que se cambian todavía en

$$(a^2-c^2)(d^2-c^2) \qquad (a-c)(2ad-c^2)$$

tendremos desde luego:

$$\text{M. C. D.}=a-c$$

IV. Sean los dos polinomios:

$$-4p^4-p^3q+2p^2q^2+3pq^3 \quad \text{y} \quad qp^3+3p^2q^2-2pq^3-2q^4$$

Se hallará:

$$\text{M. C. D.}=p-q$$

CAPÍTULO II.

MÁXIMOS Y MÍNIMOS.

APLICACIONES.

12. Cuando una cantidad es variable, puede pasar por diversos estados de magnitud, ya aumentando, ya disminuyendo.

Cuando se halla en una magnitud más grande que las inmediatamente vecinas, está en un *máximo*, y si la magnitud es inferior á las inmediatamente vecinas, está en un *mínimo*.

Supongamos (fig. 1ª) una curva ABCD...... cuyos puntos distan de un eje fijo xx' distancias representadas por AA', BB', CC'......

Los puntos F, H, J, son *máximos*; los G é I, *mínimos*; B, D, *máximos* y E, C, *mínimos*.

Como se ve, el *mínimo* I es mayor que el *máximo* E; pero estas denominaciones sólo se refieren á los valores próximos.

13. Teorema fundamental. *La suma de dos factores variables siendo constante, su producto es máximo cuando estos factores son iguales entre sí ó á la mitad de la suma dada.*

Sean x é y las cantidades incógnitas auxiliares, a su suma y z su producto, incógnita principal.

Tendremos:

$$x+y=a \qquad xy=z$$

De la primera se tiene:

$$y=a-x$$

Sustituyendo en la segunda

$$x^2-ax+z=0$$

de donde

$$x=\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-z}$$

Para x sea real debe tenerse $\frac{a^2}{4}-z>0$ ó $z<\frac{a^2}{4}$; así pues, el *máximo* de z es $\frac{a^2}{4}$. Para $z=\frac{a^2}{4}$, x é y deben valer $\frac{a}{2}$ y queda demostrado el teorema.

14. N. B.—1º Para $x=0$ se tiene:

$$y=a \qquad z=0$$

Para $x=a$:

$$y=0 \qquad z=0$$

Si uno de los factores x ó y varía de 0 á a, el producto z parte de 0 para volver á 0; entre estos límites pasa por un *máximo*, lo que era de preverse.

2º No hay producto *mínimo*, porque si el valor dado á x, por ejemplo, supera á a, el factor y es negativo, tanto mayor en valor numérico cuanto es mayor x positivamente. El producto z también es negativo y puede decrecer algebraicamente hasta $-\infty$ sin que deje x de ser real.

15. Para tratar esta cuestión que no se estudia en los cursos preparatorios y nosotros vamos á indicar, comenzaremos por citar algunos teoremas generales que apoyen nuestras posteriores aplicaciones.

16. I. *El producto de varios números cuya suma es igual á un número dado, es máximo cuando estos números son iguales entre sí*, y á la n^{sima} parte de la suma constante.

Supongamos que $a+b+c+d\ldots\ldots=p$ y que entre los diversos modos de escoger a, b, c, $d\ldots\ldots$ sin que esta condición deje de tener lugar, hayamos tomado el que hace $abcd\ldots\ldots$ máximo, vamos á demostrar que en este caso estas cantidades son iguales.

En efecto, si a y b no son iguales, se tendría (véase teorema fundamental):

$$ab<\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

luego

$$abcd\ldots\ldots<\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a+b}{2}\right)cd\ldots\ldots$$

En el segundo producto la suma de los factores es p como en el primero. Luego el producto $abcd\ldots\ldots$ no es *máximo* si no son iguales sus factores entre sí y á la n^{a} parte de la suma constante.

II. Deducimos de lo anterior: *que el producto de las potencias* r s t u...... *de varios números* a b c d *cuya suma* p *es constante, es máximo si se tiene.*

$$\frac{a}{r}=\frac{b}{s}=\frac{c}{t}=\frac{d}{u}\ldots\ldots$$

En efecto, si el producto $a^r b^s c^t d^u\ldots\ldots$ es máximo y se le divide por $r^r s^s t^t u^u\ldots\ldots$ los mismos valores de $abcd\ldots\ldots$ harán máximo el cociente:

$$\frac{a^r b^s c^t d^u\ldots\ldots}{r^r s^s t^t u^u\ldots\ldots}=\frac{a}{r}\times\frac{a}{r}\ldots\ldots\frac{b}{s}\times\frac{b}{s}\ldots\ldots\frac{c}{t}\times\frac{c}{t}\ldots\ldots\frac{d}{u}\times\frac{d}{u}\ldots\ldots$$

Pero según el teorema anterior el segundo miembro es *máximo* cuando los factores son iguales; es decir, si se tiene:

$$\frac{a}{r}=\frac{b}{s}=\frac{c}{t}=\frac{d}{u}\ldots\ldots$$

que es el enunciado del teorema.

17. N. B.—De esta última ecuación deducimos:

$$\frac{a+b+c+d\ldots\ldots}{r+s+t+u\ldots\ldots}=\frac{p}{r+s+t+u\ldots\ldots}=\frac{a}{r}=\frac{b}{s}\ldots\ldots$$

ó bien:

$$a=r\frac{p}{r+s+t+u\ldots\ldots} \qquad b=s\frac{p}{r+s+t+u\ldots\ldots}$$

es decir, que los valores $a, b, c\ldots\ldots$ son partes de p respectivamente proporcionales á los exponentes que tienen en el producto $a^r b^s c^t d^u\ldots\ldots$

18. III. *La suma de varios factores cuyo producto es constante, es mínima cuando estos factores son iguales entre sí.*

Sea $abcd\ldots..=$ P y que entre las diferentes maneras de escoger los números $abcd\ldots..$ sin que esta condición se altere, hayamos tomado la que hace *mínima* la suma $a+b+c+d\ldots$ y vamos á demostrar que en este caso los números dados son iguales.

Antes de estudiar el problema en general, consideremos que P sólo consta de dos factores y averigüemos cuándo es mínima su suma.

Si x es uno de ellos, $\frac{P}{x}$ será el otro, y debemos pues buscar el *mínimo* de $x+\frac{P}{x}=z$, que da:

$$x=\frac{z}{2}\pm\sqrt{\frac{z^2}{4}-P}$$

Vemos que el valor mínimo de z que anula el radical es: $z=2\sqrt{P}$ que da $x=\sqrt{P}$; el segundo factor será:

$$\frac{P}{x}=\frac{P}{\sqrt{P}}=\sqrt{P}$$

lo mismo que x; luego cada factor es la raíz cuadrada del producto.

Generalizando en el caso de varios factores si a y b fuesen desiguales, se tendría:

$$a+b>2\sqrt{ab} \tag{18}$$

luego

$$a+b+c+d+\ldots\ldots>\sqrt{ab}+\sqrt{ab}+c+d\ldots\ldots$$

En el segundo miembro el producto de los factores $\sqrt{ab}\times\sqrt{ab}\times c\times d\ldots\ldots$ es el mismo que en el primero, es decir, P; luego la suma $a+b+c+d\ldots\ldots$ no es mínima á menos que sus términos sean iguales.

19. Problema. *Descomponer un número* P *en factores* abcd......... *de tal manera que* $a^r+b^s+c^t+d^u\ldots\ldots\ldots$ *sea un mínimo.*

Se tiene:

$$a^r+b^s+c^t+d^u\ldots\ldots\ldots=\frac{stu\ldots\ldots}{stu\ldots\ldots}a^r+\frac{rtu\ldots\ldots}{rtu\ldots\ldots}b^s+\frac{rsu\ldots\ldots}{rsu\ldots\ldots}c^t+\frac{rst\ldots\ldots}{rst\ldots\ldots}d^u+\ldots\ldots$$

ó bien:

$$\left.\begin{aligned} a^r+b^s+c^t+d^u\ldots\ldots\ldots=&\frac{a^r}{stu\ldots\ldots}+\frac{a^r}{stu\ldots\ldots}+\ldots\ldots\ldots\\ &+\frac{b^s}{rtu\ldots\ldots}+\frac{b^s}{rtu\ldots\ldots}+\ldots\ldots\ldots\\ &+\frac{c^t}{rsu\ldots\ldots}+\frac{c^t}{rsu\ldots\ldots}+\ldots\ldots\ldots\\ &+\frac{d^u}{rst\ldots\ldots}+\frac{d^u}{rst\ldots\ldots}+\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

El producto de los términos del segundo miembro es:

$$\frac{a^{rstu\ldots\ldots}\times b^{srtu\ldots\ldots}\times c^{trsu\ldots\ldots}\times d^{urst\ldots\ldots}\times\ldots\ldots}{Q}=\frac{(abcd)^{rstu\ldots\ldots}}{Q}=\frac{P^{rstu\ldots\ldots}}{Q}$$

cantidad constante al serlo tanto el numerador como el denominador, y según el teorema anterior tendremos, que como la suma de los factores de un producto constante es *mínima* cuando los factores son iguales, es preciso que:

$$\frac{a^r}{stu\ldots\ldots}=\frac{b^s}{rtu\ldots\ldots}=\frac{c^t}{rsu\ldots\ldots}=\frac{d^u}{rst\ldots\ldots}$$

ó bien:

$$ra^r=sb^s=tc^t=ud^u\ldots\ldots\ldots$$

Combinando con estas ecuaciones la $abcd\ldots\ldots=P$, se van obteniendo por eliminación a, b, c, d...... y en fin:

$$a^r+b^s+c^t+d^u+\ldots\ldots\ldots$$

20. N. B.—El cálculo supone el empleo de radicales de índice elevado, si r, s, t, u...... son algo grandes.

Se puede aún contar el número n de términos de la ecuación (19) y extraer la raíz *enésima* de

$$\frac{P^{rstu\ldots\ldots}}{Q}$$

cuya raíz daría

$$\frac{a^r}{stu\ldots\ldots},\qquad \frac{b^s}{rtu\ldots\ldots}\ \text{etc.}$$

y por consiguiente ab...... etc.

21. Para determinar el *máximo* ó *mínimo* de una magnitud variable, se procede así: Representando por una letra la magnitud, se expresa su valor con ayuda de los datos é incógnitas del problema escribiendo estas relaciones, considerando á la magnitud variable como incógnita principal y á las demás como auxiliares ó dependientes, obteniendo así $n-1$ ecuaciones con n incógnitas. Se eliminan entre ellas $n-2$ incógnitas auxiliares hasta obtener finalmente una ecuación con la incógnita principal y una auxiliar, ecuación que generalmente será de segundo grado ó bicuadrada.

Resolviéndola con relación á la incógnita auxiliar, la principal queda bajo un radical, y estableciendo las condiciones para que sea real la primera incógnita, se tendrá una desigualdad que determina los límites que por la naturaleza del problema se imponen á la incógnita principal, es decir, su *máximo* y su *mínimo*.

22. Ejemplo 1º *Dividir un número dado* p *en dos partes cuyo producto sea máximo.*

Si una parte es x, la otra es $p-x$; así pues, el producto que lo llamaremos y es:

$$x(p-x)=y$$

despejando á x:

$$x=+\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{2}-y}$$

Deducimos:

1º Las raíces son *reales* (desiguales, de signos iguales) si $\frac{p^2}{4}>y$.
2º Las raíces son aún *reales* (iguales, de signos iguales) si $\frac{p^2}{4}=y$.
3º Las raíces son imaginarias si $\frac{p^2}{4}<y$.

Vemos pues que el máximo valor de y que hace real á x, es $y=\frac{p^2}{4}$ que produce $x=\frac{p}{2}$

Así pues: *Para obtener el producto máximo se divide el número* p *en dos partes iguales, y el máximo que se obtiene es* $\frac{p^2}{4}$ *el cuadrado de la mitad del número.*

N. B.—*Otra solución.* Sea d la diferencia que hay entre las dos partes del número, tenemos:

Como la suma de las partes es p y la diferencia d, la parte mayor será $\frac{p+d}{2}$, la menor $\frac{p-d}{2}$, y según el enunciado del problema:

$$\left(\frac{p+d}{2}\right)\left(\frac{p-d}{2}\right)=y \qquad \frac{p^2-d^2}{4}=y$$

que produce

$$d=\pm\sqrt{p^2-4y}$$

Vemos que para que d sea real debe ser á lo sumo $4y=p^2$ y en este caso $d=0$.

Es decir, que al no haber diferencia las dos partes deben ser iguales.

Ejemplo 2º *Dividir un número* p *en dos partes tales que la suma de las raíces cuadradas de estas dos partes sea máxima.*

Sea x^2 una parte y la otra $p-x^2$; la suma de sus raíces cuadradas que debe ser máxima, es:

$$y=x+\sqrt{p-x^2}$$

Para despejar á x, aplicando los procedimientos del Álgebra Elemental, tenemos:

$$x=\frac{y}{2}\pm\sqrt{\frac{y^2}{4}+\frac{p-y^2}{2}}$$

ó bien:

$$x=\frac{y}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{2p-y^2}$$

Para que los valores de x sean reales, debe tenerse á lo sumo:

$$y^2=2p \qquad \text{ó} \qquad y=\sqrt{2p}$$

luego este valor $\sqrt{2p}$ es el máximo que puede tener y.

Para $y=\sqrt{2p}$, tenemos:

$$x=\frac{\sqrt{2p}}{2}$$

que produce

$$x^2=\frac{p}{2} \qquad \text{y} \qquad p-x^2=\frac{p}{2}$$

Así pues, el número p *debe dividirse en dos partes iguales para que la suma de las raíces cuadradas de estas dos partes sea un máximo.*

En este caso el máximo es $\sqrt{2p}$.

Por ejemplo: $72=36+36$ que da $\sqrt{36}+\sqrt{36}=12$; vemos que es el valor máximo de los que se pueden obtener para la suma de las raíces cuadradas de las dos partes de 72.

En efecto, si descomponemos así á 72: $72=64+8$, se tiene:

$$\sqrt{64}+\sqrt{8}=8+2+\text{una fracción}=10+f$$

Sea aún

$$72=49+23 \qquad \sqrt{49}+\sqrt{23}=7+4+f=11+f$$