primer lugar á levantar el plano exacto del contorno del bosque, proyectando en él la dirección del camino y pasando después á establecerle en el terreno.

Sea en efecto *abcefghij* (fig. 206, lám. 10) el polígono construído en el papel, que representa el contorno ABCEFGHYJ del bosque, en el cual se trata de abrir un camino que parta de la población M y vaya á parar al caserío N. Si el punto de partida está determinado como el C y el camino ha de estar en línea recta, se trazará la recta *cr*, se tomará con el transportador el ángulo *bcr* y se formará con un goniómetro el BCR sobre la BC; se establecerán jalones en la dirección de la CR determinada por la alidada, plantando piquetes para dejar fija en el terreno la dirección del eje del camino y poder proceder después á su construcción.

Si se hace uso de la brújula, como siempre se toma el rumbo de una recta AB ó BC del polígono, se obtendrá por la fórmula [27] (396) el rumbo de la *cr* y se podrá determinar la CR.

Con la plancheta se opera con mucha facilidad en estos casos, pues se colocará el punto *c* en la vertical de C, se declinará *cb* sobre CB, y colocando el canto de la alidada en contacto con la *cr* no habrá más que plantar jalones en sentido de la visual.

Si el punto de partida *d* no está determinado en el plano, se tomará en la escala el valor de *cd*, se medirá la parte CD que representa, y se trazará la DR como anteriormente. Si por evitar dificultades hubiera que trazar el camino formando una línea quebrada *dopqr*, se procederá de una manera análoga para obtener la DOPQR; pues después de fijar la dirección de la DO y tomar en ella el valor que marque *do*, se determinará la dirección de OP, y así sucesivamente hasta llegar á R.

405. **Edificios y demás construcciones.**—Siempre se sigue el método expuesto en el capítulo anterior, párrafos 355 á 361. En las grandes posesiones ó heredades y en las huertas y jardines, ya se hallen ó no cercados, puede hacerse uso de los varios métodos é instrumentos que hemos dado á conocer para el levantamiento de los planos.

En el replanteo se puede seguir el método expuesto (360), ó bien hacer uso de los goniómetros, brújula y plancheta; y siendo esta última preferible en la operación de que se trata, nos limitaremos á ella, tomando por ejemplo el trasladar al terreno el proyecto de un jardín, cuya figura trazada en el papel de la plancheta, señalada con letras minúsculas y semejantes á las de la figura 207 (lám. 10) que representa el jardín después de trazado en el terreno, se sobrentenderá para evitar la repetición del dibujo.

Después de trazado el eje MN perpendicular á la línea CD paralela á la fachada AB de un edificio que ha de dar frente al jardín, se marcará el punto O proyección de *o*, y colocando la plancheta de modo que *o* se halle en la vertical de O, se declinará *mn* sobre MN y se pondrá la alidada sobre *ef* para trazar en el terreno la perpendicular EF: tomando las partes iguales OE y OF del valor que indiquen las del plano, y uniendo los puntos E y F con los C y D se tendrán las CE y DF. Se trasladará la plancheta al punto E, se colocará *e* en la vertical de E, se declinará *ec* sobre EC, y colocando la alidada sobre *eg*, se trazará EG marcando el punto G, y lo mismo se hará para obtener el punto H desde F. Como el punto N se puede señalar también en el terreno plantando un jalón como en los vértices que hemos determinado del contorno, servirá de comprobación el que los tres puntos G, N y H resulten en línea recta; lo que se averiguará colocando la plancheta en el punto G, declinando *ge* sobre GE, y colocando la alidada sobre *gh* para ver si la visual pasa por los puntos N y H; pudiendo también comprobar además para más exactitud el ángulo GHF.

Obtenida ya la cerca del jardín y trazado el grueso que deba tener, se fijará la distribución que ha de hacerse en su interior para los plantíos de árboles y flores, marcando los puntos O′ y O″ para colocar en ellos la plancheta y determinar las líneas PR y P′R′, en las cuales se fijarán con piquetes los puntos P, Y, L, T, S, Q, X y R, así como los P′, Y′, L′, T′, S′, Q′, X′ y R′, y quedarán trazadas las PP′, YY′, LL′... Del mismo modo se procederá en la parte comprendida entre las rectas EF y GH. Por último, haciendo centro en O y con radios tomados en la cadena ó cuerda, de las longitudes que indique el proyecto, se trazarán la circunferencia y los arcos que se ven en la figura, y que representan una fuente y cuatro trapecios circulares.

406. **Situación de los objetos interiores ó detalles en el plano.**—Estableciendo el número conveniente de transversales, y disponiendo estas líneas poligonales de modo que comprendan entre sí todos los detalles para referirlos á ellas por ordenadas ó por intersecciones de visuales, se tendrán los elementos necesarios para la situación de todos los objetos que deba comprender el plano del terreno.

La figura 208 (lám. 10) representa un terreno cuyo plano se trata de levantar, y manifiesta la posición de las transversales que ha habido que establecer: las HYJL y HYJM tienen la parte común HYJ, que debe repetirse para ambas, y las cuales parten del punto H del lado FE y van á terminar en los puntos L y M de los lados AG y AB; á no ser que se advierta que HYJL es una transversal, y otra la JM que parte de un punto J de aquélla y termina en el M del contorno. La HYJL con la parte HFGL del contorno sirven para circunscribir y determinar la posesión cercada que se ve en la figura, y la HYJM con la QPON que parte del punto Q del lado FE y va á parar al N del AB, circunscriben y determinan el río. La QPON con la DRSTB que desde el vértice D va á terminar en el B, circunscriben el terreno quebrado comprendido entre ellas, sirviendo la última para determinar y situar el arroyo. Las partes JL y JM de las transversales HYJL y HYJM con la LAM del contorno, circunscriben la laguna que se ve en la figura y sirven para determinarla.

Con el objeto de evitar confusión, sólo se indican algunas de las ordenadas *ab*, *cd*, *tx*, que sería necesario establecer. El árbol Z se halla determinado por la intersección de las visuales dirigidas desde los extremos de la CD.

Del mismo modo se podrá fijar el frente *ce* del cercado, determinando por intersecciones sus extremos como se ve en la figura.

Para fijar cada punto como el árbol Z, hubiera bastado medir la distancia CZ cuando esto es posible y el ángulo ZCD, pudiendo determinar también así los dos extremos del frente *mn*.

Cuando se hace uso de registros, la colección debe contener:

1.º El del polígono principal ABCDEFG (384 ó 388).

2.º El auxiliar del contorno (341).

3.º Los auxiliares correspondientes á las transversales, tanto para la determinación y situación de éstas, como de los detalles interiores; los cuales no difieren en su formación de los explicados (361 y 362), valiéndonos de los goniómetros ó de la brújula para el establecimiento de las transversales.

407. **Planos de las poblaciones.**—Cuando éstas son pequeñas, aunque de alguna más consideración que las de que nos hemos ocupado en el capítulo anterior, se procederá con los goniómetros de la manera siguiente:

La primera operación es determinar el contorno que ha de circunscribir la población por medio de una triangulación gráfica, eligiendo para punto interior, vértice común de todos los triángulos, la veleta de una torre, que se halle situada lo más céntrica posible, y los demás vértices á las entradas de las calles principales, teniendo presente cuanto se ha dicho (367), y procurando con preferencia á las demás condiciones, que los triángulos se aproximen á ser equiláteros. Los vértices de los ángulos y los demás puntos de referencia se fijan en las calles por medio de piquetes de madera ó de hierro, introducidos en el terreno, ó de señales practicadas en las aceras. Hecho esto, se procede al establecimiento de las transversales, que dividen al polígono en otros varios; y como pueden ser líneas muy quebradas y en bastante número, conviene adoptar una clasificación que sirva de guía, tanto en los trabajos sobre el terreno, como en los de gabinete, y que al mismo tiempo facilite la inteligencia de los muchos y minuciosos datos que esta operación exige. Estas operaciones traspasan los límites que nos hemos impuesto en este Tratado, y los lectores pueden consultarlas en nuestro *Tratado de Topografía* (3.ª edición) ó en el *Curso elemental* de la misma (6.ª edición).

408. **Replanteo de los planos.**—La reproducción de los puntos notables de un plano en el terreno, no puede ofrecer dificultad en cuanto á la manera de proceder á ejecutarle, conocidas las operaciones de su levantamiento y construcción: consiste en reproducir con la cadena y los goniómetros las operaciones ejecutadas sobre el papel con la escala y el transportador; y tan sólo debe tenerse presente la marcada y desfavorable influencia que los errores cometidos en la apreciación gráfica de los elementos geométricos ejercen al ser transportados al terreno. Para atenuar en lo posible los errores, debemos preferir el hacer uso de los valores numéricos obtenidos en las operaciones del levantamiento, y empezar por determinar y comprobar por cuantos medios estén á nuestro alcance, las posiciones de varios puntos principales en toda la extensión que han de comprender las operaciones del replanteo, á los cuales deben referirse las de todos los demás puntos; para lo cual será muy conveniente dividir en varios trozos el trabajo, á fin de poder determinar más fácilmente las posiciones relativas de los comprendidos en cada uno de ellos, y comprobarlos por las relaciones que los diferentes trozos guarden entre sí y con los puntos principales previamente elegidos.

409. **Medida de las áreas.—Preliminares.**—Se llama área de una superficie limitada el número de veces que esta superficie contiene á la unidad.

La unidad superficial tiene siempre la forma de un cuadrado, cuyo lado es la unidad lineal adoptada para medir las longitudes.

Indiquemos la manera de obtener las áreas ó las medidas de las superficies de los planos cuya construcción ha sido el objeto de los estudios precedentes; operación de la mayor importancia en muchas aplicaciones de la Agrimensura, y que es el verdadero objeto de este capítulo.

410. **Área del triángulo.—Triángulos oblicuángulos.** —*Un triángulo cualquiera tiene por superficie la mitad del producto de su base por su altura.*

Sea b la base y a la altura, tendremos (Geom., Teor. 94).

$$\text{Área del triángulo} = \frac{b \times a}{2}; \quad [29]$$

Ejemplo: Sea $b = 50^{m}$ y $a = 40^{m}$ (fig. 200, lám. 10), resultará

$$\text{Area ABC} = \frac{50 \times 40}{2} = \frac{2000}{2} = 1000^{m^2} = 10 \text{ áreas.}$$

411. En el caso de ser conocidos los tres lados que señalaremos con las letras a, b y c (fig. 210, lám. 11), imaginemos la altura CD que llamaremos h, y se tendrá desde luego en el triángulo ADC

$$h^2 = b^2 - \text{AD}^2;$$

y despejando AD en la expresión $a^2 = b^2 + c^2 - 2c \times \text{AD}$ (Geometría, Teor. 72), sustituyendo en la anterior, reduciendo el segundo miembro á una sola fracción, y descomponiendo en el numerador la diferencia de cuadrados que resulta en un producto de dos factores (Álg.— 29), se tendrá

$$h^2 = \frac{(2bc + b^2 + c^2 - a^2)\,(2bc - b^2 - c^2 + a^2)}{4c^2},$$

ó

$$h^2 = \frac{(a + b + c)\,(b + c - a)\,(a + c - b)\,(a + b - c)}{4c^2}.$$

Llamando $2p$ al perímetro resultará la expresión

$$2p = a + b + c,$$

y restando sucesivamente de ambos miembros $2a$, $2b$ y $2c$, sustitu-

yendo en el valor de h^2, simplificando y extrayendo la raíz cuadrada de ambos miembros,

$$h = \frac{2\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}}{c}.$$

Sustituyendo ahora este valor de h en la expresión del área del triángulo, que es como sabemos (410), siendo ahora c la base y h la altura

$$\text{Area del triángulo} = \frac{c \times h}{2};$$

y simplificando después, se tiene por último

$$\text{Area del triángulo} = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}; \quad [30].$$

Esta fórmula tiene aplicación en el caso de que el triángulo que se tenga que medir fuese un bosque, una viña ó cualquier otro terreno en el cual no se pudiese levantar una perpendicular para tener su altura, sin perjudicar á la propiedad.

Ejemplo.—Sean los tres lados $a = 40^{m}$; $b = 50^{m}$; $c = 60^{m}$; se hallará su suma $40^{m} + 50 + 60^{m} = 150^{m}$, de la cual se tomará la mitad, que son 75^{m}. Restando de 75 cada uno de los números 40, 50 y 60, se obtienen los restos 35, 25 y 15, que multiplicados entre sí y por el número 75, resulta el producto 984375, del cual extrayendo la raíz cuadrada, que es 992,15, esta será la superficie del triángulo expresada en metros cuadrados, ó sean 992^{m^2} y 15^{cm^2}, ó bien $9^{a},92^{m^2}$ y 15^{dm^2}.

412. **Triángulos rectángulos.**—Tratándose de un triángulo rectángulo, como los catetos b y c son en este caso la base y la altura, tendremos para el caso en que se conocen los dos catetos:

$$\text{Area del triángulo rectangulo} = \frac{b \times c}{2}; \quad [31].$$

413. **Area del cuadrilátero.**—*El área de un cuadrilátero cualquiera, se determina en general sumando las áreas de los dos triángulos en que resulta dividido por una de sus diagonales.*

Ejemplo.—Sea el cuadrilátero ABCD (fig. 211, lám. 10), tendremos:

$$\text{Area ABCD} = 130,^{m}20 \times \frac{65^{m},60 + 20^{m}}{2} = \frac{130^{m},20 \times 85^{m},60}{2}$$
$$= 55^{a},73.$$

414. **Area del trapecio.**—*El área de un trapecio es igual á la mitad de la suma de las dos bases paralelas, multiplicada por su altura.*

Llamando b á la base mayor, b' á la menor, y a á la altura, la fórmula será (Geom., Teor. 95):

$$\textit{Area del trapecio} = \frac{b+b'}{2} \times a; \qquad [\mathbf{32}].$$

Ejemplo.—Sea el trapecio ABCD (fig. 212, lám. 10), tendremos:

$$\textit{Area ABCD} = \frac{120^{m},40 + 85^{m},20}{2} \times 62^{m},40 = 64^{a},15.$$

El área del trapecio es también igual al producto de su altura EF *por la recta* GH *que une los puntos medios de los lados no paralelos.*

415. **Area del rectángulo.**—*El área del rectángulo es igual al producto de su base por su altura.*

La fórmula será (Geom., Teor. 92):

$$\textit{Area del rectángulo} = b \times a; \qquad [\mathbf{33}].$$

Ejemplo.—Sea el rectángulo ABCD (fig. 213, lám. 10), tendremos:

$$\textit{Area ABCD} = 90^{m},50 \times 36^{m},80 = 33^{a},30.$$

416. **Area del cuadrado.**—*El área del cuadrado es igual á la segunda potencia de su lado.*

Llamando l al lado del cuadrado, la fórmula será (Geom., Teorema 92, Corolario):

$$\textit{Area del cuadrado} = l^{2}; \qquad [\mathbf{34}].$$

Ejemplo.—Sea el cuadrado ABCD (fig. 214, lám. 10), se tendrá

$$\textit{Area ABCD} = (85^{m},60)^{2} = 74^{a},27.$$

417. **Area del paralelogramo.**—*El área del paralelogramo se obtiene como la del rectángulo, multiplicando la base por la altura.*

Ejemplo.—Sea el paralelogramo ABCD (fig. 215, lám. 10), se tendrá:

$$\textit{Area ABCD} = 88^{m},70 \times 55^{m},40 = 49^{a},14.$$

418. **Area del polígono regular.**—*El área del polígono regular es igual á la mitad del producto del perímetro por la apotema.*

Si designamos por l el lado del polígono regular, por a la apotema ó altura de uno de los triángulos isósceles iguales en que queda dividido por las rectas tiradas desde el centro á los vértices, y por n el número de lados, la fórmula será (Geom., Teor. 96):

$$\textit{Area del polígono regular} = \frac{1}{2} nl \times a; \qquad [\mathbf{35}].$$

Llamando P al perímetro nl, esta fórmula se convertirá en

$$\textit{Area del polígono regular} = \frac{P \times a}{2}; \qquad [\mathbf{36}].$$

Ejemplo.—Sea el pentágono regular ABCDE (fig. 216, lám. 10); su lado $AB = 40^{m}$ y por lo tanto su perímetro 200^{m}, y su apotema $OH = 30^{m}$, la fórmula [**36**] nos dará:

$$\textit{Area ABCDE} = \frac{200^{m} \times 30^{m}}{2} = 3000^{m^2} = 30^{a}.$$

419. Antes de determinar el área del círculo, recordaremos primero la relación de la circunferencia al diámetro, es decir, las veces que el diámetro está contenido en la circunferencia y que es siempre constante. De esta relación existen varias expresiones, á saber: la de Arquímedes que es $\frac{22}{7}$; la de Mecio que halló ser $\frac{315}{113}$, y la de los modernos, que en decimales está representada por 3,14159... y que se señala por la letra griega π, que se lee *pi*.

420. Pasaremos ahora á *determinar la longitud de la circunferencia dado el radio, y al contrario.*

Sea C la circunferencia y r el radio; supuesto que $\frac{C}{2\pi} = \pi$, tendremos (Geom., Prob. 40);

$$C = 2\pi r \qquad [\mathbf{37}] \qquad \text{y} \qquad r = \frac{C}{2\pi}; \qquad [\mathbf{38}].$$

Ejemplo 1.° *Hallar el valor de la circunferencia cuyo radio es 5 metros* (fig. 217, lám. 10).

La fórmula [**37**] nos dará:

$$C = 2\pi r = 2 \times 3,14 \times 5^{m} = 31^{m},4.$$

Ejemplo 2.° *Hallar el valor del radio de la circunferencia que tiene de longitud* $31^m,4$.

La fórmula [38] nos dará:

$$r = \frac{C}{2\pi} = \frac{31^m,4}{2 \times 3,14} = \frac{31^m,4}{6,28} = 5^m.$$

421. **Área del círculo.**—*El área de un círculo es igual á la mitad del producto de la circunferencia por el radio.*

Tenemos (Geom., Teor. 97):

$$\textit{Área del círculo} = \frac{1}{2}\,Cr; \qquad [39].$$

Poniendo en esta fórmula por C su expresión $2\pi r$, y llamando A el área del círculo, resulta esta otra:

$$A = \pi r^2 \qquad [40].$$

Luego *el área de un círculo es también igual á la razón de la circunferencia al diámetro multiplicada por el cuadrado del radio.*

Despejando r en la fórmula [40], se tendrá:

$$r = \sqrt{\frac{A}{\pi}} \qquad [41].$$

Luego *el radio es igual á la raíz cuadrada del cociente que se obtiene dividiendo el área del círculo por la razón de la circunferencia al diámetro.*

Ejemplo 1.° Sea $r = 5^m$, llamando A al área del círculo, la fórmula [40] nos dará:

$$A = \pi r^2 = 3,14 \times 5^2 = 78,50\ m^2.$$

Ejemplo 2.° Sea $A = 78,m^2 50$, por la fórmula [41] se obtendrá:

$$r = \sqrt{\frac{A}{\pi}} = \sqrt{\frac{78,m^2 50}{3,14}} = \sqrt{25} = 5^m.$$

Si se tratase de un semicírculo, se hallará la superficie del círculo entero como acabamos de decir, y se tomará su mitad.

422. En la práctica se suele hacer uso para hallar la superficie del círculo de la siguiente regla:

Se multiplica el cuadrado del diámetro por 11 *y el producto se divide por* 14.

En efecto, llamando D al diámetro y poniendo en la expresión $A = \pi r^2$ [40] (421), por r su valor $\frac{D}{2}$, y haciendo uso de la relación de la circunferencia al diámetro, según Arquímedes, que es $\frac{22}{7}$ y que es ahora el valor de π, resulta:

$$A = \pi r^2 = \frac{22}{7} \times \left(\frac{D}{2}\right)^2 = \frac{22}{7} \times \frac{D^2}{4} = \frac{11 \times D^2}{14},$$

que es el enunciado de la regla.

423. **Área del sector.**—*El área del sector es igual á la mitad del producto del arco de círculo que le sirve de base por el radio.*

Tenemos (Geom., Teor. 98):

$$\textit{Area del sector} = \frac{1}{2}\,ar; \qquad [42]$$

Ejemplo.—Sea el sector ABOC (fig. 217, lám. 10), cuyo ángulo BAC es de 64 grados y el radio del círculo 5^m. Se hallará primero la longitud del arco $BOC = a$ que le sirve de base, determinando la longitud de toda la circunferencia (420) que es $31^m,4$ y estableciendo la proporción

$$360^\circ : 31^m,4 :: 64^\circ : a = 5^m,58.$$

La fórmula [42] nos dará:

$$\textit{Area}\ ABOC = \frac{1}{2}\,ar = \frac{1}{2} \times 5^m,58 \times 5^m = 13,m^2\,95.$$

424. **Área del segmento.**—El área del segmento BCO (figura 217, lám. 10), menor que el semicírculo, se hallará restando del área del sector correspondiente ABOC, la del triángulo ABC; y la del segmento BDC mayor que el semicírculo, añadiendo al área del sector BDCA la del triángulo ABC.

425. **Área de la corona.**—El área de la corona *abcd* (figura 218, lám. 10), es igual á la diferencia de las áreas de los dos círculos concéntricos.

426. **Área de la elipse.**—*El área de la elipse es igual al producto de sus dos ejes multiplicado por la relación* π *de la circunferencia al diámetro, dividido todo por* 4.