PRÓLOGO.

El método es no sólo una necesidad, sino el más seguro apoyo de las ciencias, y en especial de las exactas.

Buscar un fin partiendo de un principio conocido, encerrarse en los límites de verdades ciertas y especular con éstas siguiendo un riguroso raciocinio hasta deducir el fin buscado; hé aquí el procedimiento de la ciencia matemática.

Pero si en los cimientos de ella, como son la aritmética, la álgebra y la geometría, es preciso apelar al método riguroso, con mayor razón hay que recurrir á él cuando la ciencia que se estudia es por su carácter más elevada y más abstracta.

Allá no debe perderse de vista ni un momento el famoso postulado de Pascal sobre el raciocinio metódico geométrico; aquí, sin duda, necesita el espíritu que investiga llegar más al fondo de las entidades abstractas, adquirir cualidades netamente analizadoras para alcanzar hasta la esencia y sorprender todos los matices de la hipótesis, todas las modificaciones de la conclusión, todas las variantes de la ley.

Siempre el mismo problema y á un tiempo el propio ideal: reducir á formas simples lo que se reviste de apariencias complicadas, traer á casos fáciles la solución de carácter difícil de interpretar, en una palabra, emprender el estudio de la cuestión difícil por medios metódicos hasta traerla al análisis de una relación más sencilla.

En Aritmética el estudio detallado de los datos y de la solución pedida, obliga al pensador á desechar en el cuerpo las propiedades físicas y químicas, mecánicas, etc., no lo considera sino como una relación *numérica* de partes, puesto que fuera de ella las otras propiedades no entran en su programa, y de esta suerte acaba por llegar á una función sencillísima de suma, resta, etc., que resuelve el problema.

En Álgebra la relación considerada pasa á ser *abstracta*, ya no se refiere la ciencia á los *valores* sino á las *relaciones*, como dice A. Comte, y aun aplicando el análisis minucioso, se alejan de la cuestión los elementos extraños, se procede á una generalización ampliamente marcada, y brota el lenguaje algebraico, traduciendo por símbolos las variadas condiciones de la cuestión.

No cambia de modo de sér, y así vemos que apela á la eliminación para pasar de *dos* ó más ecuaciones, con igual número de incógnitas, á la resolución de una ecuación con una incógnita, resuelve los problemas indeterminados por sustituciones y soluciones de problemas determinados, transforma los problemas de ecuaciones de segundo grado en la formación de una ecuación de primer grado con una incógnita, valiéndose de un artificio, etc.

En Geometría vemos valuar las relaciones de ángulos ó de arcos por las de cuerdas que son *líneas rectas*, en condiciones en que la comparación pueda hacerse, es decir, tratándose de magnitudes correspondientes á un mismo círculo ó á círculos iguales. Vemos también cómo las relaciones de superficies ó de volúmenes las reduce á relaciones de líneas, cómo las figuras poligonales las descompone en triángulos, para hacer así con más sencillez su estudio, etc.

En Cálculo Infinitesimal se apela á ciertas magnitudes auxiliares para analizar la estructura y propiedades de las funciones con más sencillez y más provecho, como en Geometría se buscaron relaciones auxiliares para valuar relaciones superficiales ó de volumen, como se hizo de necesidad contar con las magnitudes auxiliares llamadas *logaritmos* y las llamadas líneas *trigonométricas.* ¿Cómo, pues, opera el Álgebra llamada Superior? ¿qué objeto tiene? ¿está ó no comprendida en alguno de los ramos mencionados?

En rigor no hay división marcada; el Álgebra Superior continúa sin interrupción motivada al Álgebra Elemental, como el Cálculo continúa sin solución de continuidad á la Álgebra toda y completa, es una cadena seguida y no falta ni un eslabón.

¿Por qué se ha hecho de costumbre distinguir entre Álgebra Elemental y Álgebra Superior? pocas palabras bastaran.

Resuelve el Álgebra Elemental los problemas de segundo grado por medio de la solución de uno de primero; mas al pretender ir más allá, carece de medios suficientes y generales, no cuenta con procedimientos que resuelvan la cuestión, y se detiene.

Hé aquí entonces un problema, cuya tremenda significación sólo se comprenderá al leer estas nociones; pero cuya magnitud perfilaremos siquiera.

El problema es este: así como para las ecuaciones de primero y segundo grado, ¿puede darse un método general para resolver las ecuaciones numéricas ó algebraicas de todos los grados?

En cuanto á las numéricas sí, abundan teoremas, reglas y métodos; Descartes, Sturm, Rolle, Budan, Fourier, Newton, Lagrange, Euler, Bezout, etc., se han ocupado tanto de este punto, que la resolución de las ecuaciones numéricas, difícil por naturaleza, es sin embargo posible, y los procedimientos que esta obra indica lo demuestran.

Pero en cuanto á las ecuaciones algebraicas, la cuestión cambia; Tartaglia, Cardan y Lagrange dieron fórmulas para las ecuaciones de tercer grado, así como Hudde, Girard y Vieta también se ocuparon del problema; Ferrari, Descartes, Lagrange, Euler, Bret, dedicaron sus esfuerzos á la resolución de las de cuarto grado, y también obtuvieron fórmulas generales así como el geómetra ruso Tschirnaüs; la aplicación de la fórmula de Moivre hizo aún esclarecer algunas dificultades que surgieron sobre ciertas formas finales de las raíces que en la ecuación de tercer grado presentaba el caso que se llamó *irreductible;* pero ya al tratar de resolver la ecuación algebraica de quinto grado, encallaron los artificios, y á pesar que el ingenio concebía sorprendentes procedimientos, nada se consiguió.

Hubo entonces algunos que pretendieron probar la imposibilidad de resolver las ecuaciones algebraicas superiores al cuarto grado, Ruffini (1765–1822) fué el primer sabio que trató de dar la demostración.

Estaba reservada al insigne Abel (1802–1829), muerto prematuramente á los 27 años, la gloria de demostrar el importantísimo postulado; Wantzel simplificó la demostración (1845) y Serret en el 2º tomo de su "Álgebra Superior" (1866), así como Comberousse en el 4º tomo de su "Curso de Matemáticas" (1890) reasumen y simplifican estas demostraciones capitales.

Aun se dió un paso más, y la cuestión afrontada y esbozada por Lagrange, seguida y madurada por Abel, tomó en las manos de E. Galois (1811–1832) un carácter decisivo, y en su inmortal "Memoria sobre las condiciones de resolubilidad de las ecuaciones por radicales," la teoría de las ecuaciones viene á perderse, á confundirse con la teoría de las sustituciones, y el problema de la resolución por radicales, único objeto de las antiguas especulaciones, es sólo un capítulo del estudio profundo de las irracionales.

En cuanto á otros métodos y teorías que han ido naciendo prohijados por los trabajos incansables de los analistas, ya facilitando ya aclarando, ya revistiendo de formas diversas á las cuestiones, sólo mencionaremos como maravillosamente notables, entre otras: la teoría de las Funciones Simétricas, de la que en especial se han ocupado: Newton, Cauchy, etc.; la de los Determinantes (y anexos Discriminantes, Invariantes, Covariantes, etc.) tan prolijamente estudiada por Cramer, Cauchy, Leibnitz, Sylvester, Sarrus, Lagrange, Binet, E. Rouché, Hessien, Gauss, Aronhold, Clebsch, Méray, Mansion, etc.; la de la representación geométrica de las cantidades imaginarias, dilucidada, entre otros, por Hamilton, Argand, Mourey, Hoüel, Tait, Cauchy, etc., y otras muchas teorías que acaban por constituir completamente el Álgebra entera.

Ahora bien, el actual adelanto de la ciencia matemática hace imposible separar el Álgebra del Cálculo, porque las cuestiones de que ambos ramos se ocupan se entremezclan y se unen. Hay un gran número de cuestiones en Álgebra Superior propiamente dicha, que hacen intervenir polinomios llamados *derivados*, etc., que requieren para su completa inteligencia el previo conocimiento de teoremas que son del resorte del Cálculo. En la resolución numérica de las ecuaciones es cosa corriente apelar á *derivadas* que sólo en el Cálculo tienen explicación precisa. Finalmente, no pudiendo entrar en detalles que la lectura de la obra proporciona, bástenos decir que en nuestra obra hemos procurado satisfacer los actuales programas profesionales de Matemáticas Superiores amalgamando lo que obligan en materia de Álgebra Superior y de Nociones de Cálculo. A la vez que dar cumplimiento á esos programas, satisfacemos el espíritu actual de enseñanza, que hace inseparables ambos ramos.

El ejemplo de los maestros: Serret, Laurent, Comberouse y Nievenglowski, etc., nos ha alentado justificando nuestras ideas. Como haríamos difuso este Prólogo, exponiendo consideraciones generales sobre el Cálculo, que serían extemporáneas, advertiremos que en la Nota IV de las que van al fin, hacemos una exposición minuciosa (hasta donde el carácter elemental de la obra nos ha permitido) de los sistemas de Cálculo; damos á conocer las objeciones más serias que se arguyen en contra y las ventajas que presenta cada sistema.

Aunque el Índice expresa con bastante claridad el orden de materias á grandes rasgos podemos decir lo siguiente. La obra la hemos dividido en 3 partes: la Primera Parte se ocupa de los conocimientos preliminares para entender y basar la Segunda, que es la Álgebra Superior propiamente dicha. Dicha Primera Parte hasta el Capítulo VI comprende lo que bien pudiera llamarse Álgebra Intermedia que no se estudia en los cursos preparatorios y que no forma parte propiamente de la Teoría de las Ecuaciones. El Capítulo VII se ocupa de las funciones Derivadas y Primitivas, es decir, incluye lo que de Cálculo Diferencial é Integral obligan los programas profesionales. El Capítulo VIII se ocupa de la Teoría Elemental de las Cantidades Imaginarias, su representación geométrica, su interpretación, etc.; este Capítulo se refiere, de consiguiente, á un asunto modernísimo que ha despojado de su carácter ilusorio y quimérico á la cantidad imaginaria, haciéndola aparecer como la cantidad más general posible de la que es un caso particular la cantidad real que está incluída en ella. Al fin del Capítulo hemos creído necesario ocuparnos de las Funciones Hiperbólicas. El Capítulo IX se ocupa de la Teoría Elemental de los Determinantes que presenta grandes aplicaciones y debía hacerse obligatoria.

La Segunda Parte está consagrada por entero á la Álgebra Superior propiamente dicha y comprende la Teoría General de las Ecuaciones. Gradualmente de las ideas preliminares pasamos á los teoremas, métodos, etc., para la resolución numérica de las ecuaciones, marcamos la diferencia entre esta resolución y la algebraica y citamos el teorema de Abel que demuestra que las ecuaciones algebraicas superiores al cuarto grado son irresolubles.

La Tercera Parte comprende las Adiciones Suplementarias: el Cálculo de las Diferencias, la Interpolación, las Ecuaciones Trascendentes, las Fracciones Racionales y las Series Recurrentes.

Siguen cuatro Notas, la 1ª referente al difícil teorema de D'Alembert fundamental para la Teoría de las Ecuaciones; la 2ª que es una observación referente á la aplicación del Método de las Raíces Iguales y la 3ª comprende el Método de Lalanne para resolver gráficamente las ecuaciones numéricas, y la 4º incluye la exposición de los Sistemas de Cálculo que consideran los matemáticos. Después de las Notas hemos convenido en agregar cuatro Tablas que pueden ahorrar trabajo al resolver una ecuación numérica: algebraica ó trascendente.

Esta enumeración á grandes rasgos se comprenderá más ampliamente revisando el Índice final. El lector que nos honre hojeando nuestra obra juzgará por sí mismo las ventajas ó inconvenientes del método de exposición á que nos hemos sujetado.

Nuestro objeto al escribir esta obra sólo ha sido recopilar con cierto método lo que otros han hecho, y cuyos trabajos, esparcidos en esta y aquella obra, requerirían para su estudio mucho tiempo, inagotable dedicación y ruda tarea. Nuestra obra, en algunos lugares, está casi textualmente tomada de aquí y de ahí; lo único que hemos procurado es llevar cierto método, como dijimos, y sin un exceso de materia inútil, tratar los puntos capitales é indispensables.

Actualmente no existe en México un libro escrito sobre Álgebra Superior, fuera de los apuntes brevísimos (1) del señor Ingeniero D. Manuel Gargollo y Parra. Hace dos años próximamente, tuvimos el gusto de leer un fascículo

(1) «*Elementos de Álgebra Superior*» Lecciones dadas en la Escuela N. de Bellas Artes en el año de 1886 por el Profesor Manuel Gargollo y Parra. Son únicamente 28 páginas, lo que es insuficiente.

del curso de "Álgebra Superior" escrito por el eminente matemático D. Eduardo Prado para uso de los alumnos de la Escuela Militar, pero ignoramos por qué causa se interrumpió la publicación. Respecto á Cálculo debemos citar el "Análisis Trascendente" del señor Ingeniero Francisco Diaz Covarrubias y el "Cálculo Diferencial é Integral" del Sr. Ingeniero Manuel Gargollo y Parra, obras fundadas en dos diversos sistemas concebidos por sus autores y que honran á México altamente.

En el curso de la obra hay párrafos impresos con caracteres chicos ó afectados de un asterisco; aunque siempre constituyendo cuerpo de doctrina, generalmente se exceptúan en el estudio preliminar; así pues, los impresos con caracteres más grandes y que no llevan asterisco son los de aprendizaje indispensable.

En fin, ya para terminar este Prólogo, necesitamos pagar una deuda de gratitud haciendo públicas las siguientes explicaciones.

Desconfiando de nuestros cortos alcances, dimos á leer nuestra obra á varias personas, entre las que mencionaremos á los distinguidos matemáticos: Eduardo Prado, profesor de Física en el Colegio Militar y de Mecánica en la Escuela Nacional Preparatoria; Manuel Ramírez, Mariano Villamil y Felipe B. Noriega, profesores de Matemáticas superiores respectivamente en el Colegio Militar, la Escuela Nacional de Ingenieros y la Escuela Nacional de Bellas Artes. Públicamente agradecemos á las anteriores personas, cuya opinión nos fué favorable, el empeño con que leyeron nuestra obra, las anotaciones y apuntes con que la completaron ó la esclarecieron, y en fin, los consejos repetidos con que trataron siempre de alentarnos.

Manuel Torres Torija.

PRIMERA PARTE.

NOCIONES PRELIMINARES.

CAPÍTULO I.

MÁXIMO COMÚN DIVISOR.

1. Se llama *máximo común divisor* de varias cantidades algebraicas, el producto de sus factores primos comunes, tomados con los exponentes menores que en esas cantidades tengan.

Recordaremos, como vía de introducción, algunos teoremas ya demostrados en el Álgebra Elemental, para la mejor inteligencia de este Capítulo.

2. Teorema I. 1º Un número que divide á dos ó más, divide á su suma. 2º Si divide á otro, divide á sus múltiplos. 3º Si divide al divisor y al resto, divide al dividendo. 4º Si divide al dividendo y al divisor, divide á la resta. 5º Si divide á dos números propuestos, divide á su diferencia.

Teorema II. Si un número divide á otro, será el M. C. D. [1] entre los dos.

Teorema III. Todo número que no es primo, es producto de números primos.

Teorema IV. Todo número que divide á dos, divide á su M. C. D., y como un número que divide al dividendo y al divisor divide al resto, el M. C. D. ó es el número menor ó alguno de los restos sucesivos.

Teorema V. Si un número es divisible por dos primos, lo es por su producto.

Teorema VI. Un número es divisor de otro, si los factores simples del primero entran en el segundo y los exponentes que tienen en el primero no son mayores que los que tienen en el segundo.

Teorema VII. Toda cantidad prima P que divide un producto $A \times B$ de dos cantidades enteras, debe dividir á una de ellas.

La demostración de este teorema es debida á Mr. Lefébure de Fourcy, examinador de admisión en la Escuela Politécnica.

[1] M. C. D. simboliza máximo común divisor.