Ejemplo 2.º *Hallar el valor del radio de la circunferencia que tiene de longitud* $31^m,4$.

La fórmula [38] nos dará:

$$r = \frac{C}{2\pi} = \frac{31^m,4}{2 \times 3,14} = \frac{31^m,4}{6,28} = 5^m.$$

421. **Área del círculo.**—*El área de un círculo es igual á la mitad del producto de la circunferencia por el radio.*

Tenemos (Geom., Teor. 97):

$$\textit{Área del círculo} = \frac{1}{2}\,Cr; \qquad [39].$$

Poniendo en esta fórmula por C su expresión $2\pi r$, y llamando A el área del círculo, resulta esta otra:

$$A = \pi r^2 \qquad [40].$$

Luego *el área de un círculo es también igual á la razón de la circunferencia al diámetro multiplicada por el cuadrado del radio.*

Despejando r en la fórmula [40], se tendrá:

$$r = \sqrt{\frac{A}{\pi}} \qquad [41].$$

Luego *el radio es igual á la raíz cuadrada del cociente que se obtiene dividiendo el área del círculo por la razón de la circunferencia al diámetro.*

Ejemplo 1.º Sea $r = 5^m$, llamando A al área del círculo, la fórmula [40] nos dará:

$$A = \pi r^2 = 3,14 \times 5^2 = 78,50\ m^2.$$

Ejemplo 2.º Sea $A = 78,m^2 50$, por la fórmula [41] se obtendrá:

$$r = \sqrt{\frac{A}{\pi}} = \sqrt{\frac{78,m^2 50}{3,14}} = \sqrt{25} = 5^m.$$

Si se tratase de un semicírculo, se hallará la superficie del círculo entero como acabamos de decir, y se tomará su mitad.

422. En la práctica se suele hacer uso para hallar la superficie del círculo de la siguiente regla:

Se multiplica el cuadrado del diámetro por 11 y el producto se divide por 14.

En efecto, llamando D al diámetro y poniendo en la expresión $A = \pi r^2$ [40] (421), por r su valor $\frac{D}{2}$, y haciendo uso de la relación de la circunferencia al diámetro, según Arquímedes, que es $\frac{22}{7}$ y que es ahora el valor de π, resulta:

$$A = \pi r^2 = \frac{22}{7} \times \left(\frac{D}{2}\right)^2 = \frac{22}{7} \times \frac{D^2}{4} = \frac{11 \times D^2}{14},$$

que es el enunciado de la regla.

423. **Área del sector.**—*El área del sector es igual á la mitad del producto del arco de círculo que le sirve de base por el radio.*

Tenemos (Geom., Teor. 98):

$$\textit{Area del sector} = \frac{1}{2}\,ar; \qquad [42]$$

Ejemplo.—Sea el sector ABOC (fig. 217, lám. 10), cuyo ángulo BAC es de 64 grados y el radio del círculo 5^m. Se hallará primero la longitud del arco $BOC = a$ que le sirve de base, determinando la longitud de toda la circunferencia (420) que es $31^m,4$ y estableciendo la proporción

$$360^\circ : 31^m,4 :: 64^\circ : a = 5^m,58.$$

La fórmula [42] nos dará:

$$\textit{Area}\ ABOC = \frac{1}{2}\,ar = \frac{1}{2} \times 5^m,58 \times 5^m = 13,m^2\,95.$$

424. **Área del segmento.**—El área del segmento BCO (figura 217, lám. 10), menor que el semicírculo, se hallará restando del área del sector correspondiente ABOC, la del triángulo ABC; y la del segmento BDC mayor que el semicírculo, añadiendo al área del sector BDCA la del triángulo ABC.

425. **Área de la corona.**—El área de la corona *abcd* (figura 218, lám. 10), es igual á la diferencia de las áreas de los dos círculos concéntricos.

426. **Área de la elipse.**—*El área de la elipse es igual al producto de sus dos ejes multiplicado por la relación* π *de la circunferencia al diámetro, dividido todo por* 4.

Sea E el eje mayor, y e el menor, la fórmula será:

$$Area\ de\ la\ elipse = \frac{E \times e \times \pi}{4}; \qquad [43]$$

Ejemplo.—Sea la elipse ABCD (fig. 219, lám. 11); su eje mayor $AC = 120^m$ y el eje menor $BD = 80^m$, tendremos:

$$Area\ \ ABCD = \frac{120 \times 80^m \times 3,14}{4} = \frac{30144}{4} = 75^a,36.$$

427. **Polígonos irregulares.**—Para determinar la superficie de esta clase de polígonos es necesario concebirlos descompuestos en otras figuras más sencillas.

Estas descomposiciones resultan algunas veces de las líneas establecidas en el terreno para el levantamiento del plano, y otras hay que hacer la descomposición en este último.

Cuando el establecimiento de las líneas del canevás para el levantamiento del plano del polígono presenta á éste descompuesto en figuras adecuadas al cálculo de su superficie con todos los datos necesarios, ó se puede concebir descompuesto sin necesidad de tomar nuevos datos, sino deduciéndolos de los que ya se conocen, deben seguirse siempre los métodos numéricos, y sólo en el caso contrario se hará uso de los métodos gráficos.

Una vez determinados los datos numérica ó gráficamente, se hará aplicación de las fórmulas correspondientes para obtener la superficie de cada una de las figuras parciales, y por consiguiente la total del polígono en cuestión.

La primera operación debe ser por lo tanto la exacta construcción del plano del polígono, cuya superficie se trata de determinar; si bien cuando sólo ésta es necesaria y se emplean los métodos numéricos, puede obtenerse el resultado sirviendo únicamente de guía el croquis ó el registro.

Nosotros supondremos siempre en cuanto vamos á exponer que ha precedido la construcción del polígono en el papel. Del mismo modo, siempre que hablemos de procedimientos gráficos, se ha de entender que no tenemos otro dato que el contorno del polígono construido en el papel y la escala que ha servido para la construcción. Expondremos los varios métodos de descomposición generalmente empleados.

428. *Por descomposición en triángulos y trapecios.*—Levantado un plano por abscisas y ordenadas (335) se obtiene desde luego

(fig. 220, lám. 11) la descomposición en triángulos y trapecios, y no habrá más que aplicar las fórmulas [29] y [32], (410 y 414), y sumar los resultados obtenidos. El estado que para estos cálculos debe formarse es el que se halla en la página siguiente.

429. Cuando se circunscribe un rectángulo al polígono (344), se restará del área de este rectángulo la suma de las áreas exteriores, cuando son ó pueden considerarse como figuras rectilíneas, rectángulos, triángulos ó trapecios en general, y la diferencia será el área del polígono en cuestión.

430. *Por descomposición en triángulos.*—Cuando el procedimiento que se ha seguido en el levantamiento del plano presenta al polígono descompuesto en triángulos por diagonales á partir de un mismo vértice, bastará hallar el área de cada uno de los triángulos y sumarlas para obtener la del polígono. También puede descomponerse gráficamente de este modo el plano del polígono, aunque se haya levantado por otro método cualquiera.

Las áreas de los triángulos pueden hallarse en el caso que nos ocupa empleando la fórmula [30] (411).

431. **Contornos curvilíneos.**—Una vez hallada por cualquiera de los procedimientos que anteceden el área del polígono principal del canevás ABCDEFGH (fig. 221, lám. 11), es necesario conocer las de las porciones GF56... comprendidas entre los lados de éste y las porciones curvas del contorno, para añadirlas al polígono ó restarlas de él según sean exteriores ó interiores con respecto á su perímetro. Se hará para ello uso de las abscisas y ordenadas que descomponen á estas áreas en triángulos y trapecios; pero pueden hallarse más fácilmente cuando las ordenadas están equidistantes. Supongamos que así se verifique en las 5 y 6 de la figura, y llamémoslas b y b', representando por a la equidistancia de estas ordenadas: fácil es ver entonces que las áreas de las tres porciones en que dividen al contorno GF56, son respectivamente (410 y 414).

$$\frac{a \times b}{2}; \qquad \frac{b + b'}{2} \times a; \qquad \frac{a \times b'}{2}.$$

Estado de la superficie del polígono ABCDEFG.

Número de orden.	Clase de las figuras.	Indicación de los cálculos.	Resultados parciales.	Resultado total.
1	2	3	4	5
1	Triáng. ABH	$\frac{19,5 \times 27,6}{2}$	269,10 m^2	
2	Trap. BHJC	$\frac{27,6+38}{2} \times 42,5$	1394,00 »	
3	Trap. CJMD	$\frac{38+23,4}{2} \times 33,3$	1022,31 »	
4	Triáng. DME	$\frac{23,4 \times 11,7}{2}$	136,89 »	
5	Triáng. AYG	$\frac{41 \times 31,7}{2}$	649,85 »	
6	Trap. YGFL	$\frac{31,7+24}{2} \times 44,4$	1236,54 »	
7	Triáng. LFE	$\frac{24 \times 21,6}{2}$	259,20 »	4967,89 m^2

cuya suma, que llamaremos S, dará para el área que se busca:

$$S = \frac{a \times b + a\,(b + b') + a \times b'}{2} = a\,(b + b'); \quad [44]$$

bastando por lo tanto multiplicar la equidistancia por la suma de las ordenadas.

432. Cuando los extremos de la curva AE (fig. 222, lám. 11) no pasan por el eje ó directriz MN, se divide su proyección *ae* en un cierto número de partes iguales, y por los puntos de división *b*, *c*, *d*, se levantan perpendiculares. Llamando *l* la longitud de una de estas divisiones, y designando por y', y'', y'''... las de las perpendiculares A*a*, B*b*, C*c*.., la suma de los trapecios rectángulos que así se obtienen se calculará por la regla siguiente.

Multiplíquese la longitud de una de las divisiones de la proyección de la curva sobre el eje ó directriz, por la suma de las perpendiculares intermedias y la mitad de la suma de las perpendiculares extremas.

En efecto, tenemos:

$$\frac{1}{2}\,l\,(y' + y'') + \frac{1}{2}\,l\,(y'' + y''') + \frac{1}{2}\,l\,(y''' + y^{\text{iv}}) +$$
$$\frac{1}{2}\,l\,(y^{\text{iv}} + y^{\text{v}});$$

ó bien

$$\frac{1}{2}\,l\,(y' + 2y'' + 2y''' + 2y^{\text{iv}} + y^{\text{v}}) = l\left[(y'' + y''' + y^{\text{iv}}) + \frac{y' + y^{\text{v}}}{2}\right] [45],$$

que es el enunciado de la regla.

433. **Medición por cuadrícula.**—Los métodos acabados de explicar se aplican también de otra manera llamada de *medición por cuadrícula*. Consiste en dividir el papel en que el plano se ha trazado por un sistema de rectas, paralelas á una de dirección arbitraria AB (fig. 223, lám. 11) y equidistantes entre sí en una magnitud dada, 100 metros, por ejemplo, de la escala del plano, y otro análogamente dispuesto en dirección perpendicular al primero; y sabiendo que el área de cada cuadrado es de 10000 m^2, los seis cuadrados enteramente ocupados por el plano darán 60000 m^2, á cuyo valor será necesario añadir los de las porciones, que como *ahcrb*

no llenan un cuadrado, y pueden calcularse como hemos dicho (431 y 432).

Para no manchar el dibujo puede hacerse la cuadrícula en un papel transparente que se dispone sobre el plano.

434. Al procedimiento de la cuadrícula se acude también cuando se construye un plano por abscisas y ordenadas, y éstas son de tanta longitud que exceden la abertura del compás y no pueden ser apreciadas con exactitud por la escala de boj (77). Así, si el punto *r* está referido al eje 2...2 paralelo á AB y se conoce el valor numérico 176,24 de su ordenada, bastará tomar de *o* á *n* el valor de la abscisa que debiera tomarse en el eje de referencia, restar 100 del valor de la ordenada, y llevar de *n* á *r* la diferencia 76,24 para obtener la situación de este último punto en el plano.

435. **Determinación gráfica de las áreas con auxilio de instrumentos.—Planímetros.**—Los valores de las áreas pueden obtenerse gráficamente con mucha brevedad y con bastante aproximación, haciendo uso de ingeniosos instrumentos más ó menos perfeccionados, entre los que sólo citaremos la ruleta de Dupuit, como la más generalmente usada, por estar más al alcance de la generalidad.

436. **Ruleta de Dupuit.**—Este instrumento está destinado á la medida de la longitud de una recta, y á la de la suma de varias rectas recorridas sucesivamente por los puntos de la circunferencia de una rueda *r* (fig. 224, lám. 11), que gira con un piñón concéntrico é invariablemente unido á ella alrededor de un eje proyectado en *m*. Los dientes del piñón engranan con los de la rueda R, móvil alrededor del eje *n*, y el sistema está dispuesto de manera que la rueda R da una revolución completa en el tiempo en que la *r* da diez, por el engranaje de diez dientes de que consta el piñón con ciento que presenta la rueda R. Dos agujas indicadoras *s*, *t* están fijas con los ejes *m*, *n* en una armadura metálica *p*, sujeta al mango A. Un tornillo de presión *x* acerca ó separa de la rueda *r* un resorte de acero, con el fin de poderla hacer girar más ó menos libremente. La circunferencia de la rueda *r* está rayada á fin de que no resbale sin girar, pues en este caso no se tendrían exactamente las magnitudes de las líneas que recorriese.

La circunferencia de la rueda *r* tiene un desarrollo de un decímetro exacto, que está dividido en diez partes, numeradas con las cifras 0, 1, 2... y cada una de estas partes corresponde á un centímetro, subdividido en otras veinte, cada una de las cuales vale

medio milímetro. Las divisiones correspondientes á los milímetros exactos aparecen algo más largas que las otras, prolongándose más entre ellas las que corresponden á los cinco milímetros.

La rueda R presenta también las cifras 0, 1, 2... que indican con las unidades que representan el número de revoluciones completas ó de decímetros recorridos por la rueda *r*, á partir de una posición en que los ceros de las graduaciones de R y de *r* coinciden con los extremos de las agujas *s* y *t*; posición que se obtiene haciendo girar á la rueda *r* hasta que tenga lugar la coincidencia.

437. **Usos del instrumento.**—Para hallar con auxilio del planímetro el área de un polígono ABCDE (fig. 225, lám. 11) se hace pasar por él un sistema de paralelas *b*, *b'*, *b''*... equidistantes entre sí una magnitud *a*, y será fácil ver, análogamente á lo que hemos dado á conocer (431 y 432), que el área de este polígono será igual al producto de la equidistancia *a* por la suma de las partes de las paralelas *b*, *b'*... comprendidas en el polígono. La ruleta sirve para determinar esta suma de paralelas; lo que se ejecuta haciendo en ella la coincidencia de los ceros con las agujas, como acabamos de indicar, y colocando el instrumento verticalmente de modo que el extremo de la aguja *t* coincida con el de la recta *b* que se halle más próximo al operador; se le pone entonces en movimiento apoyando la mano ligeramente en el mango A (fig. 224, lám. 11), para que la rueda *r* no resbale sin girar, recorriendo de este modo todos los puntos de la recta dada, con los que irá coincidiendo sucesivamente el extremo de la aguja *t*, hasta que corresponda exactamente al último de ellos. Se levanta entonces para colocarle en un extremo de la paralela *b'*, que se recorre del mismo modo, así como las paralelas restantes. La observación de las posiciones ocupadas entonces por las agujas indicadoras, dará la longitud buscada. Si tomamos por unidad el centímetro, y la aguja *s* resulta situada entre las divisiones 3 y 4 de la rueda R, la *r* habrá dado tres revoluciones ó recorrido 30^{cm}, y si la distancia del cero de la rueda *r* al extremo de la aguja *t* es de dos centímetros marcados por la cifra 2, y seis milímetros y medio observados en la graduación, que componen $2^{cm},65$, la longitud de la recta será de $32^{cm},65$ en escala natural.

Cuando la suma de paralelas que se mide es de mucha longitud, puede suceder que la rueda R dé más de una revolución: entonces es preciso cuidar de anotar las veces que pasa por *s* el cero de la graduación de esta rueda, correspondiendo cada vuelta á 100^{cm}.

Puede hacerse la medida sin la coincidencia previa de los ceros con las agujas, anotando la lectura que marca la ruleta en el momento de empezar á recorrer la primera recta, y hallando después la diferencia entre ésta y la que señala al concluir de recorrer la última. Si por ejemplo se empezase con la graduación $32^{cm},65$ que marcaba al concluir la que antes hemos propuesto como ejemplo, y después marcase $79^{cm},80$, la longitud que se busca sería de $47^{cm},15$.

Una vez hallada en centímetros la suma de las paralelas, no habrá más que multiplicarla por la equidistancia entre ellas, expresada también en centímetros, y se tendrá el área del polígono expresada en metros en la escala de $\frac{1}{100}$. Si la equidistancia es un centímetro, la suma de las paralelas dará desde luego el área.

Suponiendo, por ejemplo, que en la figura 225, las paralelas distan seis milímetros, y que la suma de las paralelas b, b'..... es $6^{cm},3$, se tendrá $a = 0^{cm},6$, y el área que se busca, llamándola S, será

$$S = 6^{cm},3 \times 0,6 = 3cm^2,78,$$

ó $3m^2,78$ en la escala de 1 por 100.

438. **Reducción á la escala del plano.**—Obtenidas como hemos visto las lecturas en escala natural y en centímetros cuadrados, para hallar el área de una figura trazada con arreglo á una escala diferente de la de 1 por 100, no habrá más que multiplicar el resultado obtenido por el área que en la escala de la figura represente el centímetro cuadrado. Así, si el polígono ABCDE (figura 225, lám. 11), estuviere construído en la escala de 1 por 250, como un centímetro lineal representa $2^m,5$ en esta escala, el centímetro cuadrado representará $6m^2,25$, por lo que el polígono tendrá un área

$$s = 6m^2,25 \times 3,78 = 23m^2,625.$$

439. La equidistancia de las paralelas puede hallarse en distinta escala que ellas, cuando su dirección es determinada: se sigue entonces la marcha establecida (437), expresando el valor de a en su escala correspondiente, y multiplicándole por la suma de las paralelas, reducida á su escala respectiva.

Si en la figura 225 (lám. 11), se tiene por ejemplo $a = 6^m$, lo que indica que la escala á que la equidistancia corresponde es la

de $\frac{1}{1000}$, se tendrá entonces para el área del polígono, teniendo presente (438) que la escala de paralelas es de 1 por 250,

$$b + b' + b'' + b''' = 15^m,75;$$

haciendo entonces aplicación de la regla que acabamos de dar, resultará

$$s = 6^m \times 15^m,75 = 94m^2,50.$$

440. **Observaciones acerca del grado de aproximación de los resultados obtenidos con la ruleta.**—La experiencia ha dado á conocer que el error cometido en la apreciación de las áreas con la ruleta, puede ser en las escalas ordinarias de 2 á 3 por 100 de la superficie que se considera; menor por lo tanto que el que tiene lugar cuando se aplica el cálculo determinando gráficamente los elementos geométricos. En la escala de $\frac{1}{100}$ para las paralelas que han de medirse, no hay diferencia apreciable entre los errores que produce el uso del instrumento de que nos ocupamos y los que resultarían de la aplicación del cálculo, en razón á la mayor apreciación que se obtiene para los valores de las paralelas.

441. **Corrección á que están sujetos los procedimientos empleados en la determinación de las áreas.**—Ocurre muchas veces tener que hacer uso en la medición de las líneas de una cadena cuya longitud es más ó menos de 10^m, por no tener medio de corregirla comparándola con otra que sea exacta ó no permitirlo el tiempo de que se dispone. En estos casos conviene emplearla cual se halla, tomándola como unidad de medida y hacer los cálculos considerándola como exacta, salvo á rectificar después el resultado, cuando se averigüe el error de la cadena. Para verificar esta corrección, supongamos que sea n el área que se ha determinado, referida al cuadrado construído sobre el valor real de la cadena que ha servido para la medida de las distancias: si representamos por l este valor real, l^2 será el verdadero valor de la unidad superficial; y como el área le contiene n veces, su verdadera expresión será

$$S = n \times l^2; \qquad [46]$$

Luego *para hallar la superficie no habrá más que multiplicar el* *resultado obtenido como si la cadena fuese exacta, por el cuadrado de la longitud real de la cadena inexacta.*

Supongamos que con una cadena inexacta se ha obtenido para valor de una superficie $n = 32$ áreas. Midiendo exactamente la cadena, supongamos que su longitud es $l = 10^{m},02$; se tendrá

$$S = 32^{a} \times 100m^{2},4004 = 32 \times 1^{a},004004 = 32^{a},128128.$$

442. **Reducción de las áreas al horizonte.**—Cuando se trata de una área plana y se conoce su pendiente (31), puede hallarse fácilmente su proyección horizontal.

Sea el triángulo ABC (fig. 226, lám. 11) inclinado al horizonte, *abc* su proyección horizontal y p la pendiente ó el ángulo que forman los planos en que se hallan situados dicho triángulo y su proyección, prolongados hasta que se encuentren. Si en la arista A*a* del prisma troncado ABC*abc* se toman las partes iguales AA′ y *aa′*, y por los puntos A′ y *a′* se tiran los planos A′B′C′ y *a′b′c′* respectivamente paralelos á los ABC y *abc*, resultarán los prismas equivalentes ABCA′B′C′ y *abca′b′c′* (Geom., Teor. 211). Llamando S á la superficie del triángulo ABC y tirando desde A′ la perpendicular A′*d* á esta base, el volumen del prisma ABCA′B′C′ será $S \times A'd$, y como el volumen del *abca′b′c′* es igual á $abc \times aa'$, tendremos, llamando s á la proyección horizontal *abc*, que

$$S \times A'd = s \times aa'.$$

En el triángulo rectángulo AA′*d* tenemos

$$A'd = AA' \times \cos.AA'd;$$

y como el ángulo *a*A′*d* no sólo es suplemento del AA′*d*, sino también del ángulo p que forman los planos (Geom., Teor. 147), resulta $AA'd = p$, y por consiguiente

$$A'd = AA' \cos.p;$$

cuyo valor, sustituído en la ecuación de los volúmenes, recordando que se tiene $AA' = aa'$, nos da por último

$$s = S \times \cos.p; \qquad [47]$$

Si se tiene $p = 90°$ ó $p = 60°$, será $\cos.p = 0$ ó $\cos.p = 0,5$, y por lo tanto $s = 0$ ó $s = \frac{S}{2}$.

Cuando los planos son paralelos es $p = 0$, y por consiguiente se tiene $\cos.p = 1$ y $s = S$.

CAPITULO VI.

NIVELACIÓN.

443. **Definiciones.**—Se da el nombre de *Nivelación* á la parte de la Topografía que tiene por objeto (41) hallar la diferencia de alturas de dos ó más puntos del terreno respecto á una superficie dada, que se designa con el de *superficie de nivel* ó *de comparación*. Estas diferencias, que se llaman *desniveles*, son las que existen entre las *cotas* ó alturas de los distintos puntos considerados respecto á la superficie de comparación elegida.

En la hipótesis adoptada para considerar la forma del globo terrestre (3), las superficies esféricas concéntricas con la de la tierra son *superficies de nivel*, que la naturaleza nos presenta en los lagos tranquilos, en los mares, si prescindimos de los movimientos causados por los vientos y las mareas, y en general en la superficie de un líquido cualquiera libremente solicitado por la acción de la gravedad. Estas superficies, consideradas en una extensión poco considerable, se confunden sensiblemente con el plano tangente á la superficie esférica, el cual puede adoptarse entonces como plano de comparación (41) al que se refieren las cotas de los diferentes puntos cuya representación geométrica nos ocupa.

Entre las distintas superficies de nivel, se ha convenido por los geógrafos en elegir como superficie general de comparación, para que los resultados de distintas nivelaciones sean comparables, la del Océano, considerada en su altura media entre las que corresponden á la mayor y la menor de las mareas vivas, suponiéndola prolongada por debajo de los continentes. El radio de esta esfera es de 6366200 metros (3).