

*Con la plancheta.*—Se coloca  $d'$  (fig. 148, lám. 6), proyección de D, en la vertical de este punto, orientando la plancheta por medio de la declinatoria si se quiere hallar la posición absoluta de los puntos A, B y C, y se trazan en el tablero las direcciones de las visuales tiradas á estos puntos, tomando en ellas las distancias  $d'a'$ ,  $d'b'$ ,  $d'c'$ , que representan á las DA, DB y DC.

*Con las escuadras.*—Pueden determinarse los ángulos ADB y BDC (fig. 147, lám. 6), midiendo las abscisas DP, DQ y las ordenadas EP, QE, y proceder como con los goniómetros; ó bien trazando desde D (fig. 149, lám. 6), las rectas  $mn$  y  $rs$  perpendiculares entre sí, que pasen lo más cerca que sea posible de los puntos A, B y C. Trazadas estas alineaciones, se bajan las ordenadas Aa, Bb, Cc, las cuales se miden, así como las abscisas correspondientes. Cuando se aplica este procedimiento á la determinación de mayor número de puntos, pueden evitarse las ordenadas demasiado grandes, trazando los ejes, que forman ángulos de  $45^\circ$  con los primeros.

*Con la cadena ó cinta, piquetes y jalones.*—Se resuelve como con los goniómetros, determinando los ángulos por la medida de las rectas iguales DF, DE, DH (fig. 147, lám. 6) y las FE y EH (238).

**308. Determinación de la posición de un punto con relación á tres puntos dados.—Problema de la Carta.**

Este problema, llamado por los autores franceses *problema de la Carta*, porque se aplica á la determinación de un punto con relación á tres situados en sus posiciones relativas y absolutas en una carta ó plano topográfico, se resuelve también cuando se trata de conocer la posición de un punto accesible D (fig. 150, lám. 6), referida á la de otros tres, A, B, C, inaccesibles, pero visibles desde el primero.

**Resolución gráfica.**—*Con los goniómetros.*—Mídanse los ángulos  $ADB = m$  y  $BDC = n$ , y construyendo sobre la recta  $ab$  del papel, homóloga á la AB del terreno, el ángulo  $hab = m$ , se traza sobre ella el arco capaz de este ángulo (Geom., Probl. 19) tirando la  $ao$ , perpendicular en  $a$  á la  $ah$ , y la perpendicular en el punto medio de  $ab$ ; ambas perpendiculares determinan en su intersección  $o$  el centro del arco capaz. Trazando después sobre  $bc$  el arco capaz del ángulo  $n$ , la intersección  $d$  de estos arcos será la representación en el plano del punto D del terreno. Es, en efecto, el único punto que satisface á la condición de que las rectas tiradas desde él á los puntos dados  $a$ ,  $b$  y  $c$ , forman los ángulos consecu-

tivos  $m$  y  $n$ , como tiene lugar en el terreno para D, con relación á los puntos A, B y C.

Si se unen los  $a$  y  $c$ , y se construye sobre la recta así determinada el arco capaz del ángulo  $adc = m + n$ , este tercer arco pasará también por  $d$ , lo cual puede servir de comprobación.

Cuando las circunferencias descritas tienen hacia  $d$  muchos puntos comunes, se halla el verdadero punto de intersección tirando desde  $b$  una perpendicular  $be$  á la línea  $oo'$ , que une los centros, y prolongándola hasta los arcos. En efecto, la línea que une los puntos de intersección  $b$  y  $d$  es perpendicular á la línea que une los centros (Geom., Teor. 45).

**309. Caso excepcional.**—Puede suceder que las dos circunferencias se confundan: entonces todos los puntos de la que así resulta satisfacen á la doble condición exigida, el punto  $d$  (fig. 151, lám. 6) corresponde á la circunferencia que pasa por  $a$ ,  $b$  y  $c$ , y queda indeterminado; se ve en la figura que  $d'$  satisface á las mismas condiciones que  $d$ . Se recurre entonces á un nuevo punto, cuya posición respecto á dos de los dados primitivamente sea conocida, fijando la de  $d$  con relación á los tres acabados de mencionar; y en el caso de no existir el cuarto punto fijo á que nos referimos, se elige en su lugar otro cualquiera, determinándole con relación á los tres primeros.

**310. Con la brújula.**—Puede resolverse como con los demás goniómetros, hallando  $m$  y  $n$  (fig. 150, lám. 6) por la diferencia de los rumbos de las rectas DA, DB, DC; pero si las AB, BC y sus homólogas  $ab$ ,  $bc$  están orientadas, bastará hallar por observaciones inversas (167) los rumbos DA, DB, DC, y marcarlos directamente desde  $a$ ,  $b$  y  $c$  en el plano por medio de rectas, cuya intersección dará la posición absoluta y relativa del punto  $d$ . Se comprende que lo estaría solamente por la intersección de dos de estas rectas; pero como ellas se cortarían en general aun cuando se hubiese cometido algún error en la determinación de los rumbos, la tercera visual da á conocer que esto no ha sucedido, cuando pasa por el punto de intersección de las primeras. Muchas veces se refiere un punto á cuatro, cinco ó mayor número de puntos fijos.

**311. Con la plancheta.**—Se coloca un punto cualquiera  $d'$  (figura 148, lám. 6) del tablero en la vertical del punto de estación D, y se trazan las rectas  $d'a'$ ,  $d'b'$ ,  $d'c'$  en dirección de las visuales tiradas desde D á los puntos dados, con lo que se conocerán gráficamente los ángulos  $a'd'b'$ ,  $b'd'c'$  de estas visuales. Construyendo

sobre  $ab$  y  $bc$ , trazadas en el tablero, los arcos capaces de estos ángulos (308), se determinará el punto  $d$ .

Se podrá evitar el trasladar los ángulos  $m$  y  $n$ , construyéndolos desde luego en el lugar que deben ocupar para la determinación de los arcos capaces. Con este objeto se hace corresponder al punto  $a$  (fig. 152, lám. 6) del tablero y al de estación  $D$  del terreno en una misma vertical, declinando  $ab$  sobre  $DB$ : se traza entonces una línea  $ah$  en la dirección de la visual  $DA$ , pudiendo hallar entonces, como hemos indicado, el centro  $o$  correspondiente al arco capaz del ángulo  $ADB$ . Se mueve después la plancheta haciendo que  $c$  ocupe la posición  $c'$  en la vertical del punto de estación  $D$ , y  $cb$  la  $c'b'$  en la dirección  $DB$ , con lo cual el ángulo  $abc$  se hallará en  $a'b'c'$  y  $o$  habrá pasado á  $o'$ ; se halla entonces el centro  $o''$  del arco capaz del ángulo  $BDC$ , determinando este ángulo por la recta  $Dm$ , en dirección de la visual  $DC$ . La intersección de las circunferencias dará, como en los problemas anteriores, el punto  $d$ .

También se puede resolver el mismo problema disponiendo en el tablero un papel de calcar, determinando el punto  $d'$  (fig. 148, lámina 6) que se halla en la vertical del de estación, y marcando con lápiz las direcciones  $d'a'$ ,  $d'b'$ ,  $d'c'$  de este punto á los puntos dados. Trasladando el papel al sitio del tablero en que se hallan las proyecciones  $a$ ,  $b$ ,  $c$  de estos últimos, se le mueve sobre ellos hasta que las rectas trazadas pasen respectivamente por estos puntos, calcando entonces el punto  $d'$ ; con lo que se tendrá la proyección de su homólogo  $D$  en el terreno. Cuando haya más de una posición en que se verifique la circunstancia acabada de indicar, estaremos en el caso de indeterminación de que ya nos hemos ocupado (309).

312. El uso del papel transparente permite resolver este problema con las escuadras acompañadas de la cadena ó cinta, piquetes y jalones, ó solamente con estos últimos medios. En el primer caso está reducida la cuestión á establecer alineaciones desde el punto  $D$  (fig. 147, lám. 6) á los  $A$ ,  $B$  y  $C$ , midiendo únicamente las abscisas  $PD$  y  $DQ$ , y las ordenadas  $EP$  y  $EQ$ , á fin de que hecha la construcción en el papel de calco, se coloque éste sobre el plano, moviéndole hasta que las tres líneas pasen por los tres puntos dados, cuyas proyecciones se conocen.

313. En el segundo caso, después de establecidas las alineaciones, está reducida la cuestión á medir los tres lados de los dos

triángulos isósceles  $DEF$  y  $DEH$ , para hacer la construcción en el papel de calco y proceder después como en el primero.

No creemos conveniente ocuparnos del método de tanteos, indicado por algunos autores, en razón al mucho tiempo que exige, sin proporcionar mayor exactitud que los que hemos dado á conocer.

Cualquiera que sea el procedimiento empleado, se tiene una comprobación disponiendo el punto  $d$  en la vertical de  $D$ , y declinando una de las líneas  $da$ ,  $db$ ,  $dc$  sobre su homóloga en el terreno; haciendo coincidir sucesivamente con las otras dos la línea de fé de la alidada, las visuales deben ir á parar á los puntos dados correspondientes.

314. La *resolución analítica* de este problema, que no creemos conveniente poner aquí, pueden verla los lectores en el *Tratado de Topografía* ó en el *Curso elemental* de la misma, que tenemos publicados.

315. **Consideraciones acerca de los métodos expuestos y del levantamiento de los planos en general.**—Los procedimientos empleados en la resolución de las cuestiones anteriores determinan los puntos de una manera exacta bajo el punto de vista geométrico; pero en la práctica sólo se obtienen resultados más ó menos aproximados que, aparte de los medios más ó menos á propósito de que se pueda disponer y del cuidado que se emplee en la ejecución de las operaciones, dependen en general del mayor ó menor número de rectas medidas directamente y de los valores de los ángulos. De aquí la tendencia de los geómetras á medir el menor número posible de rectas, á fin de evitar la acumulación de errores que produce la dificultad en la exactitud de su medida; reduciendo la cuestión en general á la medida de una sola línea, *base* de las operaciones, haciendo depender de ella por medio del cálculo los valores de las demás, que se obtienen así con mayor exactitud. Con respecto á los ángulos, debe tenerse presente que no deben ser menores que  $30^\circ$ , con objeto de evitar la indeterminación de los puntos por la intersección de rectas que formen ángulos muy agudos; pues esta intersección no queda entonces bien marcada en las construcciones gráficas, resultando indecisa la posición del punto de que se trata.

A pesar de esto, las dificultades que á cada paso se presentan en el terreno obligan á separarse de estas indicaciones generales, combinando los distintos métodos expuestos y empleando diversos instrumentos.

316. Las mismas consideraciones pueden hacerse extensivas al levantamiento del plano de un polígono, tomando como base la distancia horizontal entre dos puntos previamente elegidos, y en virtud de los cuales pueden determinarse otros varios por los métodos expuestos anteriormente; estos últimos sirven á su vez para determinar la de nuevos puntos, continuando del mismo modo hasta conseguir la determinación de todos aquellos que deban figurar en el plano. Todos los ángulos y los lados deben hallarse reducidos á su proyección horizontal, así como también deben estarlo al centro de la estación los ángulos en cuyo vértice no pueda colocarse el instrumento.

317. Previos estos antecedentes, y teniendo además presente cuanto hasta aquí llevamos dicho, pasaremos á ocuparnos de la determinación de las proyecciones horizontales de los polígonos y de la construcción de sus figuras semejantes en el papel.

Las operaciones que se necesita ejecutar en el campo á fin de tomar los datos necesarios para obtener dichas proyecciones, se llaman *operaciones ó trabajos de campo*, y también *levantamiento de los planos*. Las que se ejecutan para la formación en el papel de las figuras semejantes á las proyecciones horizontales de los polígonos, se llaman *operaciones ó trabajos de gabinete*, ó *construcción del plano*.

Para proceder con orden en el levantamiento y construcción de los planos de los terrenos, haremos una clasificación que se refiere á su extensión, dividiéndolos en terrenos de corta, de mediana y de mucha extensión: se suele entender por terrenos de corta extensión los que no pasan de 50 á 60 hectáreas; de mediana los que no exceden de 300, y de aquí en adelante se llaman de grande extensión.

No debe creerse que esta división es absoluta ni que pueden fijarse sus límites con exactitud; muchas veces la adopción de los medios empleados para el levantamiento de un plano, depende de su importancia y de la naturaleza del terreno, y los procedimientos empleados para los terrenos de mucha extensión se aplican á los que la tienen mediana y aun á los de corta extensión.

En el levantamiento y construcción de los planos nos ocuparemos:

1.º De los terrenos de corta extensión, empleando la cadena ó cinta, piquetes y jalones, ó la escuadra ó cartabón acompañada de los mismos medios.

2.º De los terrenos de mediana extensión, haciendo uso de la brújula, de todos los demás goniómetros y de la plancheta, acompañados también de la cadena ó cinta, piquetes y jalones.

No nos ocuparemos de los terrenos de grande extensión, en los que se hace uso de la *triangulación*, por no ser ahora de nuestro objeto, y pueden consultarla los que la necesiten en nuestro *Tratado de Topografía* ó en el *Curso elemental* de la misma.

Una vez hallada la proyección horizontal de todo polígono, cualquiera que sea su extensión comprendida en los límites marcados, trataremos de la medida de las superficies y de la transformación y división de los polígonos.

318. **Idea de las operaciones que constituyen el levantamiento de un plano.**—Habiendo enseñado á medir toda clase de rectas y de ángulos, y el uso de todos los instrumentos, poco habría que decir en el levantamiento de un plano si los terrenos que el geómetra tiene que determinar fuesen, como en la geometría elemental, polígonos terminados por líneas rectas y situados sus vértices en un solo plano, sin presentar ningún otro género de dificultades. Es cierto que algunas veces, aunque son las menos, se presenta llano el terreno, y que también ocurre tener que considerar figuras rectilíneas regulares ó irregulares; pero consiste en que entonces ha intervenido la mano del hombre, como sucede en la construcción de los estanques, cercas de las propiedades y plantas de los edificios y jardines. La naturaleza, caprichosa en las formas de la superficie terrestre, no presenta esta regularidad, afectando, por el contrario, una asombrosa variedad de figuras en todos los campos y terrenos, siendo por lo tanto sus contornos líneas tortuosas compuestas de todo género de curvaturas y zig-zags, aunque se encuentren algunos lados que se aproximen más ó menos á la línea recta. Esto en cuanto al contorno; pero el geómetra tiene que luchar con nuevas dificultades, debidas á los accidentes de los terrenos, unas veces accesibles ó pudiéndose recorrer en todos sentidos, pero cuyas desigualdades hacen que unos puntos sean ó no visibles desde otros, y otras acompañando á este último inconveniente el de ser completamente inaccesibles por hallarse cercados, estar cubiertos de bosque ó ser extensas lagunas ó pantanos; y por último, pueden ser en parte accesibles y en parte inaccesibles, resultando á cada paso de aquí el empleo de distintos procedimientos para lograr satisfacer con

la elección del más á propósito las dos condiciones esenciales de pronta y más exacta ejecución.

Además, no es sólo la determinación del contorno de un polígono lo que ocupa la atención del geómetra, sino también aquella multitud de objetos diseminados sin orden que se hallan en su interior, como son los arroyos, los caminos, los árboles, los edificios y jardines, bosques, plantaciones y manantiales, cada uno de los cuales necesita ser determinado con separación y situado después en el plano, guardando con los demás la misma relación de posición que tienen en el terreno, y constituyendo así lo que se llama la determinación de los detalles interiores y su colocación en el plano.

**319. Reconocimiento del terreno.**—La primera operación que siempre debe practicarse es elegir el punto más elevado, sea una torre, un cerro ú otro objeto cualquiera, desde el cual se descubra mejor la extensión del terreno que se quiere representar, para formarse de él una idea lo más exacta posible, fijando la atención en todos sus accidentes, así como en los diversos objetos que comprende, y con especialidad en la dirección de los caminos, ríos, canales, arroyos.....; debiendo además valerse de personas prácticas del país que le puedan suministrar todos los datos necesarios, como son entre otros los nombres de las distintas localidades, eligiendo sucesivamente nuevos puntos, desde los cuales se vayan descubriendo los objetos restantes. En el caso de no ser posible hallar estos puntos, desde los cuales pueda ponerse en práctica este examen, ó de que la porción que se ha de representar sea muy reducida, una tierra de labor, por ejemplo, se reconocerá el terreno en todos sentidos, con el objeto de establecer en uno y otro caso qué método es el más á propósito para obtener aquellos datos que puedan después servir en la construcción sobre el papel, para determinar con más exactitud y claridad y con menor trabajo la verdadera posición de los puntos más principales, tanto del contorno como los interiores y exteriores al polígono que deban también ser representados. El resultado de este reconocimiento debe llenar las condiciones siguientes:

1.<sup>a</sup> La elección del terreno más llano é igual para el establecimiento de la base ó bases que se necesiten medir, que deben ser, si es posible, en sentido de la mayor longitud.

2.<sup>a</sup> El que sean visibles desde dichas líneas elegidas el mayor número de puntos notables.

3.<sup>a</sup> Que el número de rectas que se establezcan para hacer depender de ellas las demás sea el menor posible, á fin de evitar los errores que producen las medidas.

**320. Canevás topográfico.**—Una vez reconocido el terreno, se colocan jalones ó banderolas en aquellos puntos que no están determinados por otros objetos, como árboles, casas, torres..... y valiéndose del instrumento ó instrumentos de que quiera hacerse uso en la operación, se procede á establecer aquel conjunto de rectas convenientemente dispuestas y determinadas con toda la posible exactitud, por ser las bases principales de todos los trabajos sucesivos que el geómetra haya juzgado más á propósito, para que, formando entre sí una red ó una especie de entramado, puedan relacionarse con ellas los diversos puntos del terreno, y sirvan para la más exacta reproducción en el papel de todas las partes que le componen. Este sistema de rectas ha recibido el nombre de *canevás topográfico*.

Cuando se han de medir ángulos cuyos vértices sean los puntos elegidos, no convendrá en muchos casos que éstos sean de los objetos que se hallan en el terreno, para evitar la reducción de los ángulos al centro de la estación.

**321. Croquis ó bosquejo.**—A medida que se van estableciendo en el terreno las rectas que componen el canevás, deben irse figurando y disponiendo *á ojo* de una manera análoga en un papel, así como dibujando con el mayor cuidado y en las mismas relaciones de posición que guardan entre sí todos los objetos y accidentes del terreno y la configuración de su contorno, anotando en cada una de las líneas y ángulos que se midan los valores obtenidos.

No hay un sistema fijo en la formación del croquis ó borrador para la representación de las distintas líneas que le constituyen, resultando de aquí con frecuencia que no pueda entenderle otro que el que le ha formado, y nosotros haremos uso de aquellos medios que creamos más convenientes y que se hallen en armonía con los sistemas de representación más generalizados. Es de la mayor importancia poner todo el esmero posible en su buena ejecución, pues figurando con exactitud, así el contorno del terreno como el de los demás objetos, caminos, arroyos..... que han de formar parte del plano, y haciendo con claridad las correspondientes anotaciones, será tanto más fácil la reproducción verdadera del terreno en el papel, cuanto más esmero se haya puesto en

la claridad y precisión de la colocación de las líneas en el croquis, evitándose de este modo tener que volver de nuevo al campo á rectificar y aclarar las dudas que de otro modo ocurrirían á cada paso en la construcción. Por estas razones creemos que no es conveniente trazar desde luego á ojo todo el plano del terreno que se trata de determinar, indicando desde luego los accidentes de su contorno y de todos los demás objetos que le constituyen, para después ir haciendo las correspondientes anotaciones, pues es tarea inútil en los terrenos de alguna extensión; salvo á trazar desde luego el sistema de rectas que han de constituir el canevas, deben dibujarse los diferentes objetos y la disposición y figura de todas las partes del terreno, á medida que se van presentando al relacionarlas con las líneas de aquél.

**322. Elección de las escalas.**—Entre las diferentes escalas que pueden adoptarse, suele elegirse á arbitrio la que permita incluir en un papel de tamaño regular el plano que ha de contener, ó bien se procura que sea lo mayor posible, para la mayor exactitud, á excepción de los casos en que está determinada por la Administración, según el ramo á que el trabajo pertenezca.

Una vez delineado el canevas, es decir, puesto el croquis en limpio, formando las líneas los mismos ángulos que en el terreno, después de sujetas á la escala elegida y marcada la posición de todos los objetos y puntos principales con signos establecidos al intento, ó escribiendo sus nombres y trazados lo más aproximado posible los contornos con arreglo á las figuras sacadas en el croquis de las montañas, ríos, puentes, plantas de edificios.... todo lo demás para dibujar el plano topográfico corresponde exclusivamente á los cursos de dibujo lineal y topográfico, en los cuales puede consultarse también el cuadro de los signos topográficos convencionales empleados para la representación de los objetos.

**323. Registros.**—Son unos estados compuestos de varias columnas, en las que se inscriben los valores de los lados y de los ángulos, la designación de los puntos de estación y demás datos y observaciones que sea necesario tomar en el campo, para reproducir en el papel el polígono del terreno. Deben hallarse dispuestos con claridad y de modo que conduzcan sin dificultad á la buena y más exacta construcción. En los casos complicados, un solo registro presentaría bastante confusión, por lo que se llevan con separación registros del canevas, del contorno, de los detalles, etc., que deben hallarse, sin embargo, relacionados entre sí.

Los registros sustituyen al croquis, y cada geómetra sigue el medio que le parece más conveniente. Ambos son buenos, si el geómetra acompaña á su práctica en cualquiera de ellos el orden constante en el modo de inscribir los datos que juzgue mejor para no confundirse en los trabajos de gabinete, y hay geómetras que adoptan ambos, disponiendo los cuadernos ó *libretas de campo*, dejando en blanco las planas de la izquierda para trazar en ellas los croquis y rayando en columnas adecuadas á cada caso las de la derecha para la formación de los registros, pudiendo así comprobarse y ayudarse ambas indicaciones, proporcionando mayor seguridad en la construcción del plano. Creemos este método preferible, pues todo es poco cuando se trata de asegurar el buen éxito de una operación, y aunque largo, no lo es tanto ni tan costoso, como cuando las dudas dan lugar á volver de nuevo al terreno, para tomar otra vez estos mismos datos. Estos estados ó registros varían según la naturaleza de la operación, y deben formarse sus modelos de modo que abracen todas las circunstancias, y á un golpe de vista puedan comprenderse.

**324. Transportación de los ángulos.—Transportadores.**—El *plano geométrico ó topográfico*, debiendo ser una figura semejante á la proyección horizontal del polígono del terreno, ha de tener sus lados proporcionales á los de esta proyección, lo cual se consigue valiéndonos de las *escalas*, y sus ángulos iguales, que se determinan por la *transportación*. La *transportación de los ángulos* en general, es una operación que tiene por objeto construir sobre el papel ángulos iguales á los observados en el terreno, y averiguar el valor de un ángulo cualquiera trazado en el papel. Los sencillos instrumentos que para conseguirlo se emplean se llaman *transportadores*, y no son otra cosa que unos limbos graduados del mismo modo que los de los instrumentos (85). Se construyen de metal, de talco y de papel. Los de metal son generalmente semi-circulares de un radio de 4<sup>cm</sup>,5; tienen el inconveniente de manchar el papel, y no son tan flexibles como los de talco, los cuales reúnen la ventaja de ser transparentes, á la de su flexibilidad, que permite el que se adapten mejor al papel. Los de talco, de círculo entero, suelen tener un radio de 7<sup>cm</sup>. Conviene que el radio del transportador sea bastante grande, á fin de que puedan marcarse bien las menores divisiones, y trazar los ángulos con precisión; condición que llenan cumplidamente los transportadores de papel, cuyo radio suele ser de 16<sup>cm</sup>, lo que permite que