cajas que corresponden á los puntos A′, C′ y B′ el correspondiente *nonius* que comprende la longitud de 9 milímetros dividida en 10 partes iguales, recibiendo por esta circunstancia este instrumento el nombre de *pantógrafo decimal*, que no es otra cosa que el de Gavard perfeccionado.

Las fórmulas para establecer las divisiones son las mismas que las del de Gavard, con la diferencia de que en el pantógrafo decimal son iguales las constantes a y b.

574. **Aplicación de la fotografía á la copia y reducción de los planos.**—La *fotografía* está llamada á prestar un importante servicio en su aplicación á la copia de los planos en igual, mayor ó menor escala que el original, cuando este problema haya acabado de resolverse por completo. Hoy se reproducen ya los dibujos con mucha exactitud; pero este sistema tiene el inconveniente, cuando el original presenta muchos detalles y la relación elegida para la copia es muy pequeña, que ésta resulta bastante confusa, puesto que se reproducen todos aquellos; y en un plano topográfico no hay necesidad sino de cierto número de ellos, debiéndose descartar, para la claridad del dibujo, los que son insignificantes. En los planos en grande escala es de la mayor importancia la aplicación de la fotografía, por lo mismo que reproduce todos los detalles. Atendida la índole de este sistema y la prontitud de las operaciones, la fotografía será con el tiempo un inmenso adelanto en la reproducción de los planos y producirá economías de consideración.

Hemos concluído con la primera parte de la *Topografía*, ó sea con la parte necesaria al *Agrimensor* para medir los terrenos y levantar el plano de los mismos, representando además su forma y teniendo todos los datos necesarios, que á su vez puede utilizar para emprender otras varias operaciones que se le pueden encomendar y que son del dominio exclusivo de la *Agrimensura*, como son la transformación y división de los polígonos, los deslindes y apeos de los terrenos, de lo cual vamos á ocuparnos en la segunda parte, así como del conocimiento y clasificación, análisis químico y tasación de los mismos.

PARTE SEGUNDA.

CAPITULO PRIMERO.

TRANSFORMACIÓN DE LOS POLÍGONOS Y DIVISIÓN DE TERRENOS Y HEREDADES.

575. **Transformación de los polígonos.—Ideas generales.**—Se dice que se *transforma* un polígono en otro, cuando por medio de una *operación gráfica* se sustituye el primero con otro que le es *equivalente*, es decir, que tiene la misma superficie que el polígono dado, pero cuya forma es distinta de la de éste, pudiendo ser el mismo ó diferente el número de sus lados y ángulos; pero siempre distintas las relaciones de magnitud de unos y de otros.

Se concibe que esta operación gráfica debe ejecutarse en el papel, después de haber construído el polígono del terreno en la mayor escala posible, para verificar después las referencias al terreno; puesto que aunque pudiera ejecutarse desde luego sobre este último, las dificultades que se ofrecen en general producen resultados menos exactos. En lo que vamos á decir se entenderá, sin embargo, que operamos lo mismo sobre el terreno que sobre el papel.

La transformación de los polígonos es una operación de la mayor importancia, por las razones siguientes:

1.ª Porque es indispensable como auxiliar en la resolución de muchas cuestiones, especialmente en las que tienen por objeto la división de los terrenos y heredades.

2.ª Por la aplicación que puede hacerse de ella como auxiliar también para la medición de las superficies, transformando los polígonos dados en otros, cuyas formas sean más adecuadas para el cálculo de aquéllas.

3.ª Por la conveniencia que puede resultar en casos dados á los propietarios colindantes, de la transformación convencional de sus heredades, en otras que tengan el mismo ó menor número de lados, para regularizar las figuras de los terrenos y rectificar los linderos, ó para satisfacer á otra circunstancia cualquiera.

Pasaremos por lo tanto á la resolución de varios problemas.

576. **Problema 1.º—Transformar un triángulo equilátero ó isósceles en otro triángulo rectángulo equivalente.**—Si el vértice B (fig. 260, lám. 13), ha de ser el mismo, bájese la perpendicular BD, prolónguese DA de modo que DE sea igual á AC; tírese la BE, y el triángulo rectángulo EBD será equivalente al ABC, por tener ambos igual base y altura (Geometría, Teor. 94.—Cor. 1.º). Si la base AC ha de ser la misma, levántese en C la perpendicular CB′ hasta encontrar en B′ á la paralela tirada por B á la AC, y trazando la AB′, el triángulo AB′C será el que se pide.

577. **Problema 2.º—Transformar un triángulo escaleno en otro rectángulo equivalente.**—Si la base AC (fig. 261, lám. 13) ha de ser la misma, levántese la perpendicular CB′ á la AC y por el punto B tírese la paralela BB′ á dicha AC, y el triángulo AB′C resolverá la cuestión. En el caso de que haya de ser el mismo el vértice, bájese la perpendicular BC′ á la AC prolongada, tómese C′A′ = AC, y trazando la BA′, el triángulo A′BC′ será el que se pide.

578. **Problema 3.º—Transformar un triángulo cualquiera en otro equivalente que tenga la misma base y la misma altura.**—Trácese por el punto B (fig. 262, lám. 13) la paralela B′B″ á la base AC, y todos los triángulos AB′C, AB″C, que tengan la base AC y sus vértices se hallen en dicha paralela serán equivalentes al propuesto. Este problema sirve para transformar un triángulo acutángulo ABC en otro obtusángulo equivalente AB″C y recíprocamente; siendo determinado el problema cuando se da el valor que ha de tener uno de los ángulos de la base, y pudiéndose enunciar entonces de este modo.

Transformar un triángulo ABC *en otro equivalente* AB′C *que tenga la misma base y altura, y el ángulo* ACB′ *ó* CAB′ *dé la base igual á un ángulo dado.*

Si el triángulo dado ABC se ha de transformar en otro isósceles AFC, se levantará la DF perpendicular en el punto medio D de AC; y si en otro rectángulo AEC, la AE perpendicular á AC en uno de sus extremos A.

579. **Problema 4.º—Transformar un triángulo** ABC (fig. 263, lám. 13) **en otro equivalente** AB′C′ **que tenga una altura dada.**—El vértice B′ del nuevo triángulo puede darse situado en el lado AB ó en su prolongación: en ambos casos tírese la B′C y por el punto B la paralela BC′ á la B′C; únase el punto B′ con el C′ por medio de la B′C′, y el triángulo AB′C′ resolverá la cuestión; pues resultan equivalentes (578) los triángulos BB′C, C′B′C para el primer caso, y los B′BC′, CBC′ para el segundo.

Si el vértice B′ estuviese fuera del triángulo ABC, como en las dos posiciones de la figura 264 (lám. 13), se tirará la recta AB′ y por el punto B la BD paralela á AC hasta que encuentre á la AB′ ó á su prolongación en el punto D; trácese la CD y por el caso anterior constrúyase el triángulo AB′C′, el cual, siendo equivalente al ADC, como éste lo es al ABC, quedará resuelta la cuestión.

Se comprende que si el punto B′ no se da de posición, podrá resolverse por este medio el problema de

Transformar un triángulo ABC *en otro equivalente* AB′C′ *cuya altura sea dada, así como un ángulo* B′AC′ *de la base.*

580. **Problema 5.º—Transformar un triángulo** ABC (fig. 265, lám. 14) **en otro equivalente que tenga una base dada.**—Si la base ha de ser FC, que resulta de prolongar la AC en uno de sus sentidos, se tirará la BF y por A la paralela AD á la BF, y uniendo el punto F con el D, se tendrá el triángulo FDC, equivalente al ABC.

Si la base ha de ser la FE que resulta de prolongar la AC en sus dos sentidos, después de hacer la construcción anterior, se trazará la DE, y por C la CO paralela á DE, y uniendo el punto O con el E, el triángulo FOE será equivalente al FDC, y por consiguiente al ABC.

581. **Problema 6.º—Transformar un cuadrilátero cualquiera** ABCD (fig. 266, lám. 14), **convexo ó cóncavo, en un triángulo equivalente cuyo vértice sea el B del cuadrilátero.**—Tírese la diagonal BD, y por el punto C la paralela CE á la BD hasta que encuentre á la AD ó á su prolongación en el punto E; trácese la BE, y el triángulo ABE será el que se busca.

582. **Problema 7.º— Transformar un cuadrilátero cualquiera** ABCD (fig. 267, lám. 14.) **en un triángulo equivalente cuyo vértice** E **se halle situado en el lado** BC.— Tírense las rectas EA y ED, y por los puntos B y C las BF y CG respectivamente paralelas á las primeras, hasta que encuentren á la AD prolongada en los puntos F y G; y trazando las EF y EG, el triángulo FEG resolverá la cuestión.

En el caso de ser el cuadrilátero un paralelogramo, bastará prolongar la base AD (fig. 268, lám. 14) de modo que resulte DF = AD, y uniendo el punto E con los A y F, se tendrá el triángulo AEF equivalente al paralelogramo ABCD, por tener la misma altura y doble base que éste.

583. Á veces se quiere transformar un polígono en otro que tenga el mismo número de lados, pero que su forma sea distinta, caso que suele tener aplicación en muchas ocasiones.

Sea, por ejemplo, el cuadrilátero ABCD (fig. 269, lám. 14): en vez de prolongar uno de sus lados AB hasta B′ en sentido de su dirección, se trazará por el punto B una recta BE′ en la dirección que convenga, y tirando la diagonal BD y por C la paralela CE á la BD, se unirá el punto de intersección E con el D, y el cuadrilátero ABED será equivalente al propuesto ABCD.

584. **Problema 8.º—Transformar cualquier polígono** ABCDE (fig. 220, lám. 14) **en otro equivalente que tenga un lado menos.**—Tírese la diagonal AC, y por el punto B la BF paralela á AC, hasta que encuentre en el punto F á la AE prolongada; únase el punto C con el F, y el pentágono propuesto será equivalente al cuadrilátero FCDE.

585. Como por el caso anterior se puede transformar el cuadrilátero en un triángulo, resulta que cualquier polígono se puede transformar en un triángulo, reduciéndole primero á otro que tenga un lado menos, el que resulte á otro que tenga un lado menos que el anterior, y así sucesivamente, hasta convertirle en triángulo, como se ve en el pentágono ABCDE de la figura 271 (lám. 14), que se halla transformado en el triángulo equivalente FCG, habiendo servido de bases para las operaciones las diagonales CA y CE que parten de un mismo vértice C.

586. Ahora bien; como hemos dicho (579) el modo de transformar un triángulo en otro que le sea equivalente y que tenga una altura dada y uno de los ángulos de la base, resulta que se podrá reducir un polígono cualquiera á un triángulo que tenga el vértice en cualquier punto dado, dentro ó fuera del mismo polígono, y de modo que un ángulo de la base sea igual también á un ángulo dado.

587. **Problema 9.º—Transformar un triángulo en un cuadrado equivalente.**—Hállese una media proporcional (Geometría, Probl. 28) entre la base y la mitad de la altura ó entre la altura y la mitad de la base del triángulo, y se tendrá el lado del cuadrado.

En efecto, sea x el lado del cuadrado, a la altura y b la base del triángulo: tendremos

$$x^2 = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}a \times b = a \times \frac{1}{2}b;$$

de donde se deducen las proporciones

$$\frac{1}{2}a : x :: x : b \quad ó \quad a : x :: x : \frac{1}{2}b;$$

588. **Problema 10.—Transformar cualquier polígono en un cuadrado equivalente.**—Se reduce primero á triángulo, y luego este triángulo á cuadrado.

Si el polígono es un *rectángulo*, un *paralelogramo* ó cualquier figura cuya área puede obtenerse por el producto de dos rectas, la cuestión está reducida á *hallar una media proporcional entre dichas dos rectas,* para tener el lado del cuadrado equivalente que se pide.

Si el polígono es *regular,* se desarrollará el perímetro sobre una recta indefinida, y se hallará la media proporcional entre la mitad del perímetro y la apotema, ó sea el radio del círculo inscrito.

Por último, para hallar el lado de un cuadrado equivalente á un círculo, se construirá la media proporcional entre la mitad de la circunferencia rectificada y el radio; pero este resultado no es más que aproximado, pues dependiendo de la rectificación de la circunferencia, sería necesario para obtenerle con exactitud poder construir una recta con la regla y el compás, que tuviese la longitud exacta de la circunferencia; lo que hasta hoy no se ha podido conseguir.

589. **División de los polígonos.—Preliminares.**—Una de las operaciones que con frecuencia tiene necesidad de practicar el geómetra, es la división de los terrenos ó propiedades, sujetándose á las condiciones impuestas por los propietarios. Esta parte de la Topografía se llamaba antiguamente *geodesia;* pero hoy se da

este nombre á la aplicación que se hace de la Astronomía y de la Trigonometría rectilínea y esférica al levantamiento de la Carta de una gran extensión de terreno, como por ejemplo, la superficie de un estado ó país, designándose la que ahora nos ocupa con el nombre de *división de los polígonos*.

590. En la resolución de las cuestiones emplearemos dos procedimientos: el uno que llamaremos de *soluciones numéricas*, y el otro de *soluciones gráficas*. Entenderemos por soluciones numéricas aquellas en que se haga uso del cálculo, bien se opere sobre el terreno ó sobre el papel, valiéndose de los instrumentos de campo ó de gabinete para la determinación de las líneas y ángulos que han de servir de datos, y el trazado también de las líneas y ángulos que han de representar los resultados; y llamaremos *soluciones gráficas* aquellas en que sólo se haga uso de construcciones geométricas, tanto en el campo como en el gabinete, con los instrumentos adecuados á cada caso para la resolución de los problemas, sin entrar el cálculo para nada en la resolución.

Para las soluciones tanto numéricas como gráficas, cuando se opera en el terreno mismo basta la formación del croquis si no se tiene plano y no hay necesidad de levantarle; pero será preciso construir el plano con precisión y en escala conveniente cuando las soluciones tanto numéricas como gráficas deban efectuarse en el gabinete. Es de todo punto indispensable determinar bien el contorno del terreno, como base de todas las operaciones que se han de practicar después.

591. Cuando se opera en el terreno, las soluciones numéricas son más exactas que las gráficas, y podrá servir de comprobación el observar si al trasladar al papel las líneas establecidas en el terreno, y que representan los resultados, guardan en el plano las mismas relaciones de posición.

Cuando se opera en el papel, las soluciones gráficas son al contrario más exactas que las numéricas, y se obtienen aquéllas con más aproximación, construyendo de nuevo el plano si estaba en escala pequeña en otra más conveniente. En este caso las líneas obtenidas por ambos métodos en el plano se trasladan después al terreno, lo que constituye el *replanteo*.

En adelante, al resolver una cuestión numérica ó gráficamente, el procedimiento que expongamos deberá entenderse que debe seguirse tanto en el terreno como en el papel.

592. *Las soluciones numéricas* se fundan en los diversos proble-

mas de Geometría que establecen ciertas relaciones entre los datos y las incógnitas; y las *gráficas* en las diversas proposiciones de la Geometría referentes á los polígonos equivalentes, y en la transformación de las figuras que hemos explicado anteriormente, y la cual entra como auxiliar en la mayor parte de los soluciones.

Pasemos ya á la resolución de los problemas más elementales.

593. **Contornos rectilíneos de un corto número de lados.—Triángulos.—Problema 1.º—Dado un triángulo, tirar desde uno de sus vértices una recta al lado opuesto, de manera que forme un triángulo parcial de una área dada, ó lo que es lo mismo, tomar una superficie en otra dada.**

Soluciones numéricas.—1.ª Sea el triángulo ABC (fig. 272, lámina 14) en el cual se quiere tirar por el vértice B la recta BD que forme el triángulo parcial ABD que tenga una área dada. Sean S y s las áreas numéricamente conocidas ABC y ABD. Como estos dos triángulos de una misma altura BE, son entre sí como sus bases AC y AD, que llamaremos B y b, se tendrá

$$S : s :: B : b,$$

de donde

$$b = \frac{s \times B}{S}; \qquad [68]$$

Hallado el valor numérico de AD, se tomará esta distancia desde el punto A en la AC, bien en el terreno en su tamaño natural si se ha operado en él, ó bien en el papel con arreglo á escala si se opera en el gabinete, para referirla después al terreno; y trazando por último la recta BD se tendrá separada la porción ABD que se deseaba. De este procedimiento se puede hacer uso cuando no se tiene á mano más que la cadena ó cinta, piquetes y jalones.

Si la línea de división debiese partir del vértice C, entonces se podría hacer que los dos triángulos, el dado ABC y el que se busca AFC, tuviesen la misma base AC, en cuyo caso serían entre sí como sus alturas h y h', y se tendría

$$S : s :: h : h',$$

de donde

$$h' = \frac{s \times h}{S}; \qquad [69]$$

Levantando en el punto A una perpendicular $AH = h'$ á la AC y tirando por el punto H la recta HF paralela á AC, se unirá el punto de intersección F con el C y se tendrá el triángulo AFC.

594. Puesto que s es conocida y se tiene (410)

$$s = \frac{b \times h}{2},$$

se puede trazar y medir la altura h del triángulo ABC, y despejando b se tiene para valor de la base que se busca

$$b = s : \frac{h}{2} = \frac{2s}{h}; \qquad [70]$$

Tomando en la AC una cantidad $AD = b$, se tendrá resuelto el problema. En este caso no se necesita saber la superficie S del triángulo ABC.

También puede medirse la base $AC = B$, y como para el triángulo AFC se tendría

$$s = \frac{B \times h'}{2},$$

despejando h' se tendrá

$$h' = s : \frac{B}{2} = \frac{2s}{B}; \qquad [71]$$

y después se hará la construcción indicada anteriormente para hallar el punto F.

De los procedimientos explicados se hará uso cuando se pueda disponer de las escuadras.

595. Sucede á veces que en un triángulo ABC (fig. 272, lámina 14) se quiere tomar el ABD que tenga la misma superficie que otro dado *abc:* en este caso se mide la superficie del *abc*, y dividiendo el resultado por la mitad de la altura $BE = h$, se obtendrá el valor de la base $AD = b$. Si el triángulo hubiera de ser el AFC, se dividirá la misma superficie por la mitad de la base AC y se tendrá la altura $FG = h'$, construyéndose el triángulo AFC como hemos dicho anteriormente.

596. *Solución gráfica.*—En este caso debe conocerse la figura del triángulo *abc* (fig. 273, lám. 14) cuya área ha de ser la misma que la que ha de tomarse en el triángulo ABC, por una recta tirada desde el ángulo B. Para esto se transforma el triángulo *abc* en otro equivalente *adc*, de modo que el ángulo *dac* sea igual al BAC

(579), y tomando $AF = ad$ y $AE = ac$, y trazando la FE, el triángulo AFE será igual al *adc* y equivalente al *abc;* pero como la línea de división ha de partir del punto B, se trazará la BE y por F la FD paralela á BE; y tirando por último la BD, tendremos el triángulo ABD equivalente al AFE, y por lo tanto al *acb* y trazado con las condiciones que exige el problema.

597. *Ejemplo numérico.— Un padre da á su hija en dote una porción de terreno de 8 áreas de cabida, que se ha de tomar de otro terreno de forma triangular que tiene 25 áreas.*

Sea el triángulo ABC (fig. 272, lám. 14) de 25 áreas, y supongamos que se indica al Agrimensor que las 8 áreas que ha de tomar han de ser hacia el ángulo A y que la línea divisoria ha de partir del vértice B. Se medirá el lado AC opuesto á este vértice, y si resulta tener 125 metros, se formará la proporción

$$25^a : 8^a :: 125^m : x^m = \frac{8 \times 125^m}{25} = 40 \text{ metros.}$$

Tomando $AD = 40^m$ y trazando la BD, el triángulo ABD contendrá las 8 áreas y resolverá el problema.

598. **Problema 2.º—Dado un triángulo, tirar desde uno de sus vértices una recta á la prolongación del lado opuesto, de manera que forme un triángulo parcial de una área dada, ó lo que es lo mismo, añadir una superficie á otra dada.**

Solución numérica.—Sea el triángulo ABC (fig. 274, lám. 14), y supongamos que del terreno que linda con AB se ha de tomar la parte que se le ha de añadir, y que el lindero BD es prolongación del CB. Se tendrá la proporción

$$ABC : ADC :: BC : CD;$$

conocida CD, se tendrá

$$BD = CD - BC,$$

y uniendo el punto A con el D, se tendrá el triángulo ADC que resuelve el problema.

También se puede hallar desde luego la BD por la proporción

$$ABC : ABD :: BC : BD.$$

Si el otro lindero del terreno colindante con AB tuviese la dirección BE, se dividirá la superficie que hay que añadir al triángulo ABC por la mitad de la base, ó el doble de dicha superficie por la