to de las superficies, bastando saber la relación que se quiere que exista entre ellas.

Solución gráfica.—La solución geométrica exige la condición de que s sea una parte alicuota de S; y el procedimiento está reducido á hallar gráficamente la media proporcional entre L y $\frac{L}{n}$ (Geom., Probl. 28). La demostración sería la misma que en la tercera solución numérica, sólo que en las proporciones entrarían las líneas, en vez de los valores numéricos. Cuando se puede operar en el exterior, se hace la construcción sobre la misma figura. Sea el triángulo ABC = S (fig. 300, lám. 15), y supongamos que la parte s que se quiere separar sea el tercio de S. Divídase AB en tres partes iguales en los puntos D y E; y para hallar la media proporcional entre AB y BE $= \frac{AB}{3}$, se describe sobre AB como diámetro una semicircunferencia, se levanta en el punto E la perpendicular Ea y se traza la Ba, y ésta será la media proporcional, la cual se llevará sobre la BA, haciendo centro en B y describiendo un arco de círculo con el radio Ba, hasta encontrar á AB en el punto F, por el cual se trazará la paralela FG á la AC y el problema quedará resuelto, siendo el triángulo FBG el tercio del ABC. En esta solución gráfica, como en la tercera numérica, sólo será preciso conocer la relación de las superficies ABC y BGF.

Cuando la parte que se ha de tomar en el triángulo ABC (figura 299, lám. 15), está representada por otro triángulo abc, se hallarán dos medias proporcionales, una x entre la base AC y la altura BP del triángulo ABC y otra z entre la base ac y la altura bp del abc; y como la parte que ha de tomarse en el triángulo ABC y que ha de resultar semejante al triángulo abc, ha de ser un triángulo tal como el BDE semejante al ABC, resulta que x y z serán dos de sus líneas homólogas; por lo que hallando una cuarta proporcional á x, z y AB se obtendrá el valor de BD, y la paralela DE resolverá la cuestión.

Según se hallen aritmética ó geométricamente las medias y cuartas proporcionales, así la solución será numérica ó gráfica.

618. **Problema 16.—Dividir un triángulo en partes equivalentes.**—El problema que acabamos de resolver, suministra el medio de dividir un triángulo cualquiera en varias partes equivalentes, desiguales ó proporcionales, advirtiendo que las soluciones serán numéricas ó gráficas según se proceda aritmética ó geométricamente en la determinación de los valores.

Para dividir un triángulo ABC (fig. 300, lám. 15), en n partes equivalentes, se dividirá BA = L en n partes iguales BE, ED..... y llamando l, l', l''..... á las medias proporcionales Ba, Bb..... se tendrán las proporciones siguientes:

$$\left.\begin{aligned} L : l &:: l : \frac{1}{n} L; \\ L : l' &:: l' : \frac{2}{n} L; \\ L : l'' &:: l'' : \frac{3}{n} L; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad [79]$$

tomando los valores de l, l', l''..... á partir de B en el lado BA, que supongamos sean BF, BL..... y trazando las paralelas FG, LM..... se tendrá resuelto el problema.

Para dividir el mismo triángulo ABC en partes desiguales, como estas han de ser conocidas, llamándolas s, s', s''..... y S al triángulo ABC, tendremos las proporciones

$$S : s :: L^2 : l^2$$
$$S : s' :: L^2 : l'^2.$$

Hallando los valores de l, l'..... y tomando las partes BF, BL..... que los representen, y trazando las paralelas FG, LM..... quedará resuelto el problema.

Por último, para dividir el mismo triángulo en partes proporcionales, después de hallado el valor de cada una, según sabemos, valiéndonos de la serie de razones iguales

$$s : m :: s' : n :: s'' : p :: \ldots\ldots$$

se continuará como en el caso anterior de partes desiguales.

En el caso de dividir el triángulo en dos partes proporcionales á los números m y n, tendremos

$$s : m :: s' : n;$$

de donde

$$s+s'=S:m+n::s:m,$$

y

$$s=S\times\frac{m}{m+n},$$

ó lo que es lo mismo:

$$\frac{s}{S}=\frac{m}{m+n}.$$

Sustituyendo el valor de $\frac{s}{S}$ en la fórmula [76] (617) resultará:

$$l=L\sqrt{\frac{m}{m+n}}; \qquad [80]$$

y un caso particular de esta cuestión será el expuesto anteriormente de dividir un triángulo en partes equivalentes. En efecto, supongamos que el triángulo ABC se quiere dividir en tres partes equivalentes; se tendría para la primera:

$$\frac{s}{S}=\frac{m}{m+n}=\frac{1}{3}, \text{ y } l=BF=L\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{L}{3}\sqrt{3}.$$

Para la segunda, se tendría $\frac{s}{S}=\frac{m}{m+n}=\frac{2}{3}$, y

$$l'=BL=L\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{L}{3}\sqrt{2}\sqrt{3}.$$

Para comprobación debe ser también ACML el tercio de ABC.

Para el caso de dividirle en cuatro partes equivalentes se tendrían los siguientes valores:

$$l=\frac{L}{2}; \qquad l'=\frac{L}{2}\sqrt{2}; \qquad l''=\frac{L}{2}\sqrt{3}.$$

Esta solución numérica es por lo tanto la misma que se obtiene por la fórmula [76] (617), haciendo sucesivamente $\frac{s}{S}=\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{4}$ y por las proporciones [79] haciendo $n=4$.

619. **Problema 17.—Dado un trapecio, tirar una recta paralela á las bases tal, que el trapecio parcial que forme con la base menor ó mayor y los lados del trapecio, tenga una área dada.**

Solución numérica.—Sea AECD (fig. 301, lám. 15) el trapecio á cuya superficie llamaremos S; EC su base mayor $=B$; AD su base menor $=b$, y AF su altura $=a$; sea $GP=x$ la recta que buscamos, la cual ha de ser una superficie s adyacente á la base menor b, ó una superficie s' adyacente á la base mayor B.

Para hallar la expresión de x cuando se quiere separar del trapecio AECD una parte $AGPD=s$ adyacente á la base menor b, tendremos primero:

$$s=\frac{x+b}{2}\times AH; \qquad [81]$$

Como la altura AH es una incógnita, se determinará su valor trazando la AL paralela á DC, y los triángulos semejantes AGR y AEL nos darán la proporción:

$$EL:GR::AF:AH;$$

ó lo que es lo mismo:

$$B-b:x-b::a:AH=\frac{a(x-b)}{B-b}.$$

Sustituyendo el valor de AH en la ecuación [81] y efectuando operaciones, tendremos:

$$s=\frac{a(x^2-b^2)}{2(B-b)}; \qquad [82]$$

Despejando x en esta ecuación, resulta:

$$x=\sqrt{b^2+\frac{B-b}{a}\times 2s}; \qquad [83]$$

con lo que se tiene el valor de la línea divisoria GP, que hemos llamado x, en función de las bases y altura del trapecio total dado y de la parte conocida s que se quiere separar adyacente á la base menor b.

Para hallar ahora la expresión de esta misma línea $x=GP$, cuando se quiere separar del trapecio AECD una parte $EGPC=s'$ adyacente á la base mayor B, tendremos primero:

$$s' = \frac{B + x}{2} \times FH; \qquad [84]$$

Como la FH es una incógnita, se determinará su valor observando que se tiene

$$FH = AF - AH = a - \frac{a(x - b)}{B - b} = \frac{a(B - x)}{B - b}.$$

Sustituyendo este valor de FH en la ecuación [84] y efectuando operaciones, tendremos:

$$s' = \frac{a(B^2 - x^2)}{2(B - b)}; \qquad [85]$$

y despejando x en esta ecuación, se obtiene:

$$x = \sqrt{B^2 - \frac{B - b}{a} \times 2s'}; \qquad [86]$$

con lo que se tiene también el valor de la línea divisoria $GP = x$ en función de las bases y la altura del trapecio total dado y de la parte conocida s' que se quiere separar, adyacente á la base mayor B.

620. Una vez conocido el valor de x, se tomará en la base mayor CE (fig. 301, lám. 15) una parte $CM = x$; por el punto M se trazará la MG paralela á la CD, y tirando por último por el punto G la GP paralela á EC, se tendrá la línea divisoria que se buscaba.

Si se quiere evitar el trazado de la paralela GM, se puede determinar la AG, á que llamaremos y, observando que los triángulos semejantes AGR y AEL dan la proporción:

$$EL : GR :: AE : AG;$$

ó lo que es lo mismo, llamando ahora l al lado AE,

$$B - b : x - b :: l : y;$$

de donde

$$y(B - b) = (x - b)\, l;$$

eliminando x entre esta ecuación y la [83], y despejando y resulta

$$y = l \times \frac{-b + \sqrt{b^2 + \frac{B - b}{a} \times 2s}}{B - b} \qquad [87]$$

Tomando en el lado AE una longitud $AG = y$, se trazará la paralela GP á la EC.

Puesto que se tiene trazada y conocida la altura AF para la determinación de la superficie del trapecio AECD, se podrá buscar en ella el punto H para tirar por él la paralela GP á la EC.

Para esto, como ya se conoce el valor de dicha paralela GP, las superficies de los trapecios AGPD y GECP serán:

$$AGPD = \frac{AD + GP}{2} \times AH;$$

$$GECP = \frac{GP + EC}{2} \times HF;$$

de donde despejando las alturas AH y HF, tendremos

$$AH = \frac{2AGPD}{AD + GP} \quad [88] \quad y \quad HF = \frac{2GECP}{GP + EC}; \quad [89]$$

y tomando en la AF las magnitudes AH ó HF, según que el trapecio parcial que se tome sea adyacente á la base menor ó á la mayor, se tendrá conocido el punto H.

Como se hallaría también fácilmente $AF = \frac{2AECD}{AD + EC}$, tendremos como comprobación iguales los valores numéricos de AF y AH + HF, así como los de

$$\frac{2AECD}{AD + EC} \quad y \quad \frac{2AGPD}{AD + GP} + \frac{2GECP}{GP + EC}.$$

Ejemplo numérico.—Supongamos que el trapecio AECD tiene de superficie 11160 metros cuadrados, que su altura AF es de 72 metros, su base mayor es $EC = 230$ metros, y la menor $AD = 80$ metros, y que se quiere separar una superficie de 2520 metros cuadrados, adyacente á la base menor AD, representada por el trapecio AGPD. La fórmula [83] (619) nos da:

$$GP = \sqrt{80^2 + \frac{230 - 80}{72} \times 2 \times 2520} = 130 \text{ metros.}$$

Restando de 11160 metros cuadrados los 2520 metros cuadrados, se tendrán 8640 metros cuadrados para el valor de la parte adyacente á la base mayor EC, representada por el trapecio GECP.

Si se hubiera querido separar desde luego esta parte, hubiéramos hallado para GP el mismo valor de 130 metros, valiéndonos de la fórmula [86], (619) pues sustituyendo en ella por las letras sus valores, resulta

$$GP = \sqrt{230^2 - \frac{230 - 80}{72} \times 2 \times 8640} = 130^m.$$

Para hallar las alturas AH y HF, las fórmulas [88] y [89] dan

$$AH = \frac{2 \times 2520}{80 + 130} = 24^m; \qquad HF = \frac{2 \times 8640}{130 + 230} = 48^m.$$

Como comprobación tenemos

$$AF = AH + HF = 24 + 48 = 72 \text{ metros.}$$

621. **División del trapecio en partes proporcionales.** —Si se quiere dividir el trapecio AECD en dos partes que se hallen en la razón de m á n, por medio de una paralela á las bases, tendremos

$$\frac{s}{s'} = \frac{m}{n} \quad \text{ó} \quad \frac{s}{S} = \frac{m}{m+n};$$

ó sustituyendo en vez de S su valor en función de a, B y b, y despejando $2s$, resulta

$$2s = \frac{am\,(B + b)}{m + n};$$

y poniendo por $2s$ su valor en la ecuación [83] (619), tendremos, después de verificadas todas las transformaciones,

$$x = \sqrt{\frac{mB^2 + nb^2}{m + n}} \qquad [90]$$

Después de haber enseñado á tomar en un trapecio una superficie dada y á dividirle en dos partes proporcionales á dos números dados por medio de una paralela á las bases, se comprenderá fácilmente, en atención á la marcha seguida para el triángulo en este caso del paralelismo, la manera de dividir el trapecio en varias partes iguales, desiguales ó proporcionales á números dados, por lo que no nos detendremos en la resolución de estos problemas. Pasaremos por lo tanto á la división de un polígono cualquiera en partes equivalentes por medio de rectas paralelas entre sí, no deteniéndonos más que en este caso, por las mismas consideraciones que acabamos de exponer.

622. **Problema 18.—Dividir en general un polígono cualquiera en un cierto número de partes equivalentes, por medio de rectas paralelas entre sí.**

Solución numérica.—Sea el polígono ABCDE (fig. 302, lám. 15) que se quiere dividir, por ejemplo, en tres partes equivalentes. Hállese su superficie, y dividiéndola por 3 se tendrá el valor de una de las partes. Para determinar estas partes en la figura, trácese por el vértice A una recta cualquiera AH y por los demás vértices C y E las CF y EG paralelas á la AH, con lo que el polígono quedará dividido en triángulos y trapecios. Para hallar la primera parte, mídase el triángulo ABH, y si su área es mayor que el tercio del polígono, se trazará una recta mn paralela á AH que separe en el triángulo ABH una parte Bmn igual á dicho tercio (617): si el triángulo ABH fuese menor que este tercio, añádasele el trapecio AHrp, que se obtendrá trazando una paralela pr á la AH que separe en el trapecio AHCF una parte AHpr adyacente á la base menor AH [83] (619), igual á lo que faltaba al triángulo ABH para ser el tercio del polígono, y se tendrá representada por el cuadrilátero ABrp la primera parte de las tres en que se quiere dividir el pentágono ABCDE.

Para hallar la segunda, se medirá el trapecio prCF, y si no fuese igual al tercio del polígono, menor por ejemplo, se trazará una paralela st que separe en el trapecio FEGC una parte FCts adyacente á la base mayor FC [86] (619), igual á lo que le faltaba al trapecio prCF para valer el tercio del polígono, y el pentágono prCts representará la segunda de las tres partes que buscamos.

Para comprobación se medirá el cuadrilátero stDE compuesto del trapecio stGE y del triángulo EGD, que es la figura que queda para representar la última tercera parte del polígono propuesto y que deberá ser igual á dicho tercio.

Si se pusiese por condición que las paralelas que han de dividir el polígono en zonas tuviesen una dirección determinada, es decir, fuesen paralelas á una recta dada, en vez de tirar de un modo arbitrario la primera recta AH, se trazará paralela á la recta dada y lo mismo las demás.

623. **Contornos rectilíneos de un gran número de lados.**—Cuando los polígonos tienen muchos lados, pero éstos son

de bastante longitud, pueden abreviarse las operaciones de la división, procediendo de la manera que vamos á exponer; para lo cual consideramos el caso más sencillo de la división en dos partes, resumiendo todos los casos análogos á los expuestos hasta aquí en el problema general siguiente, en el cual hacemos uso solamente de las soluciones numéricas.

624. **Problema 19.—Dividir un polígono en dos partes equivalentes, desiguales ó proporcionales á dos números dados m y n, por medio de una recta tirada desde uno de sus vértices, ó por un punto situado en uno de sus lados, ó bien por medio de una recta paralela á uno de sus lados.**

Sea primero dividir el polígono ABC...H (fig. 303, lám. 15) en dos partes equivalentes por una recta tirada desde el vértice H. Divídase en triángulos a, b, c... desde este vértice, hállese la superficie de cada uno y súmense para tener la del polígono. Entonces si $a + b + c$, por ejemplo, es la suma inmediatamente inferior á la mitad que se trata de separar, se hallará la diferencia, y se tomará en el triángulo siguiente HCD una parte r igual á esta diferencia por medio de una recta HM á partir del vértice H (593), y esta línea HM resolverá el problema. Para comprobación se verá si es también $e + d + s$ igual á la mitad del polígono.

Cuando la línea divisoria ha de partir de un punto Z situado en un lado AH, el procedimiento no varía esencialmente.

625. Si el polígono se ha de dividir en dos partes iguales en superficie por medio de una recta paralela al lado AI (fig. 304, lámina 15), se trazará por el punto B, por ejemplo, una paralela BM á la AI, y se hallará la superficie de la parte del polígono ABMHI, descomponiéndola, por ejemplo, en triángulos, y la de la parte BCDEFGM descomponiéndola también en triángulos, ó en triángulos y trapecios como se ve en la figura, para sumar sus áreas y tener la total del polígono, la que se dividirá por 2. Hecho esto, si la parte ABMHI no equivale á la mitad del polígono y es, por ejemplo, menor, se trazará por G la GR paralela á la BM, y se tomará en el trapecio BMGR la parte BmnM, adyacente á la base mayor BM [**86**] (619), y la recta mn paralela á la BM será la que dividirá al polígono en dos partes equivalentes.

De un modo análogo se procederá en la división en dos partes desiguales, cuyos valores numéricos deben darse de antemano, así como en la división en dos partes que se hallen en la relación

de m á n, las que también hay que determinar primero según hemos ya visto en los demás casos de esta especie.

626. **Contornos curvilíneos y mixtilíneos.**—Cuando los contornos están formados de muchos lados y es pequeña además la magnitud de éstos, ó bien cuando son curvilíneos ó mixtilíneos, en cuyos casos pueden considerarse como polígonos irregulares de infinito número de lados, podemos hacer uso de la circunscripción ó inscripción de un polígono de menor número de lados para determinar la supercie total de la figura en cuestión. Una vez hallada ésta, así como el valor de las partes iguales, desiguales ó proporcionales en que haya de dividirse, y señalado el punto por donde haya de trazarse la línea divisoria, bien que sea un vértice ó se halle situado en el contorno ó en el interior, ó bien que dicha recta se haya de trazar paralelamente á una dirección dada ó á arbitrio, en todos los casos no habrá más que seguir exactamente la marcha trazada hasta aquí en la serie de operaciones expuestas, cuidando de aprovechar siempre las circunstancias favorables que puedan conducir, en los diferentes casos que se presentan en la práctica, á soluciones más prontas y más sencillas.

627. De igual manera se procede para resolver el problema importante siempre de añadir ó quitar á una tierra una parte, para tomarla de otra colindante ó cederla á ésta, valiéndonos de los problemas anteriores, en particular de los 1.º (593) y 17 (619), pues en el caso de la figura 305 (lám. 15), en que el contorno $abcd$ es bastante irregular, después de haberle circunscrito un polígono ABCDE y de haber trazado una recta mn que á ojo parezca que dará la parte $obcp$ que se quiera separar de la tierra M, se hallará la verdadera superficie de esta parte, hallando la del polígono mnDCB y restando de ella la superficie comprendida entre el contorno rectilíneo del polígono y el curvilíneo de la tierra M. Si el resultado no es igual á la parte que se ha de quitar de dicha tierra, se hallará la diferencia, la que se añadirá ó quitará de la $obcp$, por medio de triángulos como el ors, ó por paralelas como et considerando á la figura $opte$ como paralelogramo ó rectángulo según la forma y dirección de las líneas oe y pt en cuyo caso, tomando la op como base, se hallará la altura xz, ó bien, previo el trazado de una paralela auxiliar fg, hallar la supercie del trapecio $opqf$, y por el problema 17 (619) determinar la recta et que forme con la base op el trapecio parcial $opte$ que exprese la diferencia que se ha de quitar ó añadir según los casos, haciendo las construcciones por la