OEC = m, y el cuadrilátero AOEC representará la segunda parte. Hállese la superficie del cuadrilátero EODB para ver si equivale también al tercio de ABC, lo que servirá al mismo tiempo para comprobar la operación.

Si una de las líneas de división ha de ser perpendicular á uno de los lados, tal como la OD (fig. 283, lám. 14), se imaginará la AO, y midiendo el triángulo AOD, si suponemos que le falta una cierta cantidad m para ser igual al tercio de ABC, se medirá la altura Oa y se hallará la base AE del triángulo AEO = m, y el cuadrilátero ADOE será una de las partes. Hágase lo mismo para hallar la segunda parte DOFC, y compruébese la operación midiendo el cuadrilatero EOFB.

Si una de las líneas de división ha de ser oblicua á uno de los lados, tal como la OD (fig. 284, lám. 14), el procedimiento no difiere del que acabamos de indicar.

Soluciones numérica y gráfica combinadas.—Supuesto que son análogas las soluciones numéricas en los tres casos que acabamos de considerar en este problema, y que también lo serían combinadas con las gráficas, vamos á resolver por este método el caso correspondiente á la figura 284 (lám. 14).

Para esto, trácese y mídase la perpendicular Oc (fig. 285, lámina 14) y hállese la longitud de la base que ha de tener un triángulo igual al tercio del ABC; tómese esta longitud de D á E, y trazando la OE se tendrá dicho triángulo, que será el DOE. Tomando DG = DE y trazando la OG, se tendrá el triángulo DOG equivalente al DOE é igual por lo tanto al tercio del ABC. Como estos triángulos tienen cada uno una parte fuera del ABC, se trazarán las OC y OA y las paralelas á estas EF y GH, y uniendo los puntos F y H con el O, tendremos los cuadriláteros DOFC y DOHA equivalentes á los triángulos DOE y DOG, como es fácil comprender, y por consiguiente iguales cada uno al tercio de ABC. Para comprobación se medirá el otro cuadrilátero BFOH para ver si equivale también al tercio del ABC.

610. **Problema 10.—Dividir un triángulo en tres partes equivalentes, por líneas tiradas desde un punto dado en uno de sus lados.**

Soluciones numéricas.—1.ª Sea el triángulo ABC (fig. 286, lámina 14) y D el punto dado. Se medirá la superficie de dicho triángulo y se tomará el tercio, cuya cantidad dividida por la mitad de la perpendicular Da, dará la base AE del triángulo ADE igual á una de las partes. Procédase del mismo modo para hallar la CF, y se tendrá la segunda parte DCF, y para comprobación se podrá examinar si el cuadrilátero EDFB que ha de representar la tercera parte equivale al tercio del triángulo ABC.

2.ª Después de calcular la superficie del triángulo ABC y de tomar su tercio, tírese la BD y hállese la del triángulo ABD y se tendrá la proporción

$$\text{ABD} : \frac{1}{3}\,\text{ABC} :: \text{AB} : \text{AE}.$$

Conocida por ella la longitud de la AE, se tendrá el punto E que unido con el D nos dará el triángulo ADE $= \frac{1}{3}$ ABC, y que será por lo tanto una de las partes. Del mismo modo se hallaría la parte DFC y la restante será el cuadrilátero EDFB.

Solución gráfica.—Divídase la base AC (fig. 287, lám. 14) en tres partes iguales, y tírense las BG y BH. Trácese la BD y paralelamente á ésta las GE y HF y se tendrán los puntos E y F, que unidos con el D nos darán los triángulos AED y FDC, equivalentes á los ABG y BHC, cada uno de los cuales representará la tercera parte del triángulo ABC, y el cuadrilátero EDFB la tercera parte restante.

611. **Problema 11.—Dividir un triángulo en cinco partes equivalentes, por rectas tiradas desde un punto dado en uno de sus lados.**

Soluciones numéricas.—1.ª Sea el triángulo ABC (fig. 288, lámina 14) y D el punto dado: después de haber hallado la superficie del triángulo ABC, tomado su quinta parte y medido la perpendicular Dz para determinar la base EC de dicha quinta parte, que será la DEC, llévese esta base las veces que se pueda sobre la EA y sean dos hasta G, siendo AG<EC; los triángulos DFE y DGF serán también quintas partes de ABC. Trácese ahora la DA y véase cuál es la superficie del triángulo ADG, y restándola de la quinta parte de ABC se obtendrá un resto que será la cantidad, que habrá que añadir el triángulo ADG. Para hallar esta cantidad, bájese la perpendicular Db á la AB y divídase dicho resto por la mitad del valor de la perpendicular, y se tendrá la base AH del triángulo AHD que habrá que añadir al ADG, para que el cuadrilátero AHDG represente otro quinto del ABC. Para comprobación puede medirse el triángulo BDH que queda y que deberá ser otro quinto del ABC.

También se puede derteminar el BDH después de haber hallado los triángulos DEC, DFE y DGF, y la parte restante se hallará representada por el cuadrilátero AHDG.

2.ª Cuando no se puede operar en el interior, hállese la superficie del triángulo ABC, valiéndose de los tres lados, y tomada su quinta parte, tendremos la siguiente proporción (Geom., Teor. 99).

$$ABC : \frac{1}{5} ABC : : BC \times AC : DC \times x;$$

de donde

$$x = \frac{BC \times AC}{5 \times CD}; \quad [75]$$

Una vez hallada la longitud de x=CE, se tendrá el punto E, y el triángulo DCE será igual á $\frac{1}{5}$ ABC. Tómense FE y FG iguales á EC y tendremos ya en el contorno los puntos de división E, F y G. Procédase después para hallar la BH como hemos hecho para CE y tendremos el último punto de división H, por el cual y uniendo los G, F y E con el punto D, tendremos dividido el triángulo ABC en los DEC, DFE, DGF y BDH, y en el cuadrilátero AHDG como en la solución anterior. Esta última es también aplicable al caso en que el punto dado se halle en uno de los vértices.

Soluciones gráficas.—1.ª Tírese la DA (fig. 289, lám. 14) y por B la BY paralela á ella, y trazando la DY tendremos convertido el triángulo ABC en otro equivalente DYC que tendrá su vértice en el punto dado D (579). Divídase la base CY en cinco partes iguales, y uniendo el punto D con los de división se tendrán los tres triángulos DEC, DFE y DGF dentro del triángulo ABC é iguales á un quinto de éste. El cuarto triángulo DGH tiene fuera del ABC la parte HA*a*; por lo que tirando la H*b* paralela á DA y trazando la D*b*, el cuadrilátero AGD*b* será también el quinto de ABC, por lo que el triángulo BD*b* representará también un quinto del ABC.

Esta solución es aplicable también al caso en que el punto D se halle en el interior, transformando el triángulo dado en otro que tenga su vértice en este punto (579).

2.ª Si se quieren evitar las transformaciones del triángulo total dado en otros equivalentes, se procederá del modo siguiente: divídase la base AC (fig. 290, lám. 14) en cinco partes iguales, de las que sólo señalaremos la primera CD, y trazada la BD, el triángu-

lo BDC, será el quinto del ABC; trácese la OD y por B la BE paralela á OD, y uniendo el punto O con el E, el triángulo OEC es el quinto del ABC, pues hemos transformado el triángulo BDC en otro equivalente que tiene el vértice en O (579). Tómese la base EC y llévese tres veces de E á H, y trazando las OF y OG, los triángulos OFE y OFG serán quintas partes del ABC. El otro triángulo OGH se reemplazará por el cuadrilátero OGA*a*, y la última quinta parte se hallará representada por BO*a*.

612.—**Polígonos en general, convexos y cóncavos.—Contornos rectilíneos de un corto número de lados.—Problema 12.—Dividir un cuadrilátero convexo en tres partes equivalentes por líneas que partan de uno de sus vértices.**

Solución numérica.—Sea el cuadrilátero ABCD (fig. 291, lám. 14) y C el vértice dado. Mídase la superficie del cuadrilátero y tómese el tercio, cuya cantidad dividida por la mitad de la perpendicular CE, nos dará la base FD, y trazando la CF, el triángulo FCD será el tercio de ABCD. Hágase una operación análoga para trazar la CG, y el triángulo BCG será otro tercio de ABCD; el último tercio estará representado por el cuadrilátero AFCG, que midiéndole podrá servir para verificar el problema.

Soluciones gráficas.—1.ª Trácense las diagonales BD y AC (fig. 292, lám. 14): divídase la opuesta al ángulo C en tres partes iguales BE, EF y FD y trácense las rectas CE y CF, AE y AF, y tendremos

$$BCE = ECF = CFD, \qquad y \qquad ABE = EAF = AFD;$$

de donde se deduce

$$BCD + ABE = ECF + EAF = CFD + AFD;$$

ó lo que es lo mismo

$$ABCE = AECF = AFCD.$$

Tirando ahora por los puntos E y F las EG y FH paralelas á la AC y trazando las CG y CH, el cuadrilátero AGCH reemplazará al AECF, y los triángulos BGC y CHD á los cuadriláteros respectivos ABCE y AFCD, como es fácil ver en la figura, con lo que el problema quedará resuelto.

2.ª Transfórmese el cuadrilátero ABCD (fig. 293, lám. 14) en el triángulo equivalente ECD (581) y divídase la base ED en tres partes iguales en los puntos G y F, y trazando las CF y CG, el triángulo CFD será la primera parte, el cuadrilátero AHCF que reemplaza al triángulo CGF será la segunda, y el triángulo BCH representará la otra tercera parte.

613. **Problema 13.—Dividir un cuadrilátero cóncavo en cuatro partes equivalentes, por rectas que partan de uno de sus vértices.**

Solución numérica.—Sea el cuadrilátero cóncavo ABCD (figura 294, lám. 15): la sola inspección de la figura manifiesta que la serie de operaciones para la resolución del problema, es la misma que en el caso de ser convexo el polígono.

Solución gráfica.—Después de transformado el cuadrilátero en el triángulo equivalente EDC (fig. 295, lám. 15) y dividida la base ED en cuatro partes iguales, se concluirá el problema como el anterior.

614. Los procedimientos numérico y gráfico que acabamos de exponer para el cuadrilátero, se hacen extensivos de un modo análogo á los polígonos que pasan de cuatro lados, y basta para ello observar la figura 296 (lám. 15), que es un pentágono convexo dividido en tres partes equivalentes por rectas tiradas desde uno de sus vértices. La solución numérica da á entender que después de haber tirado las diagonales AC y CE y hallado las superficies de los triángulos ABC y CDE, ha sido preciso valerse de la altura C*a* para hallar las bases AF y EG de los triángulos ACF y CEG que hay que añadir á los AHC y CIE para que los cuadriláteros ABCH y CIED sean las terceras partes del polígono ABCDE, siendo el triángulo HCI la otra tercera parte. El procedimiento gráfico consiste en reducir el polígono á triángulo equivalente CFG (585) y dividirle en tres partes equivalentes (600).

615. **Problema 14.—Dividir un polígono cualquiera cóncavo ó convexo, en un cierto número de partes equivalentes, por rectas que partan de un punto situado en el interior ó en uno de sus lados.**

Soluciones numérica y gráfica combinadas.—Supongamos ahora que el punto O (fig. 297, lám. 15) que ha de ser común á todas las partes equivalentes se halle situado en el interior del pentágono cóncavo que se ha de dividir, por ejemplo, en cuatro partes equivalentes.

Hállese la superficie del pentágono ABCDE y tómese el cuarto, con el fin de que bajando la perpendicular O*a*, que podrá considerarse como el lindero común á dos de las partes en que ha de dividirse el polígono, pueda hallarse el valor de la base *a*F, que suponemos sea mayor que A*a*, para obtener un triángulo *a*OF, que represente el cuarto de la superficie del pentágono; tirando la OA y por F la FH paralela á ella, se trazará la OH y el cuadrilátero *a*AHO será una de las partes que se buscan; tómese *a*G = F*a*, y repitiendo á la derecha de O*a* la misma construcción que se ha hecho á la izquierda, el cuadrilátero *a*EIO será la otra de las dos partes que han de tener el lindero común O*a*, lo que se comprende fácilmente; y la cuestión se resolvería del mismo modo, si se hubiese puesto por condición que el linde común hubiera sido una oblicua al lado AE ó bien una recta OE que fuese á terminar á un vértice E.

Para hallar la tercera porción se considerará el punto O como el vértice de un triángulo, del cual OH es uno de sus lados, y hallando la base HL y transformando el triángulo OHL en el cuadrilátero OHBM, éste representará la tercera de las partes que buscamos, siendo la cuarta y última el pentágono OMCDI, el cual puede en este caso medirse ó no, puesto que usamos de las dos soluciones combinadas.

Si el punto común O (fig. 298, lám. 15) debiera hallarse situado en uno de los lados del pentágono convexo ABCDE, y se quisiese dividir éste en tres partes equivalentes, se comprende con facilidad que siguiendo una marcha idéntica á la acabada de exponer, haciendo uso de las dos soluciones simultáneamente, se hallará primero el cuadrilátero AHOE que representará la primera de las tres partes en que se trata de dividir ahora el pentágono. Tomando después FG = GE, trazando la FO, y tirando FL paralela también á la OA que ha servido para la primera parte, prolongando el lado AB cuando es preciso como en el caso actual, se tendrá

$$FAO - GAO = LAO - AOH \text{ ó } FGO = HLO,$$

y el triángulo OHL será la segunda de las tres partes que se buscan, y por lo tanto se transformará en el cuadrilátero OHBM, que representará dicha segunda parte, estándolo la tercera y última por el cuadrilátero ODCM, el que podrá ó no medirse según convenga, para la verificación del problema.

616. **División en zonas paralelas.**—En la división de los polígonos hemos considerado hasta ahora la circunstancia de la elección de un punto, ya situado en un vértice, en el interior de

la figura ó en uno de los lados del contorno, haciendo que dicho punto sea común á las diversas partes de terreno que resultan de la división entre varios partícipes, por la razón de que este punto pueda ser un objeto notable, como un pozo, aljibe, fuente, molino, torre....; pero otras veces no mediando esta circunstancia, la mejor figura del terreno para el cultivo, la construcción de edificios ú otra razón cualquiera de las muchas que pueden ocurrir, puede dar lugar á la división en zonas paralelas con arreglo á una dirección dada ó arbitraria, y vamos á ocuparnos de la resolución de esta clase de problemas.

617. **Problema 15.—Dado un triángulo, tirar una recta paralela á uno de sus lados, de manera que forme con los otros dos un triángulo parcial que tenga una área dada.**

Soluciones numéricas.—1.ª Sea el triángulo ABC (fig. 299, lámina 15): se trata de hallar un punto D situado en uno de los lados, por el cual tirando una recta DE paralela al lado AC, cumpla con la condición que exige el problema. Para esto, como el nuevo triángulo que ha de resultar, y que supongamos sea el BDE, ha de ser semejante al ABC (Geom., Teor. 58), tendremos (Geom., Teorema 100)

$$ABC : BDE :: AB^2 : BD^2,$$

ó en general, haciendo $ABC = S$; $BDE = s$; $AB = L$ y $BD = l$,

$$S : s :: L^2 : l^2;$$

de donde

$$l = \sqrt{\frac{s \times L^2}{S}} = L\sqrt{\frac{s}{S}}; \qquad [76]$$

Tomando á partir de B una distancia $BD = l$, y tirando la paralela DE á la AC quedará resuelto al problema.

Si se quiere evitar el trazado de la paralela, se operaría del mismo modo sobre BC para tener el punto E, que unido con el D nos determinará la recta DE; ó bien; puesto que BD es ya conocida, se tendrá BE por la proporción

$$BA : BD :: BC : BE.$$

La longitud de la paralela DE se obtiene por la proporción

$$BA : BD :: AC : DE.$$

2.ª Cuando no se pueda operar en el contorno y sí en el interior, se trazará la perpendicular BP, y se tratará de hallar en ella un punto G, por el cual tirando la paralela DE á la AC, esta paralela cumpla con la condición que exige el problema. Para esto tenemos (Geom., Teor. 100)

$$ABC : BDE :: BP^2 : BG^2,$$

ó haciendo $BP = A$ y $BG = a$,

$$S : s :: A^2 : a^2;$$

de donde

$$a = \sqrt{\frac{s \times A^2}{S}} = A\sqrt{\frac{s}{S}}; \qquad [77]$$

Se tomará $BG = a$, y se tendrá el punto G para trazar la paralela DE. La longitudd de esta paralela se obtiene por la proporción

$$BP : AC :: BG : DE.$$

3.ª Si s fuese una parte alícuota de S, es decir en general, si s fuese $\frac{1}{n}$ de S, tendríamos entonces estas dos proporciones:

$$S : s :: n : 1;$$
$$S : s :: L^2 : l^2;$$

de donde (Arit., 169)

$$n : 1 :: L^2 : l^2;$$

y como

$$l^2 = \frac{L^2}{n} = \frac{L}{n} \times L,$$

se tendrá también

$$L : l :: l : \frac{L}{n}; \qquad [78]$$

Lo que nos dice que se obtendrá la longitud $BD = l$, hallando una media proporcional geométrica entre L y $\frac{L}{n}$. Por lo tanto si s debiera ser $\frac{1}{3}$ de S, se hallaría la media proporcional geométrica entre la longitud de L y su tercera parte $\frac{L}{3}$. Este último procedimiento es, como se observa, independiente del conocimiento de las superficies, bastando saber la relación que se quiere que exista entre ellas.

Solución gráfica.—La solución geométrica exige la condición de que s sea una parte alícuota de S; y el procedimiento está reducido á hallar gráficamente la media proporcional entre L y $\frac{L}{n}$ (Geom., Probl. 28). La demostración sería la misma que en la tercera solución numérica, sólo que en las proporciones entrarían las líneas, en vez de los valores numéricos. Cuando se puede operar en el exterior, se hace la construcción sobre la misma figura. Sea el triángulo ABC = S (fig. 300, lám. 15), y supongamos que la parte s que se quiere separar sea el tercio de S. Divídase AB en tres partes iguales en los puntos D y E; y para hallar la media proporcional entre AB y BE $= \frac{AB}{3}$, se describe sobre AB como diámetro una semicircunferencia, se levanta en el punto E la perpendicular Ea y se traza la Ba, y ésta será la media proporcional, la cual se llevará sobre la BA, haciendo centro en B y describiendo un arco de círculo con el radio Ba, hasta encontrar á AB en el punto F, por el cual se trazará la paralela FG á la AC y el problema quedará resuelto, siendo el triángulo FBG el tercio del ABC. En esta solución gráfica, como en la tercera numérica, sólo será preciso conocer la relación de las superficies ABC y BGF.

Cuando la parte que se ha de tomar en el triángulo ABC (figura 299, lám. 15), está representada por otro triángulo abc, se hallarán dos medias proporcionales, una x entre la base AC y la altura BP del triángulo ABC y otra z entre la base ac y la altura bp del abc; y como la parte que ha de tomarse en el triángulo ABC y que ha de resultar semejante al triángulo abc, ha de ser un triángulo tal como el BDE semejante al ABC, resulta que x y z serán dos de sus líneas homólogas; por lo que hallando una cuarta proporcional á x, z y AB se obtendrá el valor de BD, y la paralela DE resolverá la cuestión.

Según se hallen aritmética ó geométricamente las medias y cuartas proporcionales, así la solución será numérica ó gráfica.

618. **Problema 16.—Dividir un triángulo en partes equivalentes.**—El problema que acabamos de resolver, suministra el medio de dividir un triángulo cualquiera en varias partes equivalentes, desiguales ó proporcionales, advirtiendo que las so-

luciones serán numéricas ó gráficas según se proceda aritmética ó geométricamente en la determinación de los valores.

Para dividir un triángulo ABC (fig. 300, lám. 15), en n partes equivalentes, se dividirá BA = L en n partes iguales BE, ED..... y llamando l, l', l''..... á las medias proporcionales Ba, Bb..... se tendrán las proporciones siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} L : l :: l : \frac{1}{n} L; \\ L : l' :: l' : \frac{2}{n} L; \\ L : l'' :: l'' : \frac{3}{n} L; \\ \dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \quad [79]$$

tomando los valores de l, l', l''..... á partir de B en el lado BA, que supongamos sean BF, BL..... y trazando las paralelas FG, LM..... se tendrá resuelto el problema.

Para dividir el mismo triángulo ABC en partes desiguales, como estas han de ser conocidas, llamándolas s, s', s''..... y S al triángulo ABC, tendremos las proporciones

$$S : s :: L^2 : l^2$$
$$S : s' :: L^2 : l'^2.$$

Hallando los valores de l, l'..... y tomando las partes BF, BL..... que los representen, y trazando las paralelas FG, LM..... quedará resuelto el problema.

Por último, para dividir el mismo triángulo en partes proporcionales, después de hallado el valor de cada una, según sabemos, valiéndonos de la serie de razones iguales

$$s : m :: s' : n :: s'' : p :: \dots\dots$$

se continuará como en el caso anterior de partes desiguales.

En el caso de dividir el triángulo en dos partes proporcionales á los números m y n, tendremos

$$s : m :: s' : n;$$