lugar otro cualquiera, determinándole con relación á los tres primeros.

310. *Con la brújula.*—Puede resolverse como con los demás goniómetros, hallando *m* y *n* (fig. 150, lám. 6) por la diferencia de los rumbos de las rectas DA, DB, DC; pero si las AB, BC y sus homólogas *ab*, *bc* están orientadas, bastará hallar por observaciones inversas (167) los rumbos DA, DB, DC, y marcarlos directamente desde *a*, *b* y *c* en el plano por medio de rectas, cuya intersección dará la posición absoluta y relativa del punto *d*. Se comprende que lo estaría solamente por la intersección de dos de estas rectas; pero como ellas se cortarían en general aun cuando se hubiese cometido algún error en la determinación de los rumbos, la tercera visual da á conocer que esto no ha sucedido, cuando pasa por el punto de intersección de las primeras. Muchas veces se refiere un punto á cuatro, cinco ó mayor número de puntos fijos.

311. *Con la plancheta.*—Se coloca un punto cualquiera d' (figura 148, lám. 6) del tablero en la vertical del punto de estación D, y se trazan las rectas $d'a'$, $d'b'$, $d'c'$ en dirección de las visuales tiradas desde D á los puntos dados, con lo que se conocerán gráficamente los ángulos $a'd'b'$, $b'd'c'$ de estas visuales. Construyendo