

resultado obtenido como si la cadena fuese exacta, por el cuadrado de la longitud real de la cadena inexacta.

Supongamos que con una cadena inexacta se ha obtenido para valor de una superficie $n = 32$ áreas. Midiendo exactamente la cadena, supongamos que su longitud es $l = 10^m,02$; se tendrá

$$S = 32^2 \times 100m^2,4004 = 32 \times 1^a,004004 = 32^2,128128.$$

442. **Reducción de las áreas al horizonte.**—Cuando se trata de una área plana y se conoce su pendiente (31), puede hallarse fácilmente su proyección horizontal.

Sea el triángulo ABC (fig. 226, lám. 11) inclinado al horizonte, abc su proyección horizontal y p la pendiente ó el ángulo que forman los planos en que se hallan situados dicho triángulo y su proyección, prolongados hasta que se encuentren. Si en la arista Aa del prisma troncado $ABCabc$ se toman las partes iguales AA' y aa' , y por los puntos A' y a' se tiran los planos $A'B'C'$ y $a'b'c'$ respectivamente paralelos á los ABC y abc , resultarán los prismas equivalentes $ABCA'B'C'$ y $abca'b'c'$ (Geom., Teor. 211). Llamando S á la superficie del triángulo ABC y tirando desde A' la perpendicular $A'd$ á esta base, el volumen del prisma $ABCA'B'C'$ será $S \times A'd$, y como el volumen del $abca'b'c'$ es igual á $abc \times aa'$, tendremos, llamando s á la proyección horizontal abc , que

$$S \times A'd = s \times aa'.$$

En el triángulo rectángulo $AA'd$ tenemos

$$A'd = AA' \times \cos. AA'd;$$

y como el ángulo $AA'd$ no sólo es suplemento del $AA'd$, sino también del ángulo p que forman los planos (Geom., Teor. 147), resulta $AA'd = p$, y por consiguiente

$$A'd = AA' \cos. p;$$

cuyo valor, sustituido en la ecuación de los volúmenes, recordando que se tiene $AA' = aa'$, nos da por último

$$s = S \times \cos. p; \quad [47]$$

Si se tiene $p = 90^\circ$ ó $p = 60^\circ$, será $\cos. p = 0$ ó $\cos. p = 0,5$, y por lo tanto $s = 0$ ó $s = \frac{S}{2}$.

Cuando los planos son paralelos es $p = 0$, y por consiguiente se tiene $\cos. p = 1$ y $s = S$.

resultado obtenido como si la cadena fuese exacta por el cuadrado de la longitud real de la cadena inexacta. Supongamos que con una cadena inexacta se ha obtenido para valor de una superficie $n = 32$ áreas. Midiendo exactamente la cadena, supongamos que su longitud es $l = 10^m,02$; se tendrá

CAPITULO VI.

442. **Reducción de las áreas al horizonte.**—Cuando se trata de una área plana y se conoce su pendiente (31), puede hallarse fácilmente su proyección horizontal. Sea el triángulo ABC (fig. 226, lám. 11) inclinado al horizonte, abc su proyección horizontal y p la pendiente ó el ángulo que forman los planos en que se hallan situados dicho triángulo y su proyección, prolongados hasta que se encuentren. Si en la arista Aa del prisma troncado $ABCabc$ se toman las partes iguales AA' y aa' , y por los puntos A' y a' se tiran los planos $A'B'C'$ y $a'b'c'$ respectivamente paralelos á los ABC y abc , resultarán los prismas equivalentes $ABCA'B'C'$ y $abca'b'c'$ (Geom., Teor. 211). Llamando S á la superficie del triángulo ABC y tirando desde A' la perpendicular $A'd$ á esta base, el volumen del prisma $ABCA'B'C'$ será $S \times A'd$, y como el volumen del $abca'b'c'$ es igual á $abc \times aa'$, tendremos, llamando s á la proyección horizontal abc , que

NIVELACIÓN.

443. **Definiciones.**—Se da el nombre de *Nivelación* á la parte de la Topografía que tiene por objeto (41) hallar la diferencia de alturas de dos ó más puntos del terreno respecto á una superficie dada, que se designa con el de *superficie de nivel* ó de *comparación*. Estas diferencias, que se llaman *desniveles*, son las que existen entre las *cotas* ó alturas de los distintos puntos considerados respecto á la superficie de comparación elegida.

En la hipótesis adoptada para considerar la forma del globo terrestre (3), las superficies esféricas concéntricas con la de la tierra son *superficies de nivel*, que la naturaleza nos presenta en los lagos tranquilos, en los mares, si prescindimos de los movimientos causados por los vientos y las mareas, y en general en la superficie de un líquido cualquiera libremente solicitado por la acción de la gravedad. Estas superficies, consideradas en una extensión poco considerable, se confunden sensiblemente con el plano tangente á la superficie esférica, el cual puede adoptarse entonces como plano de comparación (41) al que se refieren las cotas de los diferentes puntos cuya representación geométrica nos ocupa.

Entre las distintas superficies de nivel, se ha convenido por los geógrafos en elegir como superficie general de comparación, para que los resultados de distintas nivelaciones sean comparables, la del Océano, considerada en su altura media entre las que corresponden á la mayor y la menor de las mareas vivas, suponiéndola prolongada por debajo de los continentes. El radio de esta esfera es de 6366200 metros (3).

En este supuesto, la cota del punto A (fig. 227, lám. 11) es su altura Am respecto á la superficie oceánica nsn . La cota negativa de un punto B sería la distancia Bn . Las cotas á que acabamos de referirnos se pueden materializar concibiendo bajada desde A una plomada de longitud Am , ó elevando desde B un flotador acompañado de un cordón Bn . En Topografía se ha adoptado también la misma superficie de comparación, si bien puede ser ésta arbitraria en operaciones aisladas ó de poca importancia.

El desnivel entre dos puntos A y D es la diferencia Am' de sus distancias Am , Ds , á la superficie nsn ó á otra cualquiera concéntrica con ella.

444. **Diferencia del nivel aparente al verdadero.**—En virtud de las definiciones que acabamos de establecer, el desnivel de los puntos A y B (fig. 228, lám. 11) de la superficie terrestre es la diferencia $BN' - AN$ de sus distancias á una superficie cualquiera de nivel NN' ; pero no siéndonos posible en la práctica la determinación de esta superficie, nos valemos del plano tangente NH , en uno de sus puntos N; plano que tenemos medios de obtener (29), pues es el plano horizontal del mismo punto (19). Todos los de la superficie NN' están de nivel verdadero con N, y de nivel aparente con el mismo punto los del plano horizontal NH . La vertical de B encuentra á las superficies de nivel verdadero y de nivel aparente en los N' y H, cuya distancia $N'H$ es lo que se llama *diferencia de nivel aparente al verdadero*. Designándola por x , puede hallarse su valor en función de la distancia horizontal $NH = l$ y del radio terrestre R, pues se establece fácilmente (Geom., Teorema 76) la proporción

$$2R + x : l :: l : x,$$

de la cual, suponiendo el primer término igual á $2R$, en lo que no hay error de consideración por la excesiva pequeñez de x respecto á $2R$, despejando x y sustituyendo en vez de R su valor numérico, resulta

$$x = \frac{l^2}{2R} = \frac{l^2}{12732400} = 0,0000000785 \times l^2; \quad [48]$$

445. **Error debido á la refracción atmosférica.**—La elevación causada por la refracción atmosférica hace que el punto H observado desde N como de nivel aparente con él, sea la imagen de otro cierto punto M inferior al plano de nivel, y producida por

la trayectoria MN, de la cual es NH la tangente al último elemento. El valor de la elevación MH, á que llamaremos r , varía con la temperatura y el estado higrométrico del aire, y con otras circunstancias, lo que hace que no pueda conocerse exactamente al tiempo de ejecutar las operaciones; pero en nuestros climas y en circunstancias atmosféricas ordinarias, se ha deducido de repetidas experiencias que es por término medio la fracción 0,16 de la diferencia $N'H$ de nivel aparente al verdadero. Se tendrá por lo tanto (444)

$$r = 0,16 \times x = 0,00000001256 \times l^2; \quad [49]$$

446. **Correcciones del desnivel entre dos puntos dados.**—Para calcular el desnivel exacto $BN' - AN$ (444) entre los puntos A y B (fig. 228, lám. 11), será necesario medir directamente la altura AN y deducir por el cálculo la BN' , para la cual se tiene

$$BN' = BM + MH - HN' = BM - (HN' - MH);$$

y hallando la diferencia entre los valores [48] y [49] (444 y 445) de HN' y de MH , será por último

$$BN' = BM - 0,000000066 \times l^2,$$

y restando AN de ambos miembros

$$BN' - AN = BM - AN - 0,000000066 \times l^2; \quad [50]$$

Esta fórmula presenta reunidas en una sola las correcciones de los errores cuya existencia hemos dado á conocer (444 y 445), bastando medir en cada caso la distancia horizontal que separa las verticales de los puntos dados, para multiplicar su cuadrado por el número constante 0,000000066, y restar este producto de la diferencia de alturas realmente obtenidas AN y BM .

447. **Casos particulares.—Corrección nula y corrección parcial.**—Cuando el plano de nivel aparente HN (fig. 229, lám. 11) es tangente en un punto N equidistante de las verticales de A y B, resulta $N'H' = N''H$, por ser diferencias entre oblicuas iguales y radios de un mismo círculo, así como también $H'M' = HM$, fracciones iguales (445) de $N'H'$ y $N''H$; luego el desnivel exacto entre A y B será (446)

$$BN'' - AN' = BM - AM';$$

diferencia de las alturas observadas desde N.

448. Si el plano tangente se halla entre los puntos A y B, pero no equidista de ellos, hay necesidad de aplicar la fórmula [50]; observando tan sólo que en vez de la distancia total entre ambos se debe sustituir por l la diferencia de las que median entre el punto de tangencia y los A y B.

449. **Tabla de corrección.**—Por medio de la fórmula [50] se ha calculado una tabla, que insertamos en la página siguiente, la cual da la cantidad en que ha de disminuirse para un valor dado de l el hallado para la diferencia de alturas de los extremos de esta distancia.

Para hacer aplicación de la tabla, supongamos que hemos hallado los valores $AN = 0^m,758$; $BM = 5^m,346$ y $l = 1800^m$; buscando en la segunda columna de las tablas el valor correspondiente al número 1800 de la primera, se tendrá para el desnivel z entre A y B (fig. 228, lám. 11):

$$z = 5,346 - 0,758 - 0,214 = 4^m,374.$$

Observando la tabla, se ve que cuando la distancia no llega a 120^m , el error es inferior a un milímetro, límite de las alturas apreciables por los medios que ordinariamente se emplean en las operaciones de *nivelación*.

0	0,0000	0,0000	0,0000
20	0,0000	0,0000	0,0000
40	0,0001	0,0001	0,0001
60	0,0002	0,0002	0,0002
80	0,0004	0,0004	0,0004
100	0,0007	0,0007	0,0007
120	0,0009	0,0009	0,0009
140	0,0013	0,0013	0,0013
160	0,0017	0,0017	0,0017
180	0,0021	0,0021	0,0021
200	0,0026	0,0026	0,0026
220	0,0032	0,0032	0,0032
240	0,0038	0,0038	0,0038
260	0,0045	0,0045	0,0045
280	0,0052	0,0052	0,0052
300	0,0059	0,0059	0,0059
320	0,0067	0,0067	0,0067
340	0,0076	0,0076	0,0076
360	0,0085	0,0085	0,0085
380	0,0095	0,0095	0,0095
400	0,0106	0,0106	0,0106
420	0,0116	0,0116	0,0116
440	0,0128	0,0128	0,0128
460	0,0140	0,0140	0,0140
480	0,0152	0,0152	0,0152
500	0,0165	0,0165	0,0165
520	0,0178	0,0178	0,0178
540	0,0192	0,0192	0,0192
560	0,0207	0,0207	0,0207
580	0,0222	0,0222	0,0222
600	0,0237	0,0237	0,0237
620	0,0254	0,0254	0,0254
640	0,0270	0,0270	0,0270
660	0,0287	0,0287	0,0287
680	0,0305	0,0305	0,0305
700	0,0323	0,0323	0,0323
720	0,0342	0,0342	0,0342
740	0,0361	0,0361	0,0361
760	0,0381	0,0381	0,0381

TABLA
para la corrección de los errores debidos a la diferencia de nivel aparente al verdadero, y a la refracción atmosférica.

Altura del punto observado sobre el nivel verdadero.		Altura del punto observado sobre el nivel verdadero.	
DISTANCIAS.		DISTANCIAS.	
1	2	1	2
m.	m.	m.	m.
0	0,0000	780	0,0401
20	0,0000	800	0,0422
40	0,0001	820	0,0444
60	0,0002	840	0,0465
80	0,0004	860	0,0488
100	0,0007	880	0,0511
120	0,0009	900	0,0534
140	0,0013	920	0,0558
160	0,0017	940	0,0583
180	0,0021	960	0,0608
200	0,0026	980	0,0634
220	0,0032	1000	0,0660
240	0,0038	1100	0,0798
260	0,0045	1200	0,0950
280	0,0052	1300	0,1115
300	0,0059	1400	0,1273
320	0,0067	1500	0,1484
340	0,0076	1600	0,1689
360	0,0085	1700	0,1907
380	0,0095	1800	0,2137
400	0,0106	1900	0,2382
420	0,0116	2000	0,2639
440	0,0128	2500	0,4123
460	0,0140	3000	0,5938
480	0,0152	3500	0,8082
500	0,0165	4000	1,0556
520	0,0178	4500	1,3360
540	0,0192	5000	1,6493
560	0,0207	5500	1,9957
580	0,0222	6000	2,3750
600	0,0237	6500	2,7874
620	0,0254	7000	3,2327
640	0,0270	7500	3,7110
660	0,0287	8000	4,2223
680	0,0305	8500	4,7666
700	0,0323	9000	5,3438
720	0,0342	9500	5,9541
740	0,0361	10000	6,5973
760	0,0381		

450. **Instrumentos de nivelación.**—Para la nivelación se emplean los *niveles* y las *miras*.—*Nivel* es todo instrumento destinado á proporcionar una recta NH (fig. 228, lám. 11), que girando alrededor de una vertical á la cual es perpendicular, determina con sus distintas posiciones un plano horizontal (19) al cual se refieren en dirección vertical las distancias AN ó BH de los distintos puntos A, B..... que en el terreno se consideran.

Mira es una regla dividida, que puesta á plomo sobre un punto B del terreno, da el valor de la distancia BH de dicho punto al plano de nivel NH. En realidad, la distancia obtenida, que se llama *altura de mira*, es la BM determinada por el *punto de mira* M, que aparece como situado en H, á causa de la refracción atmosférica (446).

451. **Mira de corredera ó de tablilla.**—Está formado este instrumento de dos reglas de madera *a* y *b* (fig. 230, lám. 11), la primera de las cuales puede deslizarse á todo lo largo de la otra, en virtud de los cortes por que están enlazadas, que permiten este movimiento y están representados por las porciones *a'* y *b'* en la sección transversal *s* de la regla total. Se sujetan ambas reglas por medio del tornillo de presión *t'*, que tiene su tuerca en la pieza metálica *c'*, unida invariablemente á la regla *a*. Cuando esta regla se halla en el punto más bajo de su carrera, y oprimida contra la otra por medio del tornillo *t'*, ambas constituyen una sola regla, que puede ser recorrida en toda su extensión por una armadura metálica *c*, y detenerse en un punto cualquiera, fijándola por el tornillo *t*, análogamente dispuesto que el *t'*. Formando cuerpo con la armadura está la *tablilla* de hierro (*m, m'*), cuyo frente se presenta dividido en cuatro rectángulos, dos de los cuales, opuestos en sentido de una de las diagonales del rectángulo que constituye la tablilla, están pintados de negro ó de rojo y los otros dos de blanco, para distinguirlos bien á larga distancia, destacar la mira de los objetos que la rodean, y señalar bien las rectas de separación de los rectángulos y su punto de intersección, que es el *punto de mira* (450).

452. **Graduación.**—La cara posterior de la regla *b* está dividida á partir del pie en metros, decímetros y centímetros, continuando la graduación en una de sus caras laterales y también de abajo arriba. A estas graduaciones corresponden *escalas* de un centímetro dividido en milímetros con el cero en la parte superior, dispuestas convenientemente en las armaduras *c* y *c'*.

453. **Uso de la mira.**—Unidas las reglas formando un solo cuerpo, como hemos indicado (451), se corre la tablilla hasta que el punto de mira se halle en el plano horizontal determinado por un nivel (450); la altura marcada por el cero de la escala en la armadura *c* será la altura de mira que se trataba de obtener. La tablilla puede subir así hasta alcanzar una cierta altura, 1^m,770 en la que representa la figura, á la cual la detiene un tope, dispuesto en un resorte metálico sujeto á la extremidad superior de la regla *a*. Cuando esto se verifica, es indispensable que el cero de la armadura inferior *c'* coincida exactamente con la línea inferior que marca la misma altura en la división lateral de la regla; debiéndose de lo contrario tener en cuenta el error para corregir las alturas de mira cuando se haga uso en lo sucesivo de la escala inferior. Si aún no ha llegado el punto de mira al plano de nivel, se afloja el tornillo *t'* y se hace subir á la regla *a*, cuidando el portamira de oprimir con el pie un estribo metálico que la otra regla tiene en su parte inferior. Llegado el punto de mira á la altura conveniente, se hace la lectura en la escala de la armadura *c'*, siendo de 1^m,961 en la disposición que presenta la figura. Si el cero de la escala no coincidiese exactamente con una división de la regla, se obtendría el número de milímetros que sería necesario añadir, contando de arriba abajo los que median entre el cero de la escala y la división inmediatamente inferior á él en la regla. En el ejemplo propuesto suponemos que es la primera de la escala á partir del cero (452).

454. **Mira parlante.**—Se compone esta mira de tres cuerpos de caoba *a, b, c* (fig. 231, lám. 11): el primero de una altura exacta de 1^m,500, recibe en su interior otro segundo cuerpo *b*, que corre á lo largo de él hasta tanto que se verifica el ajuste de un botón que lleva dispuesto el *b* por su parte inferior en un resorte metálico con el taladro circular *z*, que la cantonera superior del cuerpo *a* presenta en su parte posterior. La porción de regla que entonces sobresale del cuerpo inferior tiene una longitud exacta de 1^m,400; análogamente dispuesto se halla el tercer cuerpo constituido por una regla *c*, de igual altura que el segundo, alcanzando así una altura total de 4^m,300.

455. **Divisiones de la mira.**—La escala métrica de este instrumento se halla grabada en papel convenientemente preparado y dispuesto en uno de los frentes de las reglas. Las líneas de división que comprenden todo el ancho de la regla señalan una altu-

ra exacta de decímetros, cuya lectura se obtiene por el número rojo que se encuentra debajo de la línea y marca los metros y el negro que está por encima y señala los decímetros. Esta disposición varía en otras miras, y es conveniente antes de usarlas penetrarse del sistema de representación y de la manera de hacer la lectura. Algunas miras presentan invertidas las cifras para usarse con los instrumentos de anteojo astronómico.

Los centímetros que cada decímetro comprende están marcados por rectángulos alternativamente blancos y negros, de manera que leyendo de abajo arriba, los negros ocupan los lugares pares. A la mitad exacta de cada decímetro hay un círculo negro, cuyo centro está á la altura de la línea de separación de los centímetros quinto y sexto. Respecto á los milímetros se aprecian á ojo, para lo que se necesita alguna práctica. Algunas miras están divididas hasta dobles milímetros por trazos gruesos alternando también de blanco y negro, y dispuestos al lado de las divisiones que marcan los centímetros.

456. **Uso y lectura de la mira parlante.**—Puesta verticalmente la mira en el punto cuya distancia al plano de nivel se quiere determinar, procederá el portamira á sacar el segundo cuerpo, si el primero no basta para alcanzar al plano citado, dándole toda su altura, para lo que se tendrá cuidado con el ajuste del botón correspondiente, que tendrá lugar al llegar á la altura conveniente, en virtud de la fuerza elástica del resorte. En caso necesario se hará uso del tercer cuerpo, para lo que será conveniente introducir el segundo á fin de no separar á la mira de su aplomo, y sacar sucesivamente el tercero y segundo, cuidando siempre del ajuste sucesivo de ambos botones.

La división de la mira en que se proyecte el plano de nivel dará la altura pedida, obteniéndose su valor por la lectura de los metros y decímetros que comprenda, y la apreciación de los centímetros y milímetros. Como ejemplos de lectura, se representan en la figura las alturas siguientes, que corresponden á otras tantas posiciones en que se supone situado el plano de nivel: $m = 0^m,300$; $n = 0,470$; $p = 0,730$; $q = 1,084$; $r = 1,150$.

457. **Mira parlante perfeccionada.**—Esta mira, que es la que emplea en sus trabajos el *Instituto Geográfico*, se compone de una regla de madera R (fig. 232, lám. 11), que tiene de largo $3^m,05$; de ancho $0^m,10$ y de grueso $0^m,02$. En su cara anterior AB lleva la *división*, y en la posterior CD tiene en sentido de toda su

longitud una pieza adicional ó listón *W* de forma prismática rectangular, también de madera, fuertemente unida á dicha cara posterior CD por medio de tornillos, después de encolada, con el objeto de dar más consistencia á la regla R é impedir que se alabee. En esta misma cara lleva en la parte superior, y á los dos tercios de la altura de la mira, una pieza prismática de metal, tal como *s*, unida al listón *W* y con un pequeño taladro *o* por donde pasa el hilo de una plomada *p*, y en la inferior un *tope* de metal *t* donde descansa el vértice del cono de la plomada en un punto *o'* señalado en la cara superior del tope, que se llama *punto de fe*. Este punto *o'* y el taladro dicho *o* se hallan á la misma distancia del listón *W*.

Tanto la parte superior de la mira como la inferior terminan en dos cantoneras de hierro para impedir que se deteriore, y la cantonera inferior *c'* va provista en su punto medio de un pequeño cilindro terminado en un segmento esférico *e*. Acompaña por separado á la mira una plancha de hierro P prismática triangular (fig. 233, lám. 11) que tiene de lado $0^m,15$ y de grueso $0^m,02$ y que lleva un agarradero ó asa *r* para el transporte. Esta plancha triangular tiene en el centro de su cara superior practicada una cavidad esférica *c* y un taladro en el centro de esta cavidad, que permite ver un punto del terreno. Esta cavidad puede recibir y además encajarse en ella el segmento esférico *e* en que termina la cantonera inferior *c'* de la mira. En los tres vértices de la cara inferior lleva esta plancha tres puntas de hierro para afirmarla en el terreno.

Lleva también la mira en su cara posterior CD, y á la altura de $1^m,10$, un taladro practicado en el listón *W*, donde entran á rosca los extremos de dos mangos *m* y *m'* ó agarraderos de madera que sirven para sostener la mira durante su uso.

458. **Divisiones y lectura de la mira.**—En la cara anterior AB de la mira (fig. 232, lám. 11) se ha dividido su anchura *ab* en cinco partes, y las rectas trazadas por los puntos de división en sentido de la longitud de la mira, dividen á esta cara anterior en cinco fajas. Partiendo después de la parte inferior, se divide la longitud de dicha mira en *decímetros* por rectas *ab*, *a'b'* y *a''b''*.... Como la longitud de la mira hemos dicho que es de $3^m,05$ y la parte dividida sólo comprende 3 metros, llevando el *ceró* á los 2 centímetros de la cantonera inferior se dejan en la parte superior 3 centímetros en blanco.