del curso de "Álgebra Superior" escrito por el eminente matemático D. Eduardo Prado para uso de los alumnos de la Escuela Militar, pero ignoramos por qué causa se interrumpió la publicación. Respecto á Cálculo debemos citar el "Análisis Trascendente" del señor Ingeniero Francisco Diaz Covarrubias y el "Cálculo Diferencial é Integral" del Sr. Ingeniero Manuel Gargollo y Parra, obras fundadas en dos diversos sistemas concebidos por sus autores y que honran á México altamente.

En el curso de la obra hay párrafos impresos con caracteres chicos ó afectados de un asterisco; aunque siempre constituyendo cuerpo de doctrina, generalmente se exceptúan en el estudio preliminar; así pues, los impresos con caracteres más grandes y que no llevan asterisco son los de aprendizaje indispensable.

En fin, ya para terminar este Prólogo, necesitamos pagar una deuda de gratitud haciendo públicas las siguientes explicaciones.

Desconfiando de nuestros cortos alcances, dimos á leer nuestra obra á varias personas, entre las que mencionaremos á los distinguidos matemáticos: Eduardo Prado, profesor de Física en el Colegio Militar y de Mecánica en la Escuela Nacional Preparatoria; Manuel Ramírez, Mariano Villamil y Felipe B. Noriega, profesores de Matemáticas superiores respectivamente en el Colegio Militar, la Escuela Nacional de Ingenieros y la Escuela Nacional de Bellas Artes. Públicamente agradecemos á las anteriores personas, cuya opinión nos fué favorable, el empeño con que leyeron nuestra obra, las anotaciones y apuntes con que la completaron ó la esclarecieron, y en fin, los consejos repetidos con que trataron siempre de alentarnos.

Manuel Torres Torija.

PRIMERA PARTE.

NOCIONES PRELIMINARES.

CAPÍTULO I.

MÁXIMO COMÚN DIVISOR.

1. Se llama *máximo común divisor* de varias cantidades algebraicas, el producto de sus factores primos comunes, tomados con los exponentes menores que en esas cantidades tengan.

Recordaremos, como vía de introducción, algunos teoremas ya demostrados en el Álgebra Elemental, para la mejor inteligencia de este Capítulo.

2. Teorema I. 1º Un número que divide á dos ó más, divide á su suma. 2º Si divide á otro, divide á sus múltiplos. 3º Si divide al divisor y al resto, divide al dividendo. 4º Si divide al dividendo y al divisor, divide á la resta. 5º Si divide á dos números propuestos, divide á su diferencia.

Teorema II. Si un número divide á otro, será el M. C. D. (1) entre los dos.

Teorema III. Todo número que no es primo, es producto de números primos.

Teorema IV. Todo número que divide á dos, divide á su M. C. D., y como un número que divide al dividendo y al divisor divide al resto, el M. C. D. ó es el número menor ó alguno de los restos sucesivos.

Teorema V. Si un número es divisible por dos primos, lo es por su producto.

Teorema VI. Un número es divisor de otro, si los factores simples del primero entran en el segundo y los exponentes que tienen en el primero no son mayores que los que tienen en el segundo.

Teorema VII. Toda cantidad prima P que divide un producto $A \times B$ de dos cantidades enteras, debe dividir á una de ellas.

La demostración de este teorema es debida á Mr. Lefébure de Fourcy, examinador de admisión en la Escuela Politécnica.

(1) M. C. D. simboliza máximo común divisor.

Se presentan cuatro casos:

Primero. Una de las cantidades A *y* B *es función de* x, *la otra es numérica y lo mismo* P.

Si A es función de x, tendrá la forma:

$$A = ax^n + bx^{n-1} + \dots\dots\dots \quad (1)$$

en la que $a.b.\dots.$ son números enteros cualesquiera, positivos ó negativos, y n, $n-1\dots.$ exponentes enteros positivos.

Multiplicando (1) por B:

$$AB = B\,ax^n + B\,bx^{n-1} + \dots\dots\dots \quad (2)$$

Como A.B es por hipótesis divisible por P, lo será el segundo miembro de la ecuación (2) que puede escribirse

$$B\,(ax^n + bx^{n-1} + \dots\dots\dots)$$

Como P debe dividir á esta expresión, dividirá á B ó bien á $(ax^n + \dots\dots\dots)$ quedando en ambos casos demostrado el teorema.

Segundo caso. A *y* B *son funciones de* x *y* P *no lo es.*

En este caso tienen la forma siguiente A y B:

$$A = ax^n + bx^{n-1} + \dots\dots\dots + sx + t\dots\dots\dots \quad (3)$$
$$B = \alpha x^{n'} + \beta x^{n'-1} + \dots\dots\dots + \sigma x + \tau\dots\dots\dots \quad (4)$$

(Siendo números enteros los coeficientes).

Designando por A′ el conjunto de términos en que entra P, y A″ los restantes en el valor de A, se tendrá:

$$A = A' + A'' \quad (5)$$

Asimismo:

$$B = B' + B'' \quad (6)$$

Multiplicando estas ecuaciones:

$$AB = A'B' + A'B'' + A''B' + A''B'' \quad (7)$$

Para que AB sea divisible por P, debe serlo el segundo miembro, y para esto, como los tres primeros términos lo son, sólo falta que A″B″ llene la condición; por último, esto tendrá lugar si los coeficientes de los términos de este producto son divisibles por P.

Esto es imposible, pues si designamos por Ka^r, $K'a^{r'}$ los términos que están elevados á la mayor potencia en A″B″.

Para que P divida á A″B″, es, pues, preciso que divida á K×K′, lo que es absurdo, pues P no divide á ninguno de los coeficientes de A″B″, de suerte que KK′ no es divisible por P, ni de consiguiente A″B″.

Deducimos de lo anterior, que no siendo divisible por P el cuarto término A″B″ de (7), á pesar de serlo los tres primeros, AB no puede ser divisible por P.

Como esto es absurdo por contrario á la hipótesis, el cuarto término A″B″ debe ser nulo, y de esta suerte, siendo divisibles por P todos los términos de A ó de B, A ó B serán divisibles por P.

Tercer caso. Si una de las cantidades A *ó* B *es numérica y la otra función de* x *lo mismo que* P.

Sea A el factor función de x, y Q el cociente entero de AB÷P, tendremos:

$$AB = PQ \quad (8)$$

y representando por $f, f', f''\dots\dots\dots$ los factores primos de B, se obtiene sustituyendo en (8):

$$Aff'f''\dots\dots\dots = PQ \quad (9)$$

Siendo el primer miembro divisible por f, lo será el segundo, y para ello ó P ó Q deben ser múltiplos de f.

No puede serlo P, porque es una cantidad prima lo mismo que f; luego debe serlo Q.

Designando por Q′ el cociente $\frac{Q}{f}$, se tendrá:

$$Af'f''\dots\dots\dots = PQ' \quad (10)$$

Aplicando el anterior razonamiento, deducimos que pues el primer miembro es divisible por f', lo será Q′, y llamando Q″ el cociente $Q' \div f'$, se tendrá:

$$Af''\dots\dots\dots\dots\dots\dots = PQ''$$

Llegaríamos siempre, aplicando el mismo raciocinio, á obtener una ecuación tal como

$$A = PQ_1$$

en la que siendo Q_1 *entero*, evidentemente A sería divisible por P.

Cuarto caso. A, B *y* P *son funciones de* x.

Supongamos que A no es divisible por P y tiene un grado superior al de P.

Ordenemos los exponentes de x de modo que vayan decreciendo, y continuemos la división de A÷P hasta obtener un resto de menor grado que el de P.

Con objeto de obtener en el cociente coeficientes enteros, multipliquemos A por un número conveniente m (que es generalmente el menor múltiplo de los denominadores de los coeficientes fraccionarios que se obtendrán sin efectuar la preparación citada).

Sea Q el cociente y R el resto de la división de A÷P, y se tendrá:

$$mA = PQ + R \quad (11)$$

(R es diverso de cero, pues de lo contrario $mA = PQ$, lo que indicaría que mA ó bien A era divisible por P en virtud del tercer caso, lo que es contra el supuesto que sentamos al principio).

Multipliquemos por B y dividamos por P los términos de (11), y tendremos:

$$\frac{mAB}{P} = BQ + \frac{RB}{P} \quad (12)$$

Como por hipótesis P debe dividir á AB y de consiguiente á mAB, debe dividir á BR; y si R es un número entero cualquiera, esto es evidente, pues al dividir P á BR debe dividir á R en virtud del tercer caso.

Supongamos que R depende de x, y dividamos P por R después de introducir un factor conveniente m' que evita el cociente fraccionario, tendremos:

$$m'P = RQ' + R' \quad (13)$$

(en que R′ debe ser diverso de cero, pues de lo contrario R dividirá á m'P y los factores primos algebraicos de R dividirán á P, lo que es imposible, pues P es primo).

Multiplicando por B y diviendo por P la ecuación (13), da:

$$m'B=\frac{BRQ'}{P}+\frac{BR'}{P} \qquad (14)$$

En que vemos que la divisibilidad de BR entre P hace forzosa la de BR′ entre P.

Si R′ es independiente de x, la proposición se demuestra, porque según el tercer caso, P debe dividir á B al dividir á BR′.

Si R′ depende de x, continuando el razonamiento, dividiendo P entre R′, R″......... llegaremos á un resto R_n independiente de x, tal que BR_n sería divisible por P y de consiguiente B.

N. B.—Si P es de mayor grado que A, se dividiría P por A, después por R, R′, R″.... aplicando los mismos raciocinios.

Los cuatro casos demostrados se aplican cuando ABP no son numéricos á la vez y no contienen sino una letra; pero cuando hay dos letras, x é y, en una, dos ó las tres cantidades propuestas, se deducen por raciocinios semejantes cuatro conclusiones correspondientes á cuatro casos, con la salvedad de que las cantidades que en los casos anteriores se pusieron numéricas, pueden ser ahora funciones de y.

Primer caso. Cuando uno de los factores A *y* B *contiene á* x *y* P *no la contiene.*

Segundo caso. Cuando A *y* B *contienen á* x *y* P *no la contiene.*

Tercer caso. Cuando uno de los factores A *y* B *contiene á* x *lo mismo que* P.

Cuarto caso. Cuando A, B *y* P *contienen á* x.

Pudiendo generalizar los raciocinios para cualquier número de letras, concluímos que el teorema es general.

Teorema VIII. *No existe sino un solo sistema de factores primos cuyo producto sea una cantidad dada,* ó en otros términos: *dos productos de factores primos son iguales solamente cuando están compuestos de factores iguales uno á uno.*

Sean

$$ABCD.........=abcd.........$$

los dos productos iguales de factores primos ABCD......... uno, y $abcd$......... el otro.

Como todos los factores son primos, si a no es igual á alguno de ellos, deduciríamos que no dividía al producto ABCD..... lo que es absurdo, pues ABCD.....$=abcd$..... así, pues, debe ser a igual á alguno de ellos, por ejemplo á A, y entonces BCD....$=bcd$.... y razonando igualmente, $b=$B; luego

$$CD.........=cd.........$$

luego en fin, aplicando siempre igual método, concluiríamos que los productos ABCD.... y $abcd$.... están formados de los mismos factores primos.

N. B.—Si varios factores del primer producto son iguales entre sí, el segundo debe contenerlos precisamente en igual número.

Teorema IX. Si se dividen dos polinomios por su M. C. D., los cocientes obtenidos son primos entre sí.

Teorema X. Si un número primo P divide á un producto ABCD......... debe dividir á alguno de los factores; luego:

Corolario I. Cuando una cantidad prima P divide á una potencia de una cantidad entera A, también divide á esta cantidad.

Corolario II. Cuando dos cantidades enteras son primas entre sí, sus potencias lo son también.

Teorema XI. No se altera el M. C. D. de dos cantidades cuando se multiplica ó divide una de ellas por una cantidad entera cualquiera, si no se halla dicha cantidad en el otro polinomio.

Porque el producto de los factores primos comunes á ambos polinomios no se cambia, y dicho producto es precisamente el M. C. D.

Teorema XII. Dados varios monomios, si se forma el M. C. D. de sus coeficientes y se colocan á continuación las literales comunes afectadas de los menores exponentes, el producto así formado será el M. C. D. de los monomios propuestos.

Teorema XIII. Dados varios polinomios ABC......... se busca el M. C. D. de los de menor grado, que será G, luego el M. C. D. entre G y el siguiente polinomio y así sucesivamente hasta hallar el M. C. D. final que será el de todos.

Teorema XIV. Suponiendo el caso más sencillo de que cada polinomio tiene una letra y todos sus términos son primos entre sí, efectuando la división entre los dos polinomios propuestos sin admitir términos fraccionarios en el cociente, el M. C. D. de los dos polinomios, es el mismo que existe entre el polinomio que ha servido de divisor y el residuo.

En efecto, sean A y B los polinomios, Q y R el cociente, y la resta de la división $\frac{A}{B}$, tendremos:

$$A=BQ+R \qquad (15)$$

Todo factor común á A y B dividirá á A y BQ, por consiguiente á su diferencia R; igualmente todo factor que divide á B y R, divide á A; luego los factores primos comunes á A y B lo son á B y R, y el M. C. D. de las primeras cantidades es el mismo que el de las últimas.

Deberemos pues dividir B÷R; si la división es exacta, R será el M. C. D. entre B y R (teorema II), es decir, entre A y B (teorema IV, etc.)

Si no es exacta la división, el M. C. D. entre B y R será el que exista entre R y R_1 residuo de la división (siempre que sólo se escriban términos enteros en el cociente). Dividiremos, pues, $R_1 \div R_2$, luego $R_2 \div R_3$, etc., continuando hasta obtener un residuo R_n independiente de la letra ordenatriz.

Si este residuo es cero, el último divisor será el M. C. D. buscado.

Si no, los polinomios son primos entre sí.

3. N. B.—I. La condición de que los cocientes sean enteros es precisa, pues si no nada nos autorizaría á decir que todo factor que divide á B, divide á BQ.

II. Para conseguir forma entera en el cociente en el caso en que el primer término del dividendo sea primo con el primero del divisor, se multiplica el dividendo por un número conveniente (que puede ser el coeficiente de la letra ordenatriz en el primer término del divisor), y esta operación no altera el M. C. D. si el factor introducido es primo con el divisor, lo que tiene lugar cuando los coeficientes de los términos del divisor son primos entre sí. Así pues, antes de tomar un residuo como divisor, se busca el M. C. D. de los coeficientes de todos sus términos y se divide por este M. C. D.; lo que puede hacerse, pues el dividendo respectivo en la división siguiente tiene ya todos sus términos primos entre sí.

III. Si el coeficiente del primer término de un dividendo parcial es primo con el del primer término del divisor, para obtener un cociente entero se multiplicará el dividendo por el coeficiente del primer término del divisor. Pero si ambos coeficientes no son primos, se busca su M. C. D. y se multiplicará el dividendo por el cociente que resulta de dividir entre dicho M. C. D. el coeficiente del primer término del divisor.

4. Sea por ejemplo hallar el M. C. D. entre

$$20x^4+8x^3-23x^2+13x-3 \text{ y } 12x^4-8x^3-21x^2+23x-6.$$

El cuadro de las operaciones será:

PRIMERA DIVISIÓN.

$$\begin{array}{r|l}
20x^4+8x^3-23x^2+13x-3 & 12x^4-8x^3-21x^2+23x-6 \\ \cline{2-2}
60x^4+24x^3-69x^2+39x-9 & 5 \\
40x^3+105x^2-115x+30 & \\ \hline
64x^3+36x^2-76x+21 &
\end{array}$$

Hemos multiplicado el dividendo por 3 para que el cociente y residuo sean enteros; 3 es el cociente entre 12 y 4, y 4 el M. C. D. entre 20 y 12.

SEGUNDA DIVISIÓN.

$$\begin{array}{r|l}
12.16x^4-128x^3-336x^2+368x-96 & 64x^3+36x^2-76x+21 \\ \cline{2-2}
-108x^3+228x^2-63x & 3x-59 \\ \hline
-236x^3-108x^2+305x-96 & \\
-3776x^3-1728x^2+4880x-1536 & \\
+2124x^2-4484x+1239 & \\ \hline
396x^2+396x-297 &
\end{array}$$

El primero y segundo dividendo los hemos multiplicado por 16, y antes de tomar el residuo por divisor, dividiremos todos sus términos entre su M. C. D., luego se tendrá:

TERCERA DIVISIÓN.

$$\begin{array}{r|l}
64x^3+36x^2-76x+21 & 4x^2+4x-3 \\ \cline{2-2}
-64x^2+48x & 16x-7 \\ \hline
-28x^2-28x+21 & \\
+28x-21 & \\ \hline
0 &
\end{array}$$

Luego el M. C. D. es $4x^2+4x-3$.

5. *Caso general.* El anterior teorema enuncia un caso muy particular, pasando al general; sean A y B los polinomios propuestos. Sea A_1 el M. C. D. monomio de los diversos términos de A, y A' el cociente de $A \div A_1$, se tendrá:

$$A = A_1 A'$$

Asimismo:

$$B = B_1 B'$$

Si se han ordenado A', B' respecto á una letra, sea A_2 el M. C. D. de los coeficientes de esta letra en A' y A_3 el cociente $A' \div A_2$, se tendrá:

$$A' = A_2 A_3$$

También

$$B' = B_2 B_3$$

Luego

$$A = A_1 A_2 A_3$$
$$B = B_1 B_2 B_3$$

Si hallamos el M. C. D. entre A_1 y B_1, que llamaremos d_1; el M. C. D. d_2 entre A_2 y B_2, y el d_3 entre A_3, B_3, el producto $d_1 d_2 d_3$, será el M. C. D. buscado.

En efecto, todo factor polinomio primo dependiente de la letra ordenatriz que divida á $A = A_1 A_2 A_3$, no pudiendo dividir á $A_1 A_2$ ni á $B_1 B_2$, tiene que dividir á A_3 y B_3, y es de consiguiente un factor de su M. C. D.; luego d_3 es el producto de todos los factores polinomios primos, funciones de la letra ordenatriz, comunes á A y á B.

Igualmente se demostraría que d_1, d_2, son: el uno producto de todos los factores monomios primos comunes á A y B, y el otro el de todos los factores polinomios primos independientes de la letra ordenatriz y comunes á A y B. Luego $d_1 d_2 d_3$ es el producto de todos los factores primos comunes á A y B, y es por lo tanto su M. C. D.

Para determinar á d_1 se busca el factor monomio A_1 común á los términos de A, compuesto generalmente de factores literales comunes á todos los términos y precedido del M. C. D. numérico de los coeficientes.

Se busca asimismo B_1 y el M. C. D. entre A_1 y B_1 será d_1 que se aparta al ser el primer factor del M. C. D. buscado.

Se suprimen A_1, B_1 en A, B y sólo resta A', B' sin factores monomios, cuyo M. C. D. se busca aplicando la regla que sigue y en que distinguimos varios casos.

1º *A' y B' sólo encierran una letra* a.

Como los coeficientes de A' y B' (al ordenar los polinomios respecto á las potencias de a) son primos entre sí, al haber quitado los factores monomios, se trata de buscar el M. C. D. independiente de a ó d_2; teniendo en cuenta que como puede conocerse A_2, B_2, su M. C. D. d_2, A_3 y B_3, sólo resta conocer d_3.

Se comienza por hacer que el primer término del dividendo sea divisible entre el primero del divisor multiplicándolo por un número conveniente (§ 3, N. B. II), efectuando la operación hasta obtener un resto de menor grado que el divisor, buscando entre sus coeficientes (que serán numéricos) si admiten algún factor que puede suprimirse por no formar parte del M. C. D. y se opera con el segundo polinomio y el resto como con A_3 y B_3; continuando la operación obtendremos d_3.

2º La determinación del M. C. D. de dos polinomios A' y B' de cierto número de letras y tales que los términos de cada uno no contengan factor monomio alguno, depende pues solamente, de la del M. C. D. de otros polinomios semejantes que contengan una letra menos. Como en el caso anterior se ha explicado la regla para la determinación del M. C. D. de polinomios conteniendo sólo una letra, tales que todos sus términos fuesen primos entre sí, podríamos hallar el M. C. D. de polinomios con dos letras, luego con tres, etc., de suerte que en general con cualquier número de letras.

De aquí se deduce finalmente la regla general:

Para hallar el M. C. D. de dos polinomios A y B, búsquese el M. C. D. A_1 y B_1 de los términos de A y B respectivamente; luego el M. C. D. d_1 entre A_1 y B_1. Prescíndase de d_1, divídase A y B entre A_1 y B_1, y se obtendrán dos cocientes A' y B' que se ordenarán respecto á las potencias de una misma letra.

Calcúlese el M. C. D. A_2 de los coeficientes del polinomio A' y el B_2 de los coeficientes de B' y el M. C. D. d_2 entre A_2 y B_2. Prescindiendo de d_2, divídase después A' y B' entre A_2 y B_2, lo que dará dos cocientes A_3, B_3 con todos sus terminos primos entre sí. Hállese en fin el M. C. D. d_3 de estas cantidades A_3 y B_3, y no habrá sino multiplicar $d_1 d_2 d_3$ y el producto será el M. C. D. que buscamos.