6. N. B.—Como generalmente los polinomios A′, B′ c sóloontienen dos letras, x é y, vamos á explicar cómo se simplifica el procedimiento.

Ordenando A′ y B′ respecto á y, obtendremos el M. C. D. X de los coeficientes de esta letra en A′; divídase A′÷X, ordénese el cociente A″ respecto á x, y se busca el M. C. D. Y de los coeficientes de los diferentes términos en A″; dividiendo A″÷Y, se obtiene el cociente A‴; luego:

$$A' = XYA'''$$

Igualmente:

$$B' = X'Y'B'''$$

formando el producto de los Ms. Cs. Ds. de X y X′, Y é Y′, A‴ y B‴, obtendremos el M. C. D. entre A′ y B′.

Caso particular. Si A′ contiene cierta letra x y es de la forma

$$A' = Ax^{a} + bx^{\beta} + ex^{\gamma} + \dots\dots\dots$$

después de ordenarlo respecto á x y B′ no contiene dicha letra; siendo B′ independiente de x, el M. C. D. no puede contener esta letra y divide por consiguiente á los coeficientes de x en el polinomio A′.

Así pues, el M. C. D. entre A′ y B′ será el que exista entre B′ y $a, b, c\dots\dots\dots$

EJEMPLOS.

7. I. Dados los monomios $432\,a^4 b^2 x$, $270\,a^2 b^3 x^2$, $90\,a^3 bx^3$, su M. C. D. es $18\,a^2 bx$.

II. Sean $2\,a^3 b^7 c^8$, $4\,bca$, $24\,a^5 bc^{10}$, su M. C. D. es $2\,abc$.

III. Dados los binomios $(b-c)^2$ y $(b-c)$, su M. C. D. es $b-c$.

IV. Dados los polinomios $a^3 - a^2 b + 3\,ab^2 - 3\,b^3$, $a^2 - 5\,ab + 4\,b^2$, se tendrá:

PRIMERA DIVISIÓN.

$$\begin{array}{r|l}
a^3 - a^2b + 3\,ab^2 - 3\,b^3 & a^2 - 5\,ab + 4\,b^2 \\ \cline{2-2}
-a^3 + 5\,a^2b - 4\,ab^2 & a + 4\,b \\ \cline{1-1}
4\,a^2b - ab^2 - 3\,b^3 & \\
-4\,a^2b + 20\,ab^2 - 16\,b^3 & \\ \cline{1-1}
19\,ab^2 - 19\,b^3 &
\end{array}$$

Como $19\,ab^2 - 19\,b^3 = 19\,(ab^2 - b^3) = 19\,b^2\,(a-b)$ y $19\,b^2$ divide á este residuo sin ser factor del divisor, podremos suprimirlo, luego:

SEGUNDA DIVISIÓN.

$$\begin{array}{r|l}
a^2 - 5\,ab + 4\,b^2 & a - b \\ \cline{2-2}
-a^2 + ab & a - 4\,b \\ \cline{1-1}
-4\,ab + 4\,b^2 & \\
+4\,ab - 4\,b^2 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Luego el M. C. D. es $a-b$.

V. Dados los anteriores polinomios ordenados respecto á b.

$$-3\,b^3 + 3\,ab^2 - a^2 b + a^3, \qquad 4\,b^2 - 5\,ab + a^2$$

Para tener cociente entero multiplicaremos el dividendo por 4.

PRIMERA DIVISIÓN.

$$\begin{array}{r|l}
-12\,b^3 + 12\,ab^2 - 4\,a^2b + 4\,a^3 & 4\,b^2 - 5\,ab + a^2 \\ \cline{2-2}
+12\,b^3 - 15\,ab^2 + 3\,a^2b & -3\,b - 3\,a \\ \cline{1-1}
-3\,ab^2 - a^2b + 4\,a^3 & \text{Multiplicando por 4} \\
-12\,ab^2 - 4\,a^2b + 16\,a^3 & \\
12\,ab^2 - 15\,a^2b + 3\,a^3 & \\ \cline{1-1}
-19\,a^2b + 19\,a^3 & \\
19\,a^2\,(-b+a) &
\end{array}$$

Podemos suprimir en la resta, $19\,a^2$ que no es factor del divisor, y tendremos:

SEGUNDA DIVISIÓN.

$$\begin{array}{r|l}
4\,b^2 - 5\,ab + a^2 & -b + a \\ \cline{2-2}
-4\,b^2 + 4\,ab & -4\,b + a \\ \cline{1-1}
-ab + a^2 & \\
ab - a^2 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Como antes el M. C. D. es $-b+a$ ó $a-b$.

VI. Dados los mismos polinomios ordenados respecto á b, podemos de una vez multiplicar los términos del dividendo por 4^2, pues en la primera división hay que hacer dos multiplicaciones por 4.

Así pues, siguiendo esta regla:

$$\begin{array}{r|l}
16\,(-3\,b^3 + 3\,ab^2 - a^2b + a^3) & 4\,b^2 - 5\,ab + a^2 \\ \cline{2-2}
-48\,b^3 + 48\,ab^2 - 16\,a^2b + 16\,a^3 & -12\,b - 3\,a \\
+48\,b^3 - 60\,ab^2 + 12\,a^2b & \\ \cline{1-1}
-12\,ab^2 - 4\,a^2b + 16\,a^3 & \\
+12\,ab^2 - 15\,a^2b + 3\,a^3 & \\ \cline{1-1}
-19\,a^2b + 19\,a^3 = 19\,a^2\,(-b+a) &
\end{array}$$

y como antes $4\,b^2 - 5\,ab + a^2 \div -b + a$, da $-4\,b + a$ de cociente y 0 de resta, luego $-b+a$ es siempre el M. C. D.

Aun para comprobar nuestras operaciones podemos en los mismos polinomios multiplicar el dividendo por el cubo de $4 = 64$, y tendremos:

$$\text{cociente} = -48\,b - 12\,a \qquad \text{resta} = +76\,a\,(-b+a)$$

Puede suprimirse 76 a y resulta:

$$\text{resta} = -b + a$$

y como antes:

$$4b^2 - 5ab + a^2 \div -b + a$$

produce

$$\text{resta} = 0 \qquad \text{cociente} = -4b + a$$

N. B.—Si el exponente de la letra principal en el dividendo sobrepasa 2, 3...... unidades al exponente de la misma letra en el divisor, conviene multiplicar el dividendo por la 3ª, 4ª...... potencia del coeficiente del primer término del divisor.—(Bourdon.)

VII. Sean los polinomios:

$$15a^5 + 10a^4b + 4a^3b^2 + 6a^2b^3 - 3ab^4 \quad \text{y} \quad 12a^3b^2 + 38a^2b^3 + 16ab^4 - 10b^5$$

Ante todo, como en el primer polinomio a es factor común sin serlo del segundo, podemos suprimirla, y del mismo modo, como el factor $2b^2$ es común al segundo polinomio y no entra en el primero, también lo suprimiremos, y nuestros polinomios serán:

$$15a^4 + 10a^3b + 4a^2b^2 + 6ab^3 - 3b^4 \quad \text{y} \quad 6a^3 + 19a^2b + 8ab^2 - 5b^3$$

multiplicaremos por 6 el primer polinomio y por 2 la primera resta; obtendremos por resta final:

$$411a^2b^2 + 274ab^3 - 137b^4$$

ó bien:

$$137b^2(3a^2 + 2ab - b^2)$$

Efectuando la segunda división, en la que el cociente es:

$$3a^2 + 2ab - b^2$$

resulta de

$$\text{cociente } 2a + 5b \text{ y } 0 \text{ de resta}$$

luego

$$\text{M. C. D.} = 3a^2 + 2ab - b^2$$

N. B.—Las supresiones de factores comunes á los términos de las restas son en rigor necesarios, pues si por ejemplo en la anterior aplicación no se suprime el factor $137b^2$, se debe multiplicar el polinomio que de divisor pasa á dividendo, por $137b^2$, para poder efectuar la división, y esto complica al M. C. D. con el factor $137b^2$.

En efecto, dividiremos:

$$(6a^3 + 19a^2b + 8ab^2 - 5b^3)\,137b^2 \div 411a^2b^2 + 274ab^3 - 137b^4$$

lo que da $2a + 5b$ de cociente y 0 de resta.

Así pues, el M. C. D. es:

$$411a^2b^2 + 274ab^3 - 137b^4$$

pero como tiene por factor común $137b^2$, será:

$$3a^2 + 2ab - b^2$$

como anteriormente.

VIII. Dados los polinomios

$$ab + 2a^2 - 3b^2 - ac - c^2 - 4bc \quad \text{y} \quad 9ac + 2a^2 - 5ab + 4c^2 + 8bc - 12b^2$$

ordenándolos respecto á a, tendremos que efectuar la primera división que producirá:

$$\text{cociente} = 1 \qquad \text{resta} = a(6b - 10c) + 9b^2 - 12bc - 5c^2 = (3b - 5c)(2a + 3b + c)$$

ó bien

$$2a + 3b + c$$

La segunda división produce:

$$\text{cociente} = a - 4b + 4c \qquad \text{resta} = 0$$

luego

$$\text{M. C. D.} = 2a + 3b + c$$

IX. Sean:

$$a^4 + 3a^3b + 4a^2b^2 - 6ab^3 + 2b^4 \quad \text{y} \quad 4a^3b + 2a^2b^2 - 2ab^3$$

ó sencillamente

$$2a^2 + ab - b^2$$

pues $2ab$ es factor.

Para efectuar la división multiplicaremos el primer polinomio por 8 y tendremos:

$$\text{cociente} = 4a^2 + 10ab + 13b^2 \qquad \text{resta} = -b^3(51a - 29b)$$

ó bien

$$51a - 29b$$

Después de multiplicar el nuevo dividendo por $51^2 = 2601$, tenemos para la segunda división:

$$\text{cociente} = 102a + 109b \qquad \text{resta} = 560b^2$$

Vemos que los polinomios dados son primos entre sí.

X. Dados

$$48a^2b^3x^6 - 120a^3b^3x^5 + 12a^4b^3x^4 - 12a^6b^3x^2 \quad \text{y} \quad 48a^3bx^7 - 88a^4bx^6 - 64a^5bx^5 - 8a^6bx^4$$

que equivalen á

$$4x^4 - 10ax^3 + a^2x^2 - a^4$$

dividiendo el primero por

$$12a^2b^3x^2 \quad \text{y} \quad 6x^3 - 11ax^2 - 8a^2x - a^3$$

dividiendo el segundo por

$$8a^3bx^4$$

Después de multiplicar el polinomio primero por 3, y por 3 la primera resta que se obtenga al dividir, resulta:

$$\text{cociente} = 2x - 4a \qquad \text{resta} = 13a^2x^2 - 26a^3x - 13a^4$$

que se reduce á

$$x^2 - 2ax - a^2$$

Al efectuar la segunda división se obtiene:

$$\text{cociente} = 6x + a \qquad \text{resta} = 0$$

luego

$$\text{M. C. D.} = x^2 - 2ax - a^2$$

XI. Sean

$$x^4 - ax^3 - a^2x^2 - a^3x - 2a^4 \quad \text{y} \quad 3x^3 - 7ax^2 + 3a^2x - 2a^3$$

multiplicando el primero por 3 y la primera resta que se obtenga también por 3, resulta:

$$\text{cociente} = x + 4a \qquad \text{resta} = 10a^2x^2 - 15a^3x - 10a^4 = 5a^2(2x^2 - 3ax - 2a^2)$$

En la segunda división:

$$\text{divisor} = 2x^2 - 3ax - 2a^2 \quad \text{cociente} = 3x - 5a \quad \text{resta} = 9a^2x - 18a^3 = 9a^2(x - 2a)$$

siendo $x - 2a$ el divisor de la tercera división.

En esta segunda división el dividendo se multiplicó por 2 y también por 2 la primera resta.

Efectuando la tercera y última división:

$$\text{cociente} = 2x + a \qquad \text{resta} = 0 \qquad \text{M. C. D.} = x - 2a$$

XII. Sean

$$x^3 + yx^2 + x^2 - y^2x + 2yx - y^3 + y^4 \quad \text{é} \quad yx^2 + x^2 + y^2x + yx + x + y$$

que pueden escribirse así:

$$x^3 + x^2(y+1) - x(y^2 - 2y) - y^3 + y^2 \quad \text{y} \quad x^2(y+1) + x(y^2 + y + 1) + y$$

Debe hallarse:

$$\text{M. C. D.} = x + y$$

8. Antes de terminar haremos algunas explicaciones útiles:

9. I. Cuando en polinomios tales como por ejemplo

$$Ax^m + Px^{m-1} + \ldots\ldots + Tx + V$$

la incógnita no esté en los denominadores ni bajo radicales, la función se considera como racional aunque los coeficientes no lo sean.

Sentado esto, vamos á demostrar un teorema.

Si un binomio de primer grado de la forma $ax + a'$ *divide á un producto* AB *de los polinomios racionales y enteros en* x, *debe dividir á uno de estos polinomios.*

Supongamos que $A \div (ax + a')$ dé Q por cociente y R por resta, y que B produzca Q′ y R′ respectivamente, y tendremos:

$$\frac{A}{ax + a'} = Q + \frac{R}{ax + a'} \qquad \text{y} \qquad \frac{B}{ax + a'} = Q' + \frac{R'}{ax + a'}$$

luego

$$AB = (ax + a')^2 QQ' + (ax + a')(QR' + RQ') + RR'$$

Como por hipótesis AB es divisible por $ax + a'$, lo será el segundo miembro.

Vemos que los dos primeros términos sí son divisibles por $ax + a'$, luego debe serlo el tercero; pero como ni R ni R′ pueden contener á $ax + a'$ como factor por ser independientes de x para llenar la condición de que AB sea divisible entre $ax + a'$, el término $RR' = 0$, es decir, ó $R = 0$, ó $R' = 0$; en el primer caso A será divisible por $ax + a'$, y en el segundo lo será B.

10. *Consecuencia.* Toda función entera D (de primer grado en x) que divide un producto ABCD......... de m funciones enteras, debe dividir forzosamente á una de ellas.

Porque si D no divide á A, dividirá á BCD...... si tampoco á B, dividirá á CD...... si no divide á C, dividirá á D...... etc.; deducimos que si D no divide los $m - 1$ primeros factores del producto dado, debe dividir al mº factor.

II. Se deduce de aquí que D no puede dividir á A^m sin dividir á A (siendo D un divisor relativo de primer grado y A una función entera cualquiera).

APLICACIONES.

11. I. Sean

$$x^3 - 2x^2y + 3x^2y^2 - xy^2 + 2y \quad \text{y} \quad 3x^2 + xy - y^2$$

Se multiplicará por 3 el dividendo y quedará:

$$\text{cociente} = x + 9y^2 - 7y \qquad \text{resta} = 5xy^2 - 9xy^3 + 9y^4 - 7y^3 + 6y$$

es decir:

$$x(5y^2 - 9y^3) + 9y^4 - 7y^3 + 6y$$

ó bien:

$$x(5y - 9y^2) + 9y^3 - 7y^2 + 6$$

y se tendrá que multiplicar por $5y - 9y^2$ el dividendo de la segunda división que produce después de hacer reducciones y volver á multiplicar la resta por $5y - 9y^2$:

$$\text{cociente} = 3x + 26y^2 - 36y^3 - 18 \qquad \text{resta} = 157y^4 - 396y^5 + 243y^6 + 378y^3 - 286y^2 + 108$$

Como es independiente de x esta resta, los polinomios no admiten M. C. D., lo que es evidente, pues ni el primero ni el segundo contienen á x é y en todos sus términos.

II. Sean los polinomios:

$$4a^6 - 2a^5 - 3a^4 + a^3 \quad \text{y} \quad 3a^5 - 2a^4 - a^3$$

Se multiplicará por 3 el primero y resultará:

$$\text{cociente} = 4a + 2 \qquad \text{resta} = -11a^4 + 11a^3$$

es decir

$$-a^4 + a^3$$

Efectuando la segunda división se obtiene:

$$\text{cociente} = -3a + 1 \qquad \text{resta} = 0 \qquad \text{M. C. D.} = a^3 - a^4$$

III. Dados los polinomios:

$$a^2d^2 - c^2d^2 - a^2c^2 + c^4 = d^2(a^2 - c^2) - a^2c^2 + c^4 = d^2(a^2 - c^2) - c^2(a^2 - c^2)$$

y

$$2a^2d - ac^2 + c^3 - 2acd = d(2a^2 - 2ac) - ac^2 + c^3 = 2ad(a - c) - c^2(a - c)$$

que se cambian todavía en

$$(a^2-c^2)(d^2-c^2) \qquad (a-c)(2ad-c^2)$$

tendremos desde luego:

$$\text{M. C. D.}=a-c$$

IV. Sean los dos polinomios:

$$-4p^4-p^3q+2p^2q^2+3pq^3 \quad \text{y} \quad qp^3+3p^2q^2-2pq^3-2q^4$$

Se hallará:

$$\text{M. C. D.}=p-q$$

CAPÍTULO II.

MÁXIMOS Y MÍNIMOS.

APLICACIONES.

12. Cuando una cantidad es variable, puede pasar por diversos estados de magnitud, ya aumentando, ya disminuyendo.

Cuando se halla en una magnitud más grande que las inmediatamente vecinas, está en un *máximo*, y si la magnitud es inferior á las inmediatamente vecinas, está en un *mínimo*.

Supongamos (fig. 1ª) una curva ABCD...... cuyos puntos distan de un eje fijo xx' distancias representadas por AA', BB', CC'......

Los puntos F, H, J, son *máximos;* los G é I, *mínimos;* B, D, *máximos* y E, C, *mínimos*.

Como se ve, el *mínimo* I es mayor que el *máximo* E; pero estas denominaciones sólo se refieren á los valores próximos.

13. Teorema fundamental. *La suma de dos factores variables siendo constante, su producto es máximo cuando estos factores son iguales entre sí ó á la mitad de la suma dada.*

Sean x é y las cantidades incógnitas auxiliares, a su suma y z su producto, incógnita principal.

Tendremos:

$$x+y=a \qquad xy=z$$

De la primera se tiene:

$$y=a-x$$

Sustituyendo en la segunda

$$x^2-ax+z=0$$

de donde

$$x=\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-z}$$