Ejemplo 3º Sea

$$\frac{x^2-2x+2}{2x-2}$$

Igualándola á y y despejando á x, se tiene:

$$x=y+1\pm\sqrt{y^2-1}$$

Vemos que á lo sumo, para que sea x real, debemos tener $y=1$ y los valores de $y<1$ hacen á x imaginaria; luego la expresión dada tiene un valor mínimo que es 1, correspondiente á $x=2$.

Si $y=-1$, tenemos $x=0$ y valores de y menores que -1 hacen á x imaginario, así considerando las cantidades negativas que siguen á -1, tenemos que $y=-1$ es un máximo que corresponde á $x=0$.

Ejemplo 4º Dada la expresión

$$\frac{m^2x^2+n^2}{(m^2-n^2)x}$$

averiguar cuando es *mínima* siendo $m>n$.

Tenemos:

$$\frac{m^2x^2+n^2}{(m^2-n^2)x}=y$$

que produce para x el valor que da la ecuación de segundo grado:

$$m^2x^2-(m^2-n^2)yx=-n^2$$

ó sea:

$$x=\frac{(m^2-n^2)}{2m^2}y\pm\frac{1}{2m^2}\sqrt{(m^2-n^2)^2y^2-4m^2n^2}$$

Vemos que á lo sumo para que x sea real debe tenerse

$$(m^2-n^2)^2y^2=4m^2n^2$$

es decir:

$$y=\frac{2mn}{(m^2-n^2)}$$

y como todo valor mayor que éste hace real á x, y todo valor menor lo hace imaginario, resulta que

$$y=\frac{2mn}{m^2-n^2}$$

es el mínimo de los valores que puede recibir la función dada y que corresponde á

$$x=\frac{m^2-n^2}{2m^2}\cdot\frac{2mn}{m^2-n^2}=\frac{n}{m}$$

Ejemplo 5º Buscar entre qué límites puede variar un trinomio de segundo grado

$$mx^2+nx+p$$

Hagamos como antes:

$$mx^2+nx+p=y$$

que produce

$$x=\frac{-n\pm\sqrt{n^2-4mp+4my}}{2m}$$

Como desechamos los valores de y que hacen á x imaginario, sólo tomaremos los que llenen la condición:

$$n^2-4mp+4my>0$$

ó bien:

$$4my>4mp-n^2$$

1º Si m es positivo, dividiendo por $4m$ se tiene:

$$y>\frac{4mp-n^2}{4m}$$

pudiendo la cantidad y tomar valores mayores que $\frac{4mp-n^2}{4m}$, así pues, este valor es un *mínimo*.

2º Si m es negativo, dividiendo por $4m$ tenemos:

$$y<\frac{4mp-n^2}{4m}$$

Como entonces y puede tomar valores menores que $\frac{4mp-n^2}{4m}$ se deduce que $\frac{4mp-n^2}{4m}$ es un *máximo*.

3º Podemos poner el trinomio dado bajo la forma:

$$\left[\left(x+\frac{n}{2m}\right)^2+\frac{4mp-n^2}{4m^2}\right]$$

Si x crece continuamente desde $-\infty$ hasta $+\infty$, el cuadrado $(x+\frac{n}{2m})^2$ que siempre es positivo tiene al principio por valor $+\infty$ y va menguando á medida que x se aproxima á $-\frac{n}{2m}$; es nulo cuando $x=-\frac{n}{2m}$; comienza á aumentar cuando x pasa este valor y es igual al $+\infty$ cuando x tiene también por valor $+\infty$.

La cantidad entre paréntesis

$$\left[\left(x+\frac{n}{2m}\right)^2+\frac{4mp-n^2}{4m^2}\right]$$

que difiere de $(x+\frac{n}{2m})^2$ la cantidad $\frac{4mp-n^2}{4m^2}$, decrece á partir de $+\infty$, llega á su valor *mínimo* que es $\frac{4mp-n^2}{4m^2}$ cuando $(x+\frac{n}{2m})^2=0$, y comienza en seguida á crecer hasta $+\infty$.

En fin, el trinomio dado:

$$m\left[\left(x+\frac{n}{2m}\right)^2+\frac{4mp-n^2}{4m^2}\right]$$

que es la expresión anterior multiplicada por m, sigue las mismas variaciones que dicha expresión ó variaciones contrarias, según que m sea positivo ó negativo.

Es decir, en el primer caso decrece hasta el mínimo

$$m\left(\frac{4mp-n^2}{4m^2}\right)=\frac{4mp-n^2}{4m}$$

para crecer en seguida hasta $+\infty$, y en el segundo crece desde $-\infty$ hasta el *máximo* $\frac{4mp-n^2}{4m}$ para decrecer en seguida hasta $-\infty$.

EJEMPLO 6º Sea

$$\frac{4x^2+4x-3}{6(2x+1)}$$

y busquemos si esta expresión tiene *máximo* ó *mínimo*.

Tenemos:

$$\frac{4x^2+4x-3}{6(2x+1)}=y$$

que produce:

$$x=\frac{3y-1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{9y^2+4}$$

Vemos que cualquier valor de y hace á x real; así pues, y ó sea la expresión propuesta puede pasar por todos los estados de magnitud, es decir, tiene por *máximo* el ∞ y por *mínimo* 0.

* EJEMPLO 7º *Encontrar el triángulo máximo que puede inscribirse en un círculo de radio* r.

Es evidente que los triángulos escalenos que tienen una misma cuerda por base son menores que el triángulo isósceles formado sobre dicha cuerda, pues este último tiene mayor altura.

Llamando x la mitad de la base del triángulo, y su distancia al centro y s la superficie del triángulo, resulta:

$$x(r+y)=s$$

Además:

$$y^2+x^2=r^2$$

de donde deducimos:

$$s^2=x^2(r+y)^2=(r^2-y^2)(r+y)^2=(r-y)(r+y)^3$$

como:

$$(r-y)+(r+y)=2r$$

según el teorema II, será un *máximo* si $\frac{r-y}{1}=\frac{r+y}{3}$, es decir, $y=\frac{r}{2}$; luego:

$$x=\sqrt{r^2-\frac{r^2}{4}}=\frac{r}{2}\sqrt{3}$$

de consiguiente la cuerda $2x=r\sqrt{3}$ que es el lado del triángulo equilátero inscrito en el círculo de radio r.

*EJEMPLO 8º *De todos los paralelipípedos rectángulos de igual superficie, cuál es el de máximo volumen.*

Sean: S, la superficie constante; V, el volumen variable; x, y, z, las dimensiones variables de los paralelipípedos rectángulos considerados.

Se tiene:

$$S=2xz+2yx+2zy$$

es decir:

$$xz+yx+zy=\frac{S}{2}$$

y además:

$$V=xyz \quad \text{ó} \quad V^2=x^2y^2z^2=xyxzyz$$

V^2 ó V es *máximo* cuando los tres factores que lo forman xy, xz, yz, cuya suma es constante $\frac{S}{2}$, son iguales

$$xy=xz=yz$$

de donde

$$y=x=z$$

Entonces para la arista del *cubo cuyo volumen* es el *máximo* pedido, se tiene:

$$3x^2=\frac{S}{2} \quad \text{ó} \quad x=\sqrt{\frac{S}{6}}$$

y el volumen será

$$V=x^3=\frac{S}{6}\sqrt{\frac{S}{6}}$$

*EJEMPLO 9º *De todos los rectángulos inscritos de perímetro igual* 2 p, *cuál es el que girando al derredor de uno de sus lados origina un volumen máximo.*

Sean x, y, las dos dimensiones del rectángulo; V el volumen variable del cilindro engendrado por la rotación del rectángulo al derredor de uno de los lados x ó y.

Si x ó y son pequeños, el volumen engendrado lo será.

Se tienen las ecuaciones:

$$x+y=p \qquad V=\pi x^2 y$$

Como π es constante, la cuestión es buscar el máximo de x^2y sabiendo que la suma de x é y es constante é igual á p.

Según el teorema II, se tendrá:

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{p}{3} \quad \text{ó} \quad x=\frac{2p}{3},\ \ y=\frac{p}{3}$$

y el volumen pedido es:

$$V=\pi\frac{4p^2}{9}\cdot\frac{p}{3}=\frac{1}{9}\cdot\frac{4}{3}\pi p^3$$

*EJEMPLO 10º *Inscribir en una esfera dada cuyo radio es* R, *el cilindro cuyo volumen* V *sea máximo, siendo* x *el radio de su base é* y *su semialtura.*

Se tendrá:

$$V=2\pi x^2 y, \qquad x^2+y^2=R^2$$

Como 2π es constante, buscaremos el *máximo* de x^2y, al que en ese instante llegará también

$$(x^2y)^2=x^4y^2=(x^2)^2y^2$$

Siendo la suma x^2+y^2 constante é igual á R^2, se tendrá:

$$\frac{x^2}{2}=\frac{y^2}{1}=\frac{R^2}{3}$$

de donde:

$$x=R\sqrt{\frac{2}{3}},\ \ y=R\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{R\sqrt{3}}{3}$$

es decir:

$$2y=\frac{2}{3}R\sqrt{3}$$

luego la altura del cilindro inscrito *máximo* es los $\frac{2}{3}$ del lado del triángulo equilátero inscrito en una circunferencia de círculo *máximo* de la esfera propuesta y el volumen será:

$$V=2\pi\frac{2}{3}R^2\frac{R\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3$$