CAPÍTULO III.

LIGERO ANÁLISIS SOBRE LOS RADICALES.

VALORES MÚLTIPLES DE UN RADICAL.

23. Si se propone $\sqrt{-A}$ y a es la raíz positiva de A, se puede poner $\sqrt{-A}=ay$, determinando á y de tal naturaleza que $(ay)^2=a^2y^2=-A$, y como quiera que A es cuadrado de a, la precedente relación se transforma en

$$Ay^2=-A$$

ó bien

$$y^2=-1$$

es decir:

$$y=\pm\sqrt{-1}$$

luego

$$\sqrt{-A}=\pm a\sqrt{-1}$$

así pues, para determinar los valores de $\sqrt{-A}$ es preciso multiplicar el valor absoluto de su raíz por los valores de y.

Este valor a es la *determinación aritmética* de $\sqrt{-A}$; $\pm a\sqrt{-1}$ son las *determinaciones algebraicas.*

Las *determinaciones aritméticas* son esencialmente reales y positivas, no así las *algebraicas* que comprenden los valores negativos é imaginarios que deben su existencia á la combinación de los signos del álgebra.

Por otra parte, tales denominaciones convienen perfectamente á las ideas que están destinadas á expresar.

En general un radical designa indistintamente todos los valores que reproducen la cantidad colocada bajo de él, cuando se los eleva á la potencia marcada por el índice.

Inferimos que un radical tiene una sola determinación aritmética, y esto si la cantidad bajo el radical es real y positiva.

Consideremos varios casos presentados por un radical $\sqrt[m]{A}$.

24. I. *A positiva.* Por aproximación ó en general por métodos conocidos se determina a cantidad positiva cuya potencia m^{ma} es A. Otra cantidad diversa de a producirá un resultado $>$ ó $<$ A; de suerte que a es la *determinación aritmética* de A y sólo puede haber de esta especie.

II. *A negativa.* No hay *determinación aritmética* sino sólo *algebraicas.*

III. *A imaginaria.* Como las potencias de cantidades reales positivas ó negativas producen magnitudes reales, las determinaciones son todas algebraicas é imaginarias.

Ademas de esto:

1º Si m es par, todos los valores del radical serán iguales y de signos contrarios.

Si a es uno de ellos, de tal suerte que $a^m=A$, $-a$ también será valor del radical, puesto que $(-a)^m=A$.

Así pues, los valores del radical son una sucesión de magnitudes de signo $\pm$ como $\pm a, \pm b, \pm c$......

Si siendo m par, A es positiva, el radical tiene un solo valor real positivo a y vemos que $-a$ es también valor real, pero negativo, del radical.

En cuanto á $\pm b, \pm c$...... serán imaginarios.

2º Si m es impar, cambiando el signo de A, los m valores del radical cambiarán de signo.

Si a es un valor de $\sqrt[m]{A}$ siendo m impar, debe tenerse:

$$(-a)^m=-a^m=-A$$

Suponiendo que a, b, c...... sean los valores de $\sqrt[m]{+A}$; $-a, -b, -c$...... serán los de $\sqrt[m]{-A}$.

Si A es real, uno de los m valores del radical es real y del signo de A; es decir, positivo si A lo es, negativo si lo es A; los demás son esencialmente imaginarios.

25. Teorema. *Un radical tiene tantos valores diversos como unidades su índice, ó una cantidad tantas raíces de grado* m *como hay unidades en su índice* m.

Conocida esta propiedad para la raíz cuadrada, tomemos un radical $\sqrt[3]{A}$, llamando x su valor absoluto.

El número de raíces que tenga es el de raíces que admite la ecuación:

$$x^3-A=0$$

Para fijar las ideas, supongamos A positivo y sea a la cantidad calculada exactamente ó por aproximación, cuyo cubo es A; tendremos:

$$x^3-a^3=0$$

pero

$$x^3-a^3=(x-a)(x^2+ax+a^2)$$

cuyas raíces son

$$x=a, \qquad x=a\left(\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}\right)$$

éstas serán las tres raíces cúbicas de A entre las que, como debía esperarse, está a.

Como $\sqrt[12]{A}=\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{A}}}$, da doce raíces y cada una es de valor de $\sqrt[12]{A}$.

Sea a una de las raíces cuadradas de A, a' una de las raíces cuadradas de a, a'' una de las raíces cúbicas de a', y vamos á demostrar que a'' es una de las doce raíces de que se trata.

En efecto:

$$a''^3 = a', \qquad a''^6 = a'^2, \qquad a''^{12} = a^2 = \mathrm{A},$$

luego queda demostrado.

En general el radical m admite m valores; es decir, indica m cantidades reales ó imaginarias que elevadas á m producen la cantidad bajo el radical; son pues, las raíces de la ecuación:

$$x^m = \mathrm{A}$$

Esta conclusión que quizá parezca haberse generalizado algo empíricamente, recibirá su demostración absoluta en el Capítulo que estudia las ecuaciones binomias.

Aplicación. Si a es un valor de $\sqrt[3]{\mathrm{A}}$, se han obtenido para valores del radical

$$a, \quad a\left(\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}\right)$$

Supongamos $\mathrm{A} = 1$ y los valores anteriores serán:

$$1, \quad \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

correspondientes al radical $\sqrt[3]{1}$ y que son las *tres raíces cúbicas de la unidad positiva.* Así pues, las tres raíces cúbicas de una cantidad se obtienen multiplicando su determinación absoluta por las tres raíces cúbicas de la unidad.

Esta proposición es general, porque sea a un valor de $\sqrt[m]{\mathrm{A}}$; $1, \alpha, \beta, \gamma \ldots\ldots$ los m valores *emésimos* de $\sqrt[m]{1}$; formando los productos $a1, a\alpha, a\beta, a\gamma \ldots\ldots$; elevando á la potencia m, se tendrán todos ellos iguales á A, puesto que $a^m = \mathrm{A}$, $\alpha^m = 1$, $\beta^m = 1 \ldots\ldots$ y en cada orden, multiplicando una de las raíces de la cantidad por las m raíces m^{as} de la unidad, se forman las raíces de la cantidad.

Aplicando esta conclusión á la unidad, inferimos: que *las diversas raíces de la unidad se producen en orden diferente, multiplicando cada una por todas estas raíces.*

(N. B.—Las dos raíces cúbicas imaginarias de la unidad son una de ellas cuadrado de la otra.)

26. Admiten algunos matemáticos para indicar por ejemplo el único valor absoluto de la raíz de una cantidad, escribir el radical así: $\sqrt[m]{\mathrm{A}}$ y para indicar todos los valores $\sqrt[m]{\overline{\overline{\mathrm{A}}}}$; luego se tendrá:

$$\sqrt{\overline{\overline{\mathrm{A}}}} = \pm\sqrt{\mathrm{A}},$$

Si $\mathrm{A} = 4$,

$$\sqrt{\overline{\overline{\mathrm{A}}}} = \pm 2,$$

Así

$$\sqrt[m]{\overline{\overline{\mathrm{A}}}} = \sqrt[m]{\mathrm{A}}\sqrt{\overline{\overline{1}}}$$

27. Asimismo

$$\sqrt[m]{\overline{\overline{\mathrm{A}^n}}} = \mathrm{A}^{\overline{\overline{\frac{n}{m}}}}, \quad \sqrt[m]{\mathrm{A}^n} = \mathrm{A}^{\frac{n}{m}}$$

Si $m = 2$,

$$\sqrt{\overline{\overline{\mathrm{A}^n}}} = \mathrm{A}^{\overline{\overline{\frac{n}{2}}}} = \pm \mathrm{A}^{\frac{n}{2}}$$

28. Nota.—Como en general las propiedades comunes del cálculo de los radicales se estudian en los cursos elementales, con las anteriores nociones creemos haber indicado lo suficiente sobre una cuestión que seguiremos aplicando.

EXPRESIONES DE LA FORMA

$$\sqrt{\mathrm{A} \pm \sqrt{\mathrm{B}}} \qquad \text{y} \qquad \sqrt{\mathrm{A} \pm \mathrm{B}\sqrt{-1}}$$

29. Si sujetamos dos cantidades x é y á verificar la condición de ser racionales, y tratamos de descomponer la expresión $\sqrt{\mathrm{A} \pm \sqrt{\mathrm{B}}}$ en una suma ó diferencia de dos radicales simples de segundo grado, se tendrá:

$$\sqrt{\mathrm{A} + \sqrt{\mathrm{B}}} = \sqrt{x} + \sqrt{y} \tag{26}$$

Conviniendo en que las cantidades encerradas en ambos miembros sean positivas, podemos elevar al cuadrado, con lo que se tendrá:

$$\mathrm{A} + \sqrt{\mathrm{B}} = x + 2\sqrt{xy} + y \tag{27}$$

es decir

$$\mathrm{A} - x - y + \sqrt{\mathrm{B}} = 2\sqrt{xy} \tag{27'}$$

elevando nuevamente al cuadrado, resulta:

$$(\mathrm{A} - x - y)^2 + 2(\mathrm{A} - x - y)\sqrt{\mathrm{B}} + \mathrm{B} = 4xy$$

Siendo racional, por hipótesis, el segundo miembro, lo mismo debe suceder al primero; para esto el término en que entra $\sqrt{\mathrm{B}}$ debe desaparecer; de consiguiente el coeficiente $\mathrm{A} - x - y$ debe ser nulo; luego

$$\mathrm{A} - x - y = 0$$

ó bien

$$x + y = \mathrm{A} \tag{28}$$

De la ecuación (27′) deduciremos:

$$\mathrm{B} = 4xy \quad \text{ó} \quad xy = \frac{\mathrm{B}}{4} \tag{29}$$

Conocida la suma A y el producto $\frac{\mathrm{B}}{4}$ de las cantidades x é y, serán las raíces de una ecuación de segundo grado

$$z^2 - \mathrm{A}z + \frac{\mathrm{B}}{4} = 0$$

que da

$$z = \frac{\mathrm{A} \pm \sqrt{\mathrm{A}^2 - \mathrm{B}}}{2}$$

para que la transformación que venimos explicando tenga utilidad práctica, x é y deben ser racionales, y para esto se necesita que $\mathrm{A}^2 - \mathrm{B}$ sea cuadrado perfecto.

Supongamos

$$\sqrt{\mathrm{A}^2 - \mathrm{B}} = \sqrt{\mathrm{C}^2} = \mathrm{C}$$

y se tendrá para valores de x é y

$$x = \frac{\mathrm{A} + \mathrm{C}}{2}, \qquad y = \frac{\mathrm{A} - \mathrm{C}}{2}$$

luego

$$\sqrt{\mathrm{A} + \sqrt{\mathrm{B}}} = \sqrt{\frac{\mathrm{A} + \mathrm{C}}{2}} + \sqrt{\frac{\mathrm{A} - \mathrm{C}}{2}} \tag{30}$$

30. Si la expresión propuesta es

$$\sqrt{A-\sqrt{B}}$$

se tendrá:

$$\sqrt{A-\sqrt{B}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$$

Suponiendo $x>y$, razonamientos semejantes á los anteriores conducen á la fórmula

$$\sqrt{A-\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+C}{2}}-\sqrt{\frac{A-C}{2}} \qquad (31)$$

Cambiando á la vez los signos de las ecuaciones (30) y (31), se obtiene:

$$-\sqrt{A+\sqrt{B}}=-\sqrt{\frac{A+C}{2}}-\sqrt{\frac{A-C}{2}} \qquad (32)$$

$$-\sqrt{A-\sqrt{B}}=-\sqrt{\frac{A+C}{2}}+\sqrt{\frac{A-C}{2}} \qquad (33)$$

Así pues, las fórmulas (30), (31), (32) y (33) están comprendidas en la general

$$\pm\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\pm\left(\sqrt{\frac{A+C}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-C}{2}}\right) \qquad (34)$$

tomando en esta ecuación los mismos signos *exteriores* en ambos miembros así como los *interiores*.

31. N. B.—La ecuación

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$$

basta para determinar x é y, puesto que la condición de racionalidad impuesta á estas incógnitas constituye implícitamente una segunda ecuación.

EJEMPLOS.

32. I. Sea

$$\sqrt{5+\sqrt{21}}$$

en la que se tiene

$$A=5, \quad B=21, \quad A^2-B=4, \quad C=2.$$

Resuelta da:

$$+\sqrt{5+\sqrt{21}}=\sqrt{\frac{5+2}{2}}+\sqrt{\frac{5-2}{2}}=\sqrt{3{,}5}+\sqrt{1{,}5}$$

II. Sea

$$\sqrt{94\pm\sqrt{8820}}$$

en la que

$$A=94, \quad B=8820, \quad A^2-B=16, \quad C=4,$$

se tiene

$$\sqrt{94+\sqrt{8820}}=\pm(7+3\sqrt{5})$$
$$\sqrt{94-\sqrt{8820}}=\pm(7-3\sqrt{5})$$

III. Sea

$$x=\pm\sqrt{bc+2a^2\pm2a\sqrt{bc+a^2}}$$

en la que

$$A=bc+2a^2, \quad B=4a^2bc+4a^4, \quad A^2-B=b^2c^2$$

De donde

$$C=bc$$

y por consiguiente

$$x=\pm(\sqrt{bc+a^2})\pm a$$

IV. Sean como aplicaciones:

(a) $\sqrt{3\pm\sqrt{5}}=\pm[\tfrac{1}{2}\sqrt{10}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{2}]$

(b) $\sqrt{bc+2b\sqrt{bc-b^2}}+\sqrt{bc-2b\sqrt{bc-b^2}}=\pm2b$

(c) (1) $\sqrt{1\pm4\sqrt{-3}}=\pm[2\pm\sqrt{-3}]$

(d) $\sqrt{16+30\sqrt{-1}}+\sqrt{16-30\sqrt{-1}}=10$

(e) $\sqrt{16+30\sqrt{-1}}-\sqrt{16-30\sqrt{-1}}=6\sqrt{-1}$

V. Sea la ecuación bicuadrada

$$ax^4+bx^2+c=0$$

Se trata de buscar la condición para que la transformación explicada pueda aplicarse á sus raíces.

De la ecuación se deduce:

$$x=\pm\sqrt{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}=\pm\sqrt{-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}}$$

lo que da

$$A=-\frac{b}{2a}, \qquad B=\frac{b^2-4ac}{4a^2};$$

luego

$$A^2-B=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

La condición es que $\frac{c}{a}$ sea cuadrado perfecto.

Sea por ejemplo:

$$x^4-8x^2+9=0$$

en la que como 9 es cuadrado perfecto, puede aplicarse la transformación; se tiene:

$$x=\pm\sqrt{4\pm\sqrt{16-9}}=\pm\sqrt{4\pm\sqrt{7}}$$

luego

$$A=4, \quad B=7, \quad A^2-B=9, \quad C=3.$$

Así pues:

$$x=\pm\left(\sqrt{\frac{7}{2}}\pm\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$$

33. N. B.—I. Cuando A^2-B no es cuadrado perfecto, como las expresiones comparadas antes son equivalentes, puede decirse que la transformación es *posible;* pero de ninguna utilidad, pues reemplaza la expresión propuesta por otra más complicada.

(1) Los ejemplos (c), (d), (e), que el párrafo 35 trata, vemos que se obtienen sin dificultad por el método expuesto.

34. II. La fórmula

$$\pm\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\pm\left(\sqrt{\frac{A+C}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-C}{2}}\right)$$

puede verificarse *a posteriori* elevando sus dos miembros al cuadrado, lo que produce:

$$A\pm\sqrt{B}=\frac{A+C}{2}+\frac{A-C}{2}\pm2\sqrt{\frac{A^2-C^2}{4}}=A\pm\sqrt{B}$$

EXPRESIONES DE LA FORMA

$$\sqrt{A+B\sqrt{-1}}$$

35. Sabemos que las expresiones imaginarias deben tratarse por las reglas mismas que se aplican á las reales, debiendo considerarse el cuadrado de $\sqrt{-1}=i$, ó bien i^2 como igual á -1.

Se podrá escribir con la condición de que x é y sean reales:

$$\sqrt{A+Bi}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$$

y aplicando los anteriores razonamientos se tendrán los valores:

$$x=\frac{A+\sqrt{A^2+B^2}}{2},\qquad y=\frac{A-\sqrt{A^2+B^2}}{2}$$

el de x es positivo, el de y negativo; se tendrá:

$$\pm\sqrt{A\pm B\sqrt{-1}}=\pm\left(\sqrt{\frac{A+C}{2}}\pm\sqrt{\frac{C-A}{2}}\sqrt{-1}\right)$$

Representando $\sqrt{A^2+B^2}$ por C; así pues, en general

$$\pm\sqrt{A\pm B\sqrt{-1}}=\pm[a\pm b\sqrt{-1}] \tag{35}$$

Suponiendo

$$x=a^2,\qquad y=-b^2 \tag{36}$$

EJEMPLOS.

36. I. Simplificar, si se puede, la expresión

$$x=\sqrt{3+2\sqrt{-1}}+\sqrt{3-2\sqrt{-1}}$$

se tendrá:

$$\sqrt{3+2\sqrt{-1}}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{13}+3}{2}}+\sqrt{\frac{\sqrt{13}-3}{2}}\sqrt{-1}\right)$$

$$\sqrt{3-2\sqrt{-1}}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{13}+3}{2}}-\sqrt{\frac{\sqrt{13}-3}{2}}\sqrt{-1}\right)$$

sumando y observando que x representa la suma aritmética de los radicales

$$x=\sqrt{3+2\sqrt{-1}}+\sqrt{3-2\sqrt{-1}}=\pm2\sqrt{\frac{\sqrt{13}+3}{2}}=\pm\sqrt{2(\sqrt{13}+3)}$$

37. Este ejemplo, lo mismo que uno de los anteriores, enseña que ciertas *expresiones imaginarias* pueden conducir á resultados reales racionales.

RAÍZ CÚBICA DE UN BINOMIO IRRACIONAL.

38. Siendo a y b dos números positivos ó negativos, pero racionales, la raíz cúbica del binomio imaginario ó irracional $a\pm\sqrt{b}$ cuando se pueda obtener, debe ser de la forma $y\pm\sqrt{z}$, ó más generalmente $(y\pm\sqrt{z})\sqrt[3]{h}$, en que y y z representan dos números racionales y h una cantidad indeterminada; y la razón es que sólo dicha forma puede admitir un cubo que pueda reducirse á dos términos, uno racional y el otro irracional ó imaginario y que puede así igualarse al binomio propuesto $a\pm\sqrt{b}$.

Supongamos pues

$$\sqrt[3]{a\pm\sqrt{b}}=(y\pm\sqrt{z})\sqrt[3]{h} \tag{37}$$

y busquemos cuáles valores de y y z satisfacen esta relación.

Elevándola al cubo resulta:

$$a\pm\sqrt{b}=(y^3\pm3y^2\sqrt{z}+3yz\pm z\sqrt{z})h$$

y como deben ser respectivamente iguales entre sí, los términos racionales y los inconmensurables ó los imaginarios, se obtendrán las dos fórmulas:

$$a=h(y^3+3yz);\qquad \sqrt{b}=h(3y^2+z)\sqrt{z}$$

Elevando al cuadrado estas relaciones y restando después una de otra, se tiene:

$$a^2-b=h^2(y^6-3y^4z+3y^2z^2-z^3)=h^2(y^2-z)^3$$

que produce

$$y^2-z=\sqrt[3]{\frac{a^2-b}{h^2}}$$

y como puede escogerse la indeterminada h de tal manera que $\frac{a^2-b}{h^2}$ sea cubo perfecto, se tendrá:

$$y^2-z=K,\qquad z=y^2-K$$

que sustituído en

$$a=h(y^3+3yz)$$

produce

$$a=4hy^3-3hKy$$

ó sea la ecuación incompleta de tercer grado

$$y^3-\frac{3Ky}{4}-\frac{a}{4h}=0 \tag{38}$$

que debe por lo menos tener necesariamente una raíz racional á fin de que y y z sean dos números conmensurables, y porque subsistiendo así la fórmula (37) se pueda extraer exactamente la raíz cúbica del binomio $a\pm\sqrt{b}$.

Se averigua pues, para los casos particulares, si la ecuación (38) admite alguna raíz racional y, y hallada se encontrará asimismo el valor conmensurable $z=y^2-K$. Con estos valores podrá conocerse la raíz cúbica $(y\pm z)\sqrt[3]{h}$ del binomio propuesto $a\pm\sqrt{b}$.

N. B.—Para conocer el signo que debe de tener el radical $\sqrt{z}$ confrontado con el binomio $a \pm \sqrt{b}$, deberá elevarse á la tercera potencia $(y \pm \sqrt{z})\sqrt[3]{h}$.

EJEMPLOS.

39. Sean los binomios $7 \pm 5\sqrt{2}$, $-7 \pm \sqrt{-2}$ (1) cuya raíz cúbica se busca.

Para el primer binomio se tiene:

$$a = 7, \qquad \sqrt{b} = 5\sqrt{2}, \qquad a^2 - b = -1$$

luego

$$\frac{a^2 - b}{h^2}$$

será un cubo perfecto, tomando $h = 1$; lo que dará:

$$K = \sqrt[3]{\frac{a^2 - b}{h^2}} = -1$$

La ecuación (38) será en nuestro caso

$$y^3 + \tfrac{3}{4}y - \tfrac{7}{4} = 0$$

y admite, como es fácil verificarlo, una raíz racional igual á 1 (2); el valor $y = 1$ conduce á $z = y^2 - K = 2$, y la raíz cúbica de $7 \pm 5\sqrt{2}$, será:

$$(y \pm \sqrt{z})\sqrt[3]{h} = 1 \pm \sqrt{2}$$

40. En cuanto al segundo binomio: $-5 \pm \sqrt{-2}$, se tendrá:

$$a = -5, \qquad \sqrt{b} = \sqrt{-2}, \qquad a^2 - b = 27$$

y suponiendo

$$h = 1, \qquad K = \sqrt[3]{\frac{a^2 - b}{h^2}} = 3$$

La ecuación (38) será:

$$y^3 - \tfrac{9}{4}y + \tfrac{5}{4} = 0$$

que admite el valor racional $y = 1$, el cual produce:

$$z = y^2 - K = -2,$$

luego

$$(y \pm \sqrt{z})\sqrt[3]{h} = 1 \pm \sqrt{-2}$$

(1) Véase Capítulo XVI, ecuaciones de 3.º y 4.º grados, Parte II.

(2) En el Capítulo XVI, ecuaciones de 3.º y 4.º grados, se explica el modo de determinar sus raíces; por ahora sólo nos conformamos con verificar que 1 es raíz.

CAPÍTULO IV.

ANÁLISIS COMBINATORIO.

Ordenaciones, permutaciones y combinaciones.—Fórmula del binomio de Newton.—Elevación á potencias y extracción de raíces de los polinomios.—Aplicaciones.—Triángulo aritmético de Pascal.—Números figurados.—Aplicaciones.—Suma de las Pilas de Balas.

41.—Para formar la potencia de un binomio, debemos antes entrar en detalles respecto á una cuestión que tiene numerosas aplicaciones y pasamos á estudiar: la teoría del análisis combinatorio.

42. **Ordenaciones.** Supongamos varias letras, objetos ó elementos: a, b, c......... si las tomamos de dos en dos, de todas las maneras posibles, de suerte que cada grupo de dos letras difiera de los otros, ya por las letras que lo componen, ya por el orden en que se hallan escritas, formaremos las *ordenaciones dos á dos* de las letras dadas.

Esta explicación hace comprender el significado de *ordenaciones tres á tres, cuatro á cuatro*, etc.

43. **Combinaciones.** Cuando entre las ordenaciones n á n sólo se conservan las que difieran entre sí por una ó varias letras, los agrupamientos obtenidos así se denominan *productos ó combinaciones*, por ejemplo ab y ba; abc, cba, cab, etc., no forman respectivamente sino una sola combinación.

44. **Permutaciones.** Después de haber colocado varias letras unas al lado de otras, si cambian de orden de todos los modos posibles, se obtendrán sus *permutaciones*.

45. Definidas estas tres disposiciones, se presenta naturalmente este problema:

Dados m *objetos ó elementos:* a, b, c......... *hallar el número de sus ordenaciones y combinaciones* n *á* n *y el de sus permutaciones.*

En cuanto á las ordenaciones se procederá así:

Si al lado de la primera letra a, de las m dadas: a, b, c......... se colocan las restantes en número de $m-1$, se obtienen $(m-1)$ resultados:

$$ab,\ ac,\ ad,\ ae,\ af,\ \ldots\ldots\ldots$$

Si á continuación de b colocamos las $(m-1)$ letras restantes, se obtienen $(m-1)$ resultados:

$$ba,\ bc,\ bd,\ be,\ bf,\ \ldots\ldots\ldots$$