

ción del problema general, y anotar cuidadosamente cada uno de estos puntos, para no confundir las cotas que han de corresponderles.

Halladas las alturas de mira a, a', b, b', \dots (fig. 240, lám. 12), siendo A, B, C..... los puntos cuyas cotas tratamos de determinar, la cota que corresponde al punto de partida A es en general arbitraria, y conviene elegirla de manera que el plano de comparación pase por debajo ó por encima de todos los puntos del terreno que tratamos de acotar, con objeto de que todas las cotas resulten de un mismo signo (Acots., 7). Bastará para conseguirlo asignar al punto A una cota mayor que la diferencia calculada, ó que se juzgue debe haber entre este punto y el más bajo, en caso de que el plano de comparación haya de ser inferior á los puntos dados. Cuando hubiese de ser superior á ellos, se tendría en cuenta el desnivel de A con el más elevado. Si en el curso de las operaciones resultase una cota negativa, se obviaría este inconveniente añadiendo á todas las cotas ya calculadas una misma cantidad, que para mayor facilidad debe ser un múltiplo de 10.

Otras veces el plano de comparación está dado por las condiciones del problema, como cuando las cotas han de referirse al nivel del mar (443).

Sea AA' la cota arbitraria del punto de partida. Para hallar la que corresponde al punto B, tendremos la expresión

$$BB' = AA' + BF;$$

y para los siguientes:

$$CC' = BB' - BG; \quad DD' = CC' - CH; \quad EE' = DD' + EL.$$

Observando estas expresiones, deduciremos que *para hallar la cota de un punto cualquiera, no hay más que añadir á la cota del punto anterior ó restar de ella el desnivel que existe entre ambos puntos, según que este desnivel resulte subiendo ó bajando en el sentido de la marcha de la operación.*

481. **Croquis y registro de la nivelación.**—El croquis de la nivelación consiste en trazar á mano para cada estación una línea en sentido de derecha á izquierda, ó al contrario, que representa la horizontal del nivel, y tirar por sus extremos perpendiculares, que representarán las alturas de mira; estas perpendiculares se cortan por una recta inclinada en el mismo sentido que la que representa del terreno. Las alturas de mira observadas se

anotan al lado de las líneas que las representan y en el orden con que se han obtenido, resultando para cada mira dos alturas, de las cuales la de la izquierda es la altura de frente de una estación, y la de la derecha es la de espalda en la estación que sigue. Las distancias que median entre los puntos nivelados se escriben sobre la horizontal del nivel cuando se han medido horizontalmente, y al lado de las rectas inclinadas correspondientes si se han medido con la pendiente que tienen en el terreno.

El registro se dispone como el modelo que insertamos en la página 221. Se principia por anotar en la casilla núm. 1 la letra A con que hemos designado el punto de partida, en la núm. 10 y en el mismo renglón la cota arbitraria 85^m,000 que le hemos atribuído, y en la núm. 11 la indicación del sitio que ocupa.

El segundo renglón se destina á las anotaciones que se refieren al punto B, el cual se anota en la primera casilla; en la segunda se inscribe la letra M que designa la estación desde la cual se han tomado las alturas $a = 3^m,528$ y $a' = 0^m,837$, que han de dar el desnivel entre A y B, y las cuales se anotan respectivamente en las casillas 6 y 7. La distancia AB que media entre ambos puntos se anota también en el mismo renglón, ocupando la casilla núm. 3 ó la núm. 4, según se haya medido con la pendiente que tiene en el terreno, ó bien horizontalmente.

La estación N se anota en el renglón siguiente, así como el punto C y los valores de b y b' en las casillas correspondientes; continuando del mismo modo hasta llegar al punto E en que termina la nivelación. La casilla núm. 3 se deja en blanco, como en todos los casos en que la cota del punto C no es importante, y es uniforme la pendiente en el sentido de la alineación BD.

482. **Cálculo de las cotas, y reducción de las distancias al horizonte.**—Anotados en el terreno los datos que acabamos de indicar, se procede á calcular las diferencias de las alturas de mira de cada estación, inscribiéndolas en la casilla núm. 8 del registro cuando resultan subiendo, que será siempre que la mayor altura ocupe la casilla núm. 6; y se anotará en la núm. 9 cuando resulte bajando, lo que se conocerá en que la mayor altura de mira está en la séptima casilla.

Añadiendo después á la cota de A la diferencia 2,691 que corresponde á B, se obtendrá la cota 87,691 de este punto: restando de esta diferencia 1,188 se hallará la cota 86,503 del punto C, y así sucesivamente.

El desnivel entre dos puntos cualesquiera de los A, B, C..... que hemos considerado, se calculará por la diferencia de sus cotas (Acots., 6). Así la que resulta para los A y E es el desnivel 1^m,650, obtenido por la nivelación general.

Cuanto hemos dicho supone que el plano de comparación es inferior; si fuese superior, se referirían las cotas de los puntos á este plano, restando de la cota anterior la diferencia que hubiese resultado subiendo, ó sumándola si fuese bajando.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
A	M	177,57	177,55	0,00	3,528	0,837	2,691	»	85,000	Esquina N de la Ermita de*
B	N	»	»	177,55	1,216	»	»	»	87,691	
C	P	283,86	283,85	»	0,842	2,404	»	»	86,503	
D	Q	170,03	170,02	461,40	3,057	2,528	1,833	»	84,817	
E			631,42	631,42	6,993	1,224	4,524	2,874	86,650	Punto en el anden del puente de*, marcado con esta señal (X).
					8,643	6,993	2,874			
					1,650		1,650			

REGISTRO DE NIVELACIÓN.

Puntos nivelados.	Estaciones.	DISTANCIAS.			MIRAS.		DIFERENCIAS.		Cotas.	OBSERVACIONES.
		Parciales.	Reducidas.	Al origen.	De espalda.	De frente.	Subiendo.	Bajando.		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
A	M	»	»	0,00	»	»	»	»	85,000	Esquina N de la Ermita de*
B	N	177,57	177,55	177,55	3,528	0,837	2,691	»	87,691	
C	P	»	»	»	1,216	»	»	»	86,503	
D	Q	283,86	283,85	461,40	0,842	2,404	»	»	84,817	
E		170,03	170,02	631,42	3,057	1,224	1,833	»	86,650	Punto en el anden del puente de*, marcado con esta señal (X).
			631,42	631,42	8,643	6,993	4,524	2,874		
					1,650		1,650			

483. Por medio del desnivel hallado 2,691 entre los puntos A y B y la longitud 177^m,57 de la recta AB que los une, se puede hallar su proyección horizontal AF (fig. 240, lám. 12), haciendo uso de la fórmula [3] (72). Para la reducción de BD se sumarán los desniveles BG y CH, que darán 2,874 en razón á que la pendiente de sus segmentos BC y CD es la misma.

Las distancias al origen se calculan sumando con cada una de ellas la distancia reducida siguiente.

484. **Comprobación de los cálculos.**—Para cerciorarnos de que no hemos cometido equivocaciones en el cálculo de las diferencias y las cotas, se ejecuta una operación que sirve para comprobarle, y consiste en sumar las cantidades escritas en cada una de las columnas 6, 7, 8 y 9, y ver si la diferencia de las dos primeras sumas es igual á la que existe entre las dos segundas, en cuyo caso las diferencias están bien calculadas. Para comprobar las cotas se halla la diferencia entre las cotas extremas, y se ve si es igual á las diferencias anteriores. En caso de que todas no fuesen iguales, sería necesario proceder á calcular nuevamente los números insertos en las casillas 8, 9 y 10.

Cuando se ha escrito por equivocación una diferencia subiendo en la columna núm. 9 ó al contrario, se comete un error en el desnivel total que es igual al doble de la expresada diferencia, y que las comprobaciones indicadas dan necesariamente á conocer. De aquí la imprescindible necesidad de ejecutarlas siempre que se quiera tener confianza en el resultado de las operaciones.

Las distancias al origen se comprueban viendo si la última de ellas es igual á la suma de las reducidas en la columna 4.

485. **Observación general acerca de los puntos que deben acotarse.**—Puede ocurrir que tratándose de hallar las cotas de los puntos A, B, D, E (fig. 210, lám. 12) las operaciones de nivelación nos conduzcan como en el ejemplo resuelto (481) á la determinación de la que corresponde á un punto C.

Esta cota puede suprimirse en un estado general de las que corresponden á los puntos dados. También se acostumbra suprimir la designación de los puntos que se hallan en las mismas condiciones que C, llamados *puntos intermedios*, indicando con lápiz los resultados del cálculo de todas las cotas hasta que se han comprobado, y pasando después con tinta únicamente las que corresponden á los puntos dados. La distancia se mide también de B á D.

486. **Comprobación de las operaciones de nivelación.**

—Se comprueba una nivelación repitiéndola á fin de comparar su resultado con el obtenido primeramente, ejecutando las operaciones del terreno con el mismo cuidado, así como los cálculos necesarios para la determinación del desnivel. Si éste difiere del primeramente hallado en una cantidad insignificante, podrá adoptarse el término medio. De lo contrario habría que proceder á una tercera nivelación, que bastará en general para averiguar el verdadero desnivel. Algunos prácticos ejecutan una doble nivelación, cambiando de sitio el instrumento en cada estación y tomando nuevamente las alturas de las miras extremas, con lo cual se evita recorrer de nuevo la línea nivelada.

Cuando se han acotado algunos puntos en la primera operación, se conocerán los desniveles que existen entre ellos, y de esta manera se subdivide la nivelación en otras nivelaciones parciales. La comprobación puede entonces referirse á estos puntos, que estando bien determinados, darán á conocer en la mayor parte de los casos dónde se han cometido las equivocaciones, y sólo habrá que repetir la nivelación entre aquellos puntos cuyos desniveles parciales no hubiesen dado el mismo resultado en ambas operaciones.

Si la nivelación debe terminar en el punto de partida, los puntos acotados ó de referencia determinan un polígono, y la comprobación se reduce entonces á observar si el desnivel total es cero ó difiere muy poco de él; ó bien si la cota final hallada es la misma que la asignada al punto de partida. Haciendo extensiva la circunstancia análoga en la transportación del plano de un polígono, se dice que éste *cierra por nivelación*.

487. **Observaciones generales acerca de la práctica de la nivelación y obstáculos que pueden presentarse.**—

Es preciso que las miras estén dispuestas en posición perfectamente vertical; su inclinación produce un error que crece con la altura de mira para una inclinación constante v ; pues en la fórmula

$$x = l \times \cos. v, \quad [55]$$

que representa en función de la altura l correspondiente á la inclinación v el valor x de la verdadera altura de mira, crece este valor con l cuando v permanece constante. La altura x es la menor de las que pueden observarse cuando el viento agita la mira. Cuando se nivela por terrenos fuertemente accidentados y se hace uso de la mira parlante (454 y 457), conviene disminuir el número

de estaciones ganando lo posible en desnivel; para lo cual se *empalmarán* las miras colocando una de ellas sobre la cantonera metálica en que termina el primer cuerpo de la otra, y se tendrá la altura correspondiente añadiendo á la lectura hecha, la altura $1^m,500$ de dicho primer cuerpo. Conviene que la última mira de una estación permanezca inmóvil en el punto en que se halla colocada, para servir de mira de espalda en la estación siguiente y no alterar el resultado final de la operación.

488. Respecto al uso de los niveles, observaremos que al hacer estación debe procurarse que la altura á que se coloca el plano de nivel alcance al pie de la mira si está más elevada que el instrumento, ó no pase por encima de toda su altura si está más baja: de lo contrario, habría que cambiar de estación el nivel perdiéndose un tiempo á veces considerable.

Al trasladar el nivel de agua de una á otra estación, se evita que el líquido se derrame, tapando uno de los frascos, que se tiene cuidado de destapar al hacer la nueva estación.

En los terrenos pantanosos conviene disponer las miras y los pies del trípode sobre piedras de grano, que se adhieren y quedan sujetas en el fango por la compresión que sobre él ejercen al ser introducidas. Para las miras se hace uso también de clavos de hierro con cabeza esférica armados de tres ó cuatro puntas, que en virtud de su forma se fijan bastante bien al terreno.

489. Uno de los obstáculos que con más frecuencia se presentan en la práctica de la nivelación es un escarpado de mayor desnivel que el que puede obtenerse con las miras: se dispone entonces una de ellas invertida, cuyo pie se coloca á la altura del punto más elevado y otra directa en el más bajo, siendo el desnivel entonces la suma de las distancias respectivas del cero al plano de nivel, y cuidando de anotar esta circunstancia en el registro y de dibujarla en el croquis. Al mismo medio se recurre cuando una cerca B (fig. 241, lám. 12) impide por su elevación colocar el plano de nivel más elevado que ella á fin de observar la mira siguiente al otro lado de la cerca. El desnivel entre A y B será entonces $a + a'$. Cuando las dos miras deben colocarse invertidas, como sucede de B á C, entonces el desnivel será $b - b'$ como si estuviesen naturalmente colocadas. Las alturas de la cerca en B y C sobre el terreno serán sus desniveles BP y CQ sobre P y Q.

490. **Problemas de nivelación.—Generalidades.**—Se reducen estos problemas á la aplicación de los procedimientos gene-

rales de la nivelación á la determinación de puntos de un mismo plano horizontal ó de un desnivel dado, de rectas de pendiente determinada, y de alturas verticales cuyos valores se necesita conocer aisladamente ó bien relacionados con las operaciones de una nivelación.

491. **Hallar un punto cuyo desnivel con otro dado sea igual á una cantidad determinada.**—Se hace uso de un nivel que se estaciona convenientemente, y se halla la altura de mira que corresponde al punto dado: marcando entonces en la mira una altura igual á la obtenida más ó menos el desnivel conocido, según se quiera que el nuevo punto resulte más bajo ó más elevado que el primero, no habrá más que colocar sucesivamente la mira en varios puntos del terreno, sin variar la altura marcada en ella, hasta que la visual dirigida según el plano horizontal del nivel señale esta altura: el punto del terreno en que la mira esté situada entonces es el punto pedido. En estos tanteos cuidará el portamira de elegir puntos más altos ó más bajos que el que ocupa según el sentido en que le indique el observador por medio de señas convenidas.

Cuando el desnivel fuese mayor que la altura total de la mira, se resolvería este problema por una nivelación compuesta, anotando los desniveles parciales hasta que faltase para el total pedido una cantidad menor que la altura de la mira. En este caso se marca el punto siguiente de manera que satisfaga á la condición del problema. Si por ejemplo el segundo punto hubiese de estar $14^m,8$ más elevado que el primero, y después de tres estaciones se ha obtenido un desnivel de $12^m,5$, se determinará el punto pedido haciendo que resulte $2^m,3$ más alto que el pie de la mira anterior.

492. Con los eclímetros se resuelve este problema marcando en ellos la pendiente *cero*, y usándolos como niveles de la manera que acabamos de dar á conocer.

493. **Dado un punto de la superficie del terreno, hallar otro que esté de nivel con el primero.**—Este problema es el caso particular del anterior en que el desnivel dado es *cero*. Colocada una mira en el punto dado A (fig. 242, lám. 12) y puesto el nivel en estación en M, se toma la altura de mira en A, y con ella se busca por tanteos un punto del terreno en el cual colocada la mira sin variar la altura marcada en ella, la visual termine exactamente en el punto que la señala. El punto B ocupado por el pie

de la mira, estará de nivel con A, ó mejor dicho, se hallará en el mismo plano horizontal que éste último.

494. **Trazar en el terreno una línea cuyos puntos se hallen en un mismo plano horizontal.**—Determinados como en el problema anterior los puntos A y B (fig. 242, lám. 12), se pasa á estacionar el nivel en otro punto N, y se marca la altura Bs de la nueva visual en la mira que ha debido permanecer en el punto B. Con esta altura se determina como en el problema anterior el punto C, que estará en el plano horizontal de B; y por consiguiente los tres puntos A, B, C serán de nivel ó estarán en un mismo plano horizontal. Dejando colocada la última mira C y pasando á hacer una nueva estación con el nivel, se podrá determinar otro punto del mismo plano, y así sucesivamente.

La altura *rs* es la diferencia de las que corresponden á los planos de nivel aparente determinados por la visual en las estaciones sucesivas del instrumento; diferencia que no influye en el resultado de la operación, en razón á que se hace variar en la misma cantidad la altura de mira al mudar de estación el nivel. Cuando desde una misma estación se pueden determinar tres ó más puntos, no hay necesidad de variar la altura de mira al pasarla de uno á otro.

Los puntos A, B, C... determinados, están en la superficie del terreno y pertenecen, por lo tanto, á la intersección de éste con un plano horizontal. La curva *abc*... que une las proyecciones *a, b, c*... de dichos puntos será una de las secciones horizontales que pueden considerarse en la superficie del terreno para su representación geométrica (Acots., 106). Los puntos *m, n*... son las proyecciones de los de estación M, N, y las rectas *ma, mb, nb, nc*... las de las visuales dirigidas á las miras A, B, C...

495. **Hallar la pendiente de la recta que une dos puntos dados del terreno.**—Empleando los goniómetros de limbo zenital y los eclímetros, puede obtenerse esta pendiente como ya sabemos (180 y 475). Con un nivel bastará dividir el desnivel entre los puntos dados por la proyección horizontal de la recta que los une (Acots., 25).

496. **Dado un punto del terreno, hallar otro tal, que la recta que los une tenga una pendiente dada.**—Haciendo estación en el punto dado, se hace que el nonius del limbo zenital marque la pendiente asignada (116), ó el eclímetro la relación del tanto por ciento ó por unidad (472), y en el sentido que

haya de tener la pendiente; se toma en una mira la altura del centro del limbo zenital sobre el punto de estación, y se busca por tanteos un punto del terreno, en el cual colocada la mira con la altura marcada en ella, la visual tirada por el anteojo vaya á parar exactamente al punto de mira, de la misma manera que hemos indicado (491).

497. Para trazar una recta de pendiente dada con un nivel, se halla (491) un punto cuyo desnivel con el dado sea igual al numerador del quebrado que expresa la pendiente dada, haciendo al mismo tiempo que la distancia horizontal entre ambos puntos sea de 100 metros. Para la pendiente de 3 por 100, se hará que el desnivel sea de 3 metros.

498. **Trazar en el terreno una línea de pendiente dada.**—Se resuelve este problema determinando cada uno de sus elementos sucesivos por el problema anterior, como se dijo para la línea poligonal de elementos horizontales (494), con respecto al que le precede (493).

499. **Medida de alturas ó altimetría.**—En este problema pueden considerarse en general dos casos distintos, según sea ó no visible y accesible el pie de la altura. Consideraremos sucesivamente estos dos casos.

500. **Medida de alturas, cuyo pie es accesible, y están situadas en terreno horizontal.**—Sea AE (fig. 243, lám. 12) la altura de una torre cuyo valor se trata de conocer: mídase una base AB, y poniendo el instrumento en estación de modo que su centro C esté en la vertical del extremo B de la base, dirijase la visual horizontal CD y tómesese el ángulo de elevación DCE; con lo cual se podrá resolver el triángulo rectángulo DCE, en el que se conocen dos ángulos y el cateto $CD = AB$, y se tendrá el valor de DE. Añadiendo á este valor la altura AD, igual á la BC del instrumento, se tendrá el de la altura AE que se trataba de conocer.

Ejemplo.—Sea $AB = CD = 85^m, 24$; $BC = 1^m, 15$ y $DCE = 44^\circ 26'$: resultará $AE = 84^m, 72$.

501. Haciendo uso de la plancheta, se trazará en el papel del tablero una línea de lápiz *mn* (fig. 244, lám. 12) paralela al canto *rs*, y se colocará el tablero en la posición vertical por medio de una plomada y de modo que *rs* quede horizontal, lo que se conseguirá valiéndose del nivel sencillo de aire. Se marcará en la línea *mn* el punto C que se halle en la vertical del extremo B de la base AB, medida de antemano, y clavando una aguja en dicho punto;