Levantando en el punto A una perpendicular $AH = h'$ á la AC y tirando por el punto H la recta HF paralela á AC, se unirá el punto de intersección F con el C y se tendrá el triángulo AFC.

594. Puesto que s es conocida y se tiene (410)

$$s = \frac{b \times h}{2},$$

se puede trazar y medir la altura h del triángulo ABC, y despejando b se tiene para valor de la base que se busca

$$b = s : \frac{h}{2} = \frac{2s}{h}; \qquad [70]$$

Tomando en la AC una cantidad $AD = b$, se tendrá resuelto el problema. En este caso no se necesita saber la superficie S del triángulo ABC.

También puede medirse la base $AC = B$, y como para el triángulo AFC se tendría

$$s = \frac{B \times h'}{2},$$

despejando h' se tendrá

$$h' = s : \frac{B}{2} = \frac{2s}{B}; \qquad [71]$$

y después se hará la construcción indicada anteriormente para hallar el punto F.

De los procedimientos explicados se hará uso cuando se pueda disponer de las escuadras.

595. Sucede á veces que en un triángulo ABC (fig. 272, lámina 14) se quiere tomar el ABD que tenga la misma superficie que otro dado *abc:* en este caso se mide la superficie del *abc*, y dividiendo el resultado por la mitad de la altura $BE = h$, se obtendrá el valor de la base $AD = b$. Si el triángulo hubiera de ser el AFC, se dividirá la misma superficie por la mitad de la base AC y se tendrá la altura $FG = h'$, construyéndose el triángulo AFC como hemos dicho anteriormente.

596. *Solución gráfica.*—En este caso debe conocerse la figura del triángulo *abc* (fig. 273, lám. 14) cuya área ha de ser la misma que la que ha de tomarse en el triángulo ABC, por una recta tirada desde el ángulo B. Para esto se transforma el triángulo *abc* en otro equivalente *adc*, de modo que el ángulo *dac* sea igual al BAC

(579), y tomando $AF = ad$ y $AE = ac$, y trazando la FE, el triángulo AFE será igual al *adc* y equivalente al *abc;* pero como la línea de división ha de partir del punto B, se trazará la BE y por F la FD paralela á BE; y tirando por último la BD, tendremos el triángulo ABD equivalente al AFE, y por lo tanto al *acb* y trazado con las condiciones que exige el problema.

597. *Ejemplo numérico.—Un padre da á su hija en dote una porción de terreno de 8 áreas de cabida, que se ha de tomar de otro terreno de forma triangular que tiene 25 áreas.*

Sea el triángulo ABC (fig. 272, lám. 14) de 25 áreas, y supongamos que se indica al Agrimensor que las 8 áreas que ha de tomar han de ser hacia el ángulo A y que la línea divisoria ha de partir del vértice B. Se medirá el lado AC opuesto á este vértice, y si resulta tener 125 metros, se formará la proporción

$$25^{a} : 8^{a} :: 125^{m} : x^{m} = \frac{8 \times 125^{m}}{25} = 40 \text{ metros.}$$

Tomando $AD = 40^{m}$ y trazando la BD, el triángulo ABD contendrá las 8 áreas y resolverá el problema.

598. **Problema 2.º—Dado un triángulo, tirar desde uno de sus vértices una recta á la prolongación del lado opuesto, de manera que forme un triángulo parcial de una área dada, ó lo que es lo mismo, añadir una superficie á otra dada.**

Solución numérica.—Sea el triángulo ABC (fig. 274, lám. 14), y supongamos que del terreno que linda con AB se ha de tomar la parte que se le ha de añadir, y que el lindero BD es prolongación del CB. Se tendrá la proporción

$$ABC : ADC :: BC : CD;$$

conocida CD, se tendrá

$$BD = CD - BC,$$

y uniendo el punto A con el D, se tendrá el triángulo ADC que resuelve el problema.

También se puede hallar desde luego la BD por la proporción

$$ABC : ABD :: BC : BD.$$

Si el otro lindero del terreno colindante con AB tuviese la dirección BE, se dividirá la superficie que hay que añadir al triángulo ABC por la mitad de la base, ó el doble de dicha superficie por la base AB [71] (594), y se tendrá la altura, que tomándola en la perpendicular levantada á AB en un punto F que sea el que más convenga, y tirando por el extremo G de dicha altura una paralela GE á la AB, se unirán el punto de intersección E con la BE y el punto A, y el triángulo ABE será el que hay que añadir al ABC.

En este caso y en todos en general se puede prescindir del valor de la superficie del triángulo dado, para añadirle ó quitarle una cantidad también dada.

599. *Ejemplo numérico.—Un propietario posee un terreno triangular* ABC (fig. 274, lám. 14) *que contiene* 32 *áreas, debiendo contener* 40 *áreas, y reclama á su vecino colindante le restituya las* 8 *áreas que le faltan.*

Si han de tomarse sobre la AB las 8 áreas y la recta se ha de tirar desde el vértice A á la prolongación del lado opuesto ó base BC, que tiene de longitud 75 metros, se establecerá la proporción siguiente:

$$32^{a} : 40^{a} :: 75^{m} : x = \frac{40 \times 75}{32} = 93^{m},75.$$

Siendo $93^{m},75$ la longitud de la base del triángulo que contiene 40^{a}, y 75^{m} la base del triángulo que contiene 32^{a}, se restará de $93^{m},75$ la cantidad de 75^{m}, y la diferencia $18^{m},75$ será la base del triángulo que hay que añadir al ABC. Tomando en la prolongación de la BC los $18^{m},75$ y uniendo el punto A con el D, el triángulo ACD resolverá el problema.

600. **Problema 3.º—Dividir un triángulo en un cierto número de partes equivalentes por medio de rectas tiradas desde uno de los vértices al lado opuesto.**

Solución numérica.—Sea el triángulo ABC (fig. 275, lám. 14) que se quiere dividir en tres partes equivalentes. Divídase su superficie por 3, y haciendo aplicación del problema 1.º, tómese el triángulo ABD igual en superficie al tercio del ABC. Tómese á continuación el BDE ó bien el BEC, y quedará resuelto el problema. También se puede tomar primero el ABD igual al tercio del ABC y después el ABE igual á los dos tercios del ABC; y en ambos casos mídase la superficie del triángulo EBC para que sirva de verificación, pues deberá resultar igual al tercio de ABC.

Solución gráfica.—Divídase la base AC en tres partes iguales, y trazando las BD y BE, los triángulos ABD, DBE y BEC, que tienen igual base é igual altura, son equivalentes.

601. **Problema 4.º—Dividir un triángulo en un cierto número de partes proporcionales á números dados por medio de rectas tiradas desde uno de los vértices al lado opuesto.**

Soluciones numéricas.—1.ª Sea el triángulo ABC (fig. 275, lámina 14), el cual se quiere dividir en tres partes proporcionales á los números m, n y p: se tendrá la proporción

$$\text{ABD} : m :: \text{BDE} : n :: \text{BEC} : p;$$

de donde

$$\left.\begin{aligned} \text{ABC} : m + n + p &:: \text{ABD} : m \\ \text{ABC} : m + n + p &:: \text{BDE} : n \\ \text{ABC} : m + n + p &:: \text{BEC} : p \end{aligned}\right\}; \quad [72]$$

y despejando en estas proporciones los terceros términos, tendremos:

$$\text{ABD} = \text{ABC} \times \frac{m}{m+n+p};$$

$$\text{BDE} = \text{ABC} \times \frac{n}{m+n+p};$$

$$\text{BEC} = \text{ABC} \times \frac{p}{m+n+p};$$

conocidas las tres porciones, se hará la división del triángulo ABC haciendo aplicación del problema 1.º

2.ª Divídase el valor numérico de la base AC en tres partes que sean proporcionales á los números dados, y se tendrá

$$\text{AD} : m :: \text{DE} : n :: \text{EC} : p;$$

de donde

$$\left.\begin{aligned} \text{AC} : m + n + p &:: \text{AD} : m \\ \text{AC} : m + n + p &:: \text{DE} : n \\ \text{AC} : m + n + p &:: \text{EC} : p \end{aligned}\right\}; \quad [73]$$

Conocidas las distancias AD, DE y EC, se tomarán en la AC, y trazando las BD y BE, los tres triángulos que resultan, de la misma altura, serán proporcionales á sus bases (Geom., Teor. 94.—3.º)

La *solución gráfica* en este caso es impracticable, á no darse la relación en líneas, para emplear la resolución del problema 25 de la Geometría; lo que no sucede nunca en las aplicaciones prácticas de este problema á las particiones de terrenos entre varios herederos.

602. **Problema 5.°—Dividir un triángulo en un cierto número de partes desiguales cualesquiera, por medio de rectas tiradas desde uno de los vértices al lado opuesto.**

Soluciones numéricas.—1.ª Esta solución consiste en dividir la superficie dada de cada una de las tres porciones por la mitad de la altura común, para obtener las respectivas bases AD, DE y EC (fig. 275, lám. 14), en que ha de quedar dividida la total AC.

2.ª En este caso de asignarse desde luego la parte que ha de recibir cada uno de los herederos, y no se conoce ó no se quiere determinar la altura del triángulo, se establecerán las proporciones, fundándose en la propiedad de que los triángulos de una misma altura son proporcionales á sus bases, como en el siguiente

Ejemplo numérico.—Un padre deja una tierra á sus tres hijos que contiene 25ª,75 *con la condición de que se den al mayor* 10ª,25; *al mediano* 8ª,25, *y al menor* 7ª,25. *La tierra tiene la forma triangular* ABC (fig. 275, lám. 14), *y todas las partes han de concurrir al punto* B *en que se halla un pozo ó casa.*

Mídase la base AC, y suponiendo resulten $125^m,40$, tendremos las proporciones

$$25{,}75 : 125{,}40 :: 10{,}25 : x = \frac{125{,}40 \times 10{,}25}{25{,}75} = 49{,}91$$

$$25{,}75 : 125{,}40 :: 8{,}25 : x = \frac{125{,}40 \times 8{,}25}{25{,}75} = 40{,}18$$

$$25{,}75 : 125{,}40 :: 7{,}25 : x = \frac{125{,}40 \times 7{,}25}{25{,}75} = 35{,}31$$

Total igual á la longitud de la base AC. 125,40

Se tomarán sobre CA las medidas $49^m,91$, $40^m,18$ y $35^m,31$ y se trazarán desde el punto B las rectas BE y BD á los puntos de división, y se tendrán los tres triángulos que resuelven la cuestión propuesta.

603. Para obtener la *solución gráfica*, sería preciso que se nos diese de antemano la línea AC dividida en las tres partes AD, DE y EC.

604. No nos ocuparemos en lo sucesivo de la división en partes

desiguales que no tengan entre sí una relación sencilla; pues en todos los casos se deduce del procedimiento de la división en partes iguales, con la diferencia que en ésta basta conocer el valor de la superficie total y el número de las partes, con lo cual se puede obtener el de una, dividiendo dicho valor total por el número de las partes, mientras que en la división en partes desiguales es preciso conocer de antemano el valor de cada una de ellas.

605. **Problema 6.°—Dividir un triángulo en tres partes equivalentes por rectas que partan de dos de sus vértices.**

Solución gráfica.—Divídase la AC (fig. 276, lám. 14), en tres partes iguales, tírese la BD, y por su punto medio E la AE, y quedará resuelto el problema. Si se hubiera de dividir el triángulo en cinpartes se dividirá la base AC (fig. 277, lám. 14), en este número de partes y la figura indica el resto de la construcción; lo mismo se ejecutará cuando el número de partes sea mayor.

606. **Problema 7.°—Dividir un triángulo en tres porciones equivalentes, por rectas que partan de sus tres vértices y se unan en un mismo punto interior.**

Solución numérica.—Hállese la superficie del triángulo ABC (fig. 278, lám. 14), y tómese el tercio. Divídase el resultado por la mitad de la base AC, y se tendrá la altura h de una de las porciones. Levantando la perpendicular $Aa{=}h$ y trazando la aO paralela á AC, el vértice del triángulo que tiene por base á AC, estará en dicha paralela. Divídase después otra vez el tercio de la superficie del triángulo ABC por la mitad del lado BC y se tendrá la altura h'; levantando la perpendicular $Bb{=}h'$ á la BC y trazando la paralela bO á esta línea, el punto O de su intersección con la aO será el que unido con los vértices A, B y C resolverá el problema, como es fácil comprender.

Solución gráfica.—Divídase uno de los lados AC (fig. 279, lámina 14), en tres partes iguales, y trácense BD y BE: se tendrán los tres triángulos equivalentes ABD, DBE y EBC, y por consiguiente iguales cada uno al tercio del ABC. Trácense las paralelas DF y EG á las AB y BC; y desde el punto O donde se cortan trácense las tres rectas AO, BO y CO, y el triángulo ABO equivalente al ABD será un tercio del ABC (600), el triángulo BOC equivalente al BEC será otro tercio de ABC, por lo que el triángulo restante AOC deberá ser también el tercio de ABC.

607. **Observaciones acerca de la división en partes**

proporcionales ó desiguales.—Si en la solución numérica las partes hubieran de ser entre sí como los números m, n y p, se empezaría por hallar los valores de dichas tres partes y después se haría la construcción del mismo modo.

En general, en las soluciones numéricas, la división de una superficie S en n partes de igual área ó equivalentes, exige primero la determinación del valor $\frac{S}{n}$ de cada una de las partes, y después los cálculos consiguientes para obtener los de las líneas necesarias para verificar la construcción.

La división en partes desiguales supone el conocimiento previo de los valores de estas partes, verificándose después la construcción del mismo modo.

La división en partes que sean entre sí como números dados $m, n, p....$ no difiere de esta última sino en que es necesario determinar cada una de estas partes, y de la anterior en la manera de verificar esta determinación; siendo igual el resto de las operaciones que en la división en partes equivalentes y desiguales.

Ahora bien; teniendo presente que una superficie S queda dividida en partes $a, b, c....$ que sean entre sí como los números dados $m, n, p....$ estableciendo la serie de razones

$$a : m :: b : n :: c : p :: ....$$

en las cuales tenemos

$$a+b+c+....=S : m+n+p+.... :: a : m :: b : n :: c : p :: ....$$

de donde resulta

$$\left.\begin{aligned} a &= S \times \frac{m}{m+n+p+....} \\ b &= S \times \frac{n}{m+n+p+....} \\ c &= S \times \frac{p}{m+n+p+....} \end{aligned}\right\} ; \qquad [74]$$

no volveremos á ocuparnos en adelante de las divisiones en partes proporcionales.

Por razones análogas será inútil hablar de la división en partes desiguales, por lo que en lo sucesivo sólo nos referiremos á la división en partes iguales en superficie ó equivalentes.

La misma marcha seguiremos en la soluciones gráficas, pues las construcciones son las mismas, salvo á dividir gráficamente en partes iguales, desiguales ó proporcionales, aquellas líneas cuyos valores hayan de dividirse de estos distintos modos en las soluciones numéricas para obtener las partes equivalentes, desiguales ó proporcionales.

608. **Problema 8.º—Dividir un triángulo en dos partes equivalentes por líneas tiradas desde un punto interior dado.**

Solución numérica.—Sea el triángulo ABC (fig. 280, lám. 14) y O el punto dado: trácense OB y OC, y mídanse los triángulos ABC y BOC, y si éste no es la mitad del anterior, y suponemos que sea menor que dicha mitad, se hallará la diferencia, la que dividida por la mitad de la perpendicular OD, que se trazará y medirá, se tendrá el valor de la base EC de un triángulo EOC que representará dicha diferencia, con lo que tendremos que el cuadrilatero EOBC, compuesto de los dos triángulos BOC y EOC, será la mitad del triángulo ABC; y por consiguiente la otra mitad estará representada por el otro cuadrilátero ABOE, que podrá medirse para comprobar la resolución del problema.

Solución gráfica.—Sea O el punto dado (fig. 281, lám. 14), trácese la BO, y únase el punto medio D del lado AC con los B y O: los triángulos ABD y BDC son cada uno la mitad del ABC; y si por el punto B se traza la BE paralela á OD y se tira por último la OE, el cuadrilátero ABOE, compuesto de los triángulos ABE y BOE será equivalente al triángulo ABD compuesto de los ABE y BED; y por lo tanto valdrá la mitad del ABC, siendo la otra mitad el cuadrilátero BOEC.

609. **Problema 9.º—Dividir un triángulo en tres porciones equivalentes, por líneas que partan de un punto interior dado.**

Solución numérica.—Supongamos que una de las líneas de división vaya á parar á un vértice, tal como OA (fig. 282, lám. 14). Mídase la superficie del triángulo ABC y tómese el tercio; mídase la perpendicular Oa y hállese la base AD, y tirando la OD se tendrá una de las partes AOD. Imagínese la perpendicular Ob y mídase el triángulo AOC, y si no es igual al tercio de ABC, habrá que añadirle ó quitarle una cierta cantidad tal como m. Sea $AOC < \frac{1}{3} ACB$; mídase la perpendicular Oc y hállese la base CE del triángulo

OEC$=m$, y el cuadrilátero AOEC representará la segunda parte. Hállese la superficie del cuadrilátero EODB para ver si equivale también al tercio de ABC, lo que servirá al mismo tiempo para comprobar la operación.

Si una de las líneas de división ha de ser perpendicular á uno de los lados, tal como la OD (fig. 283, lám. 14), se imaginará la AO, y midiendo el triángulo AOD, si suponemos que le falta una cierta cantidad m para ser igual al tercio de ABC, se medirá la altura Oa y se hallará la base AE del triángulo AEO$=m$, y el cuadrilátero ADOE será una de las partes. Hágase lo mismo para hallar la segunda parte DOFC, y compruébese la operación midiendo el cuadrilatero EOFB.

Si una de las líneas de división ha de ser oblicua á uno de los lados, tal como la OD (fig. 284, lám. 14), el procedimiento no difiere del que acabamos de indicar.

Soluciones numérica y gráfica combinadas.—Supuesto que son análogas las soluciones numéricas en los tres casos que acabamos de considerar en este problema, y que también lo serían combinadas con las gráficas, vamos á resolver por este método el caso correspondiente á la figura 284 (lám. 14).

Para esto, trácese y mídase la perpendicular Oc (fig. 285, lámina 14) y hállese la longitud de la base que ha de tener un triángulo igual al tercio del ABC; tómese esta longitud de D á E, y trazando la OE se tendrá dicho triángulo, que será el DOE. Tomando DG = DE y trazando la OG, se tendrá el triángulo DOG equivalente al DOE é igual por lo tanto al tercio del ABC. Como estos triángulos tienen cada uno una parte fuera del ABC, se trazarán las OC y OA y las paralelas á estas EF y GH, y uniendo los puntos F y H con el O, tendremos los cuadriláteros DOFC y DOHA equivalentes á los triángulos DOE y DOG, como es fácil comprender, y por consiguiente iguales cada uno al tercio de ABC. Para comprobación se medirá el otro cuadrilátero BFOH para ver si equivale también al tercio del ABC.

610. **Problema 10.—Dividir un triángulo en tres partes equivalentes, por líneas tiradas desde un punto dado en uno de sus lados.**

Soluciones numéricas.—1.ª Sea el triángulo ABC (fig. 286, lámina 14) y D el punto dado. Se medirá la superficie de dicho triángulo y se tomará el tercio, cuya cantidad dividida por la mitad de la perpendicular Da, dará la base AE del triángulo ADE igual á

una de las partes. Procédase del mismo modo para hallar la CF, y se tendrá la segunda parte DCF, y para comprobación se podrá examinar si el cuadrilátero EDFB que ha de representar la tercera parte equivale al tercio del triángulo ABC.

2.ª Después de calcular la superficie del triángulo ABC y de tomar su tercio, tírese la BD y hállese la del triángulo ABD y se tendrá la proporción

$$\text{ABD} : \frac{1}{3}\text{ABC} :: \text{AB} : \text{AE}.$$

Conocida por ella la longitud de la AE, se tendrá el punto E que unido con el D nos dará el triángulo ADE $= \frac{1}{3}$ ABC, y que será por lo tanto una de las partes. Del mismo modo se hallaría la parte DFC y la restante será el cuadrilátero EDFB.

Solución gráfica.—Divídase la base AC (fig. 287, lám. 14) en tres partes iguales, y tírense las BG y BH. Trácese la BD y paralelamente á ésta las GE y HF y se tendrán los puntos E y F, que unidos con el D nos darán los triángulos AED y FDC, equivalentes á los ABG y BHC, cada uno de los cuales representará la tercera parte del triángulo ABC, y el cuadrilátero EDFB la tercera parte restante.

611. **Problema 11.—Dividir un triángulo en cinco partes equivalentes, por rectas tiradas desde un punto dado en uno de sus lados.**

Soluciones numéricas.—1.ª Sea el triángulo ABC (fig. 288, lámina 14) y D el punto dado: después de haber hallado la superficie del triángulo ABC, tomado su quinta parte y medido la perpendicular Dz para determinar la base EC de dicha quinta parte, que será la DEC, llévese esta base las veces que se pueda sobre la EA y sean dos hasta G, siendo AG<EC; los triángulos DFE y DGF serán también quintas partes de ABC. Trácese ahora la DA y véase cuál es la superficie del triángulo ADG, y restándola de la quinta parte de ABC se obtendrá un resto que será la cantidad, que habrá que añadir el triángulo ADG. Para hallar esta cantidad, bájese la perpendicular Db á la AB y divídase dicho resto por la mitad del valor de la perpendicular, y se tendrá la base AH del triángulo AHD que habrá que añadir al ADG, para que el cuadrilátero AHDG represente otro quinto del ABC. Para comprobación puede medirse el triángulo BDH que queda y que deberá ser otro quinto del ABC.