N. B.—Para conocer el signo que debe de tener el radical $\sqrt{z}$ confrontado con el binomio $a \pm \sqrt{b}$, deberá elevarse á la tercera potencia $(y \pm \sqrt{z})\sqrt[3]{h}$.

EJEMPLOS.

39. Sean los binomios $7 \pm 5\sqrt{2}$, $-7 \pm \sqrt{-2}$ (1) cuya raíz cúbica se busca.

Para el primer binomio se tiene:

$$a=7, \qquad \sqrt{b}=5\sqrt{2}, \qquad a^2-b=-1$$

luego

$$\frac{a^2-b}{h^2}$$

será un cubo perfecto, tomando $h=1$; lo que dará:

$$K=\sqrt[3]{\frac{a^2-b}{h^2}}=-1$$

La ecuación (38) será en nuestro caso

$$y^3+\tfrac{3}{4}y-\tfrac{7}{4}=0$$

y admite, como es fácil verificarlo, una raíz racional igual á 1 (2); el valor $y=1$ conduce á $z=y^2-K=2$, y la raíz cúbica de $7 \pm 5\sqrt{2}$, será:

$$(y \pm \sqrt{z})\sqrt[3]{h}=1 \pm \sqrt{2}$$

40. En cuanto al segundo binomio: $-5 \pm \sqrt{-2}$, se tendrá:

$$a=-5, \qquad \sqrt{b}=\sqrt{-2}, \qquad a^2-b=27$$

y suponiendo

$$h=1, \qquad K=\sqrt[3]{\frac{a^2-b}{h^2}}=3$$

La ecuación (38) será:

$$y^3-\tfrac{9}{4}y+\tfrac{5}{4}=0$$

que admite el valor racional $y=1$, el cual produce:

$$z=y^2-K=-2,$$

luego

$$(y \pm \sqrt{z})\sqrt[3]{h}=1 \pm \sqrt{-2}$$

(1) Véase Capítulo XVI, ecuaciones de 3º y 4º grados, Parte II.

(2) En el Capítulo XVI, ecuaciones de 3º y 4º grados, se explica el modo de determinar sus raíces; por ahora sólo nos conformamos con verificar que 1 es raíz.

CAPÍTULO IV.

ANÁLISIS COMBINATORIO.

Ordenaciones, permutaciones y combinaciones.—Fórmula del binomio de Newton.—Elevación á potencias y extracción de raíces de los polinomios.—Aplicaciones.—Triángulo aritmético de Pascal.—Números figurados.—Aplicaciones.—Suma de las Pilas de Balas.

41.—Para formar la potencia de un binomio, debemos antes entrar en detalles respecto á una cuestión que tiene numerosas aplicaciones y pasamos á estudiar: la teoría del análisis combinatorio.

42. **Ordenaciones.** Supongamos varias letras, objetos ó elementos: a, b, c......... si las tomamos de dos en dos, de todas las maneras posibles, de suerte que cada grupo de dos letras difiera de los otros, ya por las letras que lo componen, ya por el orden en que se hallan escritas, formaremos las *ordenaciones dos á dos* de las letras dadas.

Esta explicación hace comprender el significado de *ordenaciones tres á tres, cuatro á cuatro*, etc.

43. **Combinaciones.** Cuando entre las ordenaciones n á n sólo se conservan las que difieran entre sí por una ó varias letras, los agrupamientos obtenidos así se denominan *productos ó combinaciones*, por ejemplo ab y ba; abc, cba, cab, etc., no forman respectivamente sino una sola combinación.

44. **Permutaciones.** Después de haber colocado varias letras unas al lado de otras, si cambian de orden de todos los modos posibles, se obtendrán sus *permutaciones*.

45. Definidas estas tres disposiciones, se presenta naturalmente este problema:

Dados m *objetos ó elementos:* a, b, c......... *hallar el número de sus ordenaciones y combinaciones* n *á* n *y el de sus permutaciones.*

En cuanto á las ordenaciones se procederá así:

Si al lado de la primera letra a, de las m dadas: a, b, c......... se colocan las restantes en número de $m-1$, se obtienen $(m-1)$ resultados:

$$ab, ac, ad, ae, af, \ldots\ldots\ldots$$

Si á continuación de b colocamos las $(m-1)$ letras restantes, se obtienen $(m-1)$ resultados:

$$ba, bc, bd, be, bf, \ldots\ldots\ldots$$

Haciendo lo mismo con c, d, e, f......... tendremos $(m-1)$ resultados, proviniendo de cada letra, pero como son m letras, serán $m(m-1)$ resultados.

Designando por O_2^m el número de ordenaciones de m cantidades *dos á dos:*

$$O_2^m = m(m-1) \tag{39}$$

Si á continuación de los resultados binarios se van colocando las $m-2$ letras que no entran en ellos, se tendrá:

$$O_3^m = m(m-1)(m-2)$$

Análogamente:

$$O_4^m = m(m-1)(m-2)(m-3)$$

Finalmente:

$$O_n^m = m(m-1)(m-2) \ldots\ldots [m-(n-1)] \tag{40}$$

Suponiendo

$$n = 2, 3, 4, \ldots\ldots\ldots$$

se determinan

$$O_2^m, O_3^m, O_4^m, \ldots\ldots\ldots$$

46. Puede resolverse este problema de otro modo, por un procedimiento inverso. Supongamos ya formado el número de ordenaciones de m objetos $n-1$ á $n-1$, es decir, O_{n-1}^m.

Cada una de estas ordenaciones puesta delante de cada uno de los objetos que restan en número de $m-(n-1)$, constituye otras tantas ordenaciones n á n diversas entre sí, ya por el último objeto, ya por los primeros $n-1$ objetos que corresponden á las ordenaciones un grado menores y que son, en todo ó en parte, diversos ó diversamente colocados, de donde se concluirá que el número total de ordenaciones de m objetos n á n será:

$$[m-(n-1)]\, O_{n-1}^m = O_n^m$$

Sustituyendo por n: $n-1, n-2, n-3, \ldots\ldots, 2$, resultará:

$$O_{n-1}^m = O_{n-2}^m (m-n+2)$$
$$O_{n-2}^m = O_{n-3}^m (m-n+3)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$O_2^m = O_1^m (m-1) = m(m-1)$$

que sustituidas unas en otras dan:

$$O_n^m = m(m-1) \ldots\ldots\ldots (m-n+2)(m-n+1)$$

que es la hallada por el método anterior.

Suponiendo $m=n$, el último factor es 1, el penúltimo 2, el antepenúltimo 3, etc., luego:

$$O_m^m = m(m-1) \ldots\ldots\ldots 3.2.1$$

ó bien:

$$O_m^m = 1.2.3 \ldots\ldots\ldots m$$

Pero el número de ordenaciones de m objetos m á m, definimos que es el número de sus permutaciones; luego:

$$P_m = 1.2.3 \ldots\ldots\ldots (m-1)\, m = \underline{|m} = m! \tag{41}$$

47. Los modernos analistas llaman á este producto *factorial* y lo representan (franceses, italianos etc.) así: $m!$ ó bien (ingleses, americanos, etc.) así: $\underline{|m}$, que se lee factorial de m. *Vandermonde* llama en general factorial á un producto limitado de factores en progresión ~~geométrica~~. aritmética.

48. Puede hallarse esta fórmula (41) como sigue: con dos letras sólo pueden formarse dos permutaciones; con tres, colocando después de cada letra las permutaciones de las otras dos, se forman 2.3, etc.; con m letras: 1.2.3......... m.

49. Recordando lo que son combinaciones, deducimos que como sólo deben tomarse en cuenta los resultados que difieran entre sí por una ó varias letras, entre las ordenaciones de m letras n á n, es claro que cada combinación de n letras debe estar repetida tantas veces cuantas *permutaciones* posibles hay entre las n letras de este resultado. Luego dividiendo el número total de ordenaciones de m letras n á n, entre el de permutaciones, el número de combinaciones será llamándolo C_n^m:

$$C_n^m = \frac{O_n^m}{P_n} = \frac{m(m-1) \ldots\ldots [m-(n-1)]}{1.2.3 \ldots\ldots n} \tag{42}$$

suponiendo $n=2, 3, 4, \ldots\ldots$ se determinarán:

$$C_2^m, \quad C_3^m, \quad C_4^m \ldots\ldots\ldots$$

que valen:

$$C_2^m = \frac{m(m-1)}{1.2}$$
$$C_3^m = \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}$$
$$C_4^m = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si

$$n=1, \quad C_1^m = m$$

En efecto, el número de combinaciones de m letras una á una, es el de letras.

50. Notas. 1ª Siendo esencialmente entero el número de combinaciones que pueden hacerse con cierto número de letras, la división indicada en la fórmula (42) es exacta. Luego *un producto de* n *números enteros es siempre divisible por los* n *primeros números enteros.*

2ª Multiplicando por

$$(m-n) \ldots\ldots\ldots 3.2.1$$

los dos términos de (42), se obtiene una fórmula equivalente respecto al número de combinaciones de m objetos n á n y que es:

$$C_n^m = \frac{1.2.3 \ldots\ldots (m-1)\, m}{1.2.3 \ldots\ldots n \times 1.2.3 \ldots\ldots (m-n)} = \frac{m!}{n!\,(m-n)!} \tag{43}$$

Esta fórmula manifiesta que el número de combinaciones de m objetos n á n es igual al número de combinaciones de m objetos $m-n$ á $m-n$, pues si en la misma fórmula se sustituye $m-n$ en lugar de n, da:

$$C_{m-n}^m = \frac{1.2.3 \ldots\ldots m}{1.2.3 \ldots\ldots (m-n) \times 1.2.3 \ldots\ldots n}$$

idéntica á la hallada para C_n^m.

3ª El simbolo C_n^m suele designarse por los modernos así:

$$\binom{m}{n}$$

y se lee m sobre n.

4ª De la *nota 2ª* deducimos que cuando el número n de letras que forman cada combinación pase de la mitad de m, en vez de calcular C_n^m hallaremos C_{m-n}^m.

Si queremos, por ejemplo, saber *¿cuántas combinaciones pueden formarse con 10 cantidades tomadas 8 á 8?* hallaremos el número de sus combinaciones 2 á 2 y obtendremos:

$$\frac{10.9}{1.2}=45$$

Suponiendo en la fórmula general:

$$m=10 \qquad n=8$$

resultará:

$$\frac{10.9.8.7.6.5.4.3}{1.2.3.4.5.6.7.8}=\frac{10.9}{1.2}=45$$

igual al número anterior.

51. **Ordenaciones, permutaciones y combinaciones con repetición de los objetos considerados, supuestos diversos.** I. Hasta ahora hemos supuesto que los objetos considerados no podían repetirse en los agrupamientos formados.

Admitiendo esta repetición, el número de agrupamientos aumentará evidentemente, pues tratándose por ejemplo de tres letras a, b, c, es preciso añadir á los agrupamientos:

$$ab,\ ac,\ ba,\ bc,\ ca,\ cb$$

los siguientes:

$$aa,\ bb,\ cc$$

Para determinar el número total de ordenaciones en este caso, supongamos conocido el número OR_{n-1}^m de ordenaciones con repetición de m cantidades, $n-1$ á $n-1$. Si escribimos á continuación de estas ordenaciones $n-1$ á $n-1$, las m letras dadas, se tendrá el número de ordenaciones n á n.

Todas las ordenaciones se obtendrán porque empiezan todas por una cierta ordenación $n-1$ á $n-1$. Todas serán distintas, pues difieren por la última letra ó por la ordenación $n-1$ á $n-1$ que las ha originado.

Puede, pues, escribirse:

$$(OR)_n^m=(OR)_{n-1}^m \times m$$

haciendo

$$n=2,\ 3,\ 4,\ \ldots\ldots,\ n$$

Sustituyendo unas en otras las ecuaciones obtenidas, y notando que $(OR)_1^m=m$, resulta:

$$(OR)_n^m=m^n \qquad (44)$$

52. II. Evidentemente se tendrá para el número de *permutaciones con repetición:*

$$(PR)^m=m^m \qquad (45)$$

53. III. Si se pide el número de combinaciones con repetición de m letras tomadas n á n, este número será mayor que el de combinaciones de m letras n á n.

Sean cuatro letras a, b, c, d. Sus combinaciones de tres en tres, sin repetición, son cuatro:

$$abc,\ abd,\ acd,\ bcd;$$

Pero tratándose de combinaciones con repetición, añadiremos á las anteriores las siguientes:

$$aab,\ aac,\ aad,$$
$$bba,\ bbc,\ bbd,$$
$$cca,\ ccb,\ ccd,$$
$$dda,\ ddb,\ ddc,$$
$$aaa,\ bbb,\ ccc,\ ddd,$$

que son diez y seis, es decir, finalmente veinte combinaciones.

Supongamos, pues, m objetos que tratan de combinarse con repetición n á n.

Supongamos escritas en forma de tabla sus combinaciones con repetición cuyo número designaremos por:

$$(CR)_n^m$$

de consiguiente, como hay tantas agrupaciones ó combinaciones como expresa el número $(CR)_n^m$ y cada grupo ó combinación se compone de n letras; el número total de letras de la tabla será:

$$n\,(CR)_n^m$$

y siendo m el número de letras que entran *idénticamente* en la tabla, dividiendo el número de letras de la tabla entre el número m de letras que se proponen, el cociente expresaría el número de veces que entra cada letra en la tabla.

Así pues, designando este cociente por ω, se tendrá:

$$\omega=\frac{n}{m}(CR)_n^m \qquad (46)$$

Para hallar otra expresión del valor de ω, procederemos como sigue:

Suprimamos, *pero una sola vez*, la letra a, por ejemplo, en todas las combinaciones en las que entra. Las combinaciones así modificadas, serán las combinaciones con repetición de m letras $n-1$ y $n-1$ y su número será:

$$(CR)_{n-1}^m$$

y la letra a entrará en estas combinaciones un número de veces expresado por

$$\frac{n-1}{m}(CR)_{n-1}^m$$

Pero la letra a se ha suprimido justamente un número de veces igual al número de combinaciones que resultan de suprimirla, es decir, tantas veces como expresa:

$$(CR)_{n-1}^m$$

luego se tendrá:

$$\omega=\frac{n-1}{m}(CR)_{n-1}^m+(CR)_{n-1}^m \qquad (47)$$

Comparando (46) y (47), resulta:

$$\frac{n}{m}(CR)_n^m=\frac{n-1}{m}(CR)_{n-1}^m+(CR)_{n-1}^m$$

ó bien:

$$(CR)_n^m=\frac{m+n-1}{n}(CR)_{n-1}^m \qquad (48)$$

Haciendo sucesivamente:

$$n = 2, 3, 4, \ldots\ldots, n$$

resulta:

$$(\mathrm{CR})_2^m = \frac{m+1}{2}(\mathrm{CR})_1^m$$

$$(\mathrm{CR})_3^m = \frac{m+2}{3}(\mathrm{CR})_2^m$$

$$(\mathrm{CR})_4^m = \frac{m+3}{4}(\mathrm{CR})_3^m$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(\mathrm{CR})_n^m = \frac{m+n-1}{n}(\mathrm{CR})_{n-1}^m$$

Sustituyendo unas en otras y recordando que: $(\mathrm{CR})_1^m = m$, resulta:

$$(\mathrm{CR})_n^m = \frac{(m+n-1)(m+n-2)\ldots\ldots\ldots(m+2)(m+1)m}{1.2.3\ldots\ldots\ldots n} \qquad (49)$$

54. Comparando esta fórmula con la (42), se deduce: *que el número de combinaciones con repetición de* m *objetos* n *á* n *es igual al de combinaciones sin repetición de* m + n — 1 *objetos tomados* n *á* n; luego (párrafo 50, nota 4ª):

$$(\mathrm{CR})_n^m = \mathrm{C}_n^{m+n-1} = \mathrm{C}_{m-1}^{m+n-1}$$

55. Multiplicando en la fórmula (49) los dos términos por 1.2.3...... $m-1$, resulta:

$$(\mathrm{CR})_n^m = \frac{(m+n-1)!}{n!\,(m-1)!} = \frac{|\underline{m+n-1}}{|\underline{n}\,|\underline{m-1}} \qquad (50)$$

Observación.—En las combinaciones ordinarias sin repetición cuyo número es C_n^m, n es menor que m; pero si se trata de combinaciones con repetición, n puede ser mayor que m.

Por ejemplo, las combinaciones con repetición de tres letras: *a*, *b*, *c*, tomadas de cuatro en cuatro, serán:

aabc, *aabb*, *aacc*, *bbac*, *bbcc*, *ccab*,
aaab, *aaac*, *bbba*, *bbbc*, *ccca*, *cccb*,
aaaa, *bbbb*, *cccc*,

56. Teorema I. Como se tiene:

$$\mathrm{C}_{n-1}^{m-1} = \frac{1.2\ldots\ldots(m-1)}{1.2\ldots\ldots(m-n)\times 1.2\ldots\ldots(n-1)} = \frac{(m-1)!}{(m-n)!\,(n-1)!}$$

y

$$\mathrm{C}_n^{m-1} = \frac{(m-1)!}{(m-n-1)!\,n!}$$

resulta:

$$\mathrm{C}_{n-1}^{m-1} + \mathrm{C}_n^{m-1} = \frac{(m-1)!}{(m-n-1)!\,(n-1)!}\left(\frac{1}{m-n} + \frac{1}{n}\right) = \frac{m!}{(m-n)!\,n!} = \mathrm{C}_n^m$$

luego:

$$\mathrm{C}_n^m = \mathrm{C}_{n-1}^{m-1} + \mathrm{C}_n^{m-1} \qquad (51)$$

II. *Entre las combinaciones de* m *objetos* n *á* n, *el número de las que encierran* p *objetos dados es:* C_{n-p}^{m-p}.

Si en efecto se hacen á un lado los p objetos dados, el número total de objetos será $m-p$, combinados $n-p$ á $n-p$ dan el número C_{n-p}^{m-p}. Ahora bien, si á la derecha de estas combinaciones se colocan los p objetos suprimidos, resultará C_n^m todas las combinaciones n á n que contienen estos p objetos. El número buscado es, pues, C_{n-p}^{m-p}.

III. *Entre las combinaciones* n *á* n *de* m *objetos, el número de los que no contienen ninguno de los* p *objetos designados es* C_n^{m-p}.

En efecto, el número de objetos que tienen que figurar en las combinaciones es por hipótesis $m-p$, y como dichas combinaciones son n á n, su número será:

$$\mathrm{C}_n^{m-p}$$

Inferimos de lo anterior que el número de combinaciones que contienen por lo menos á uno de los p objetos designados, es igual á:

$$\mathrm{C}_n^m - \mathrm{C}_n^{m-p}$$

IV. *El número de combinaciones de* m *objetos* n *á* n *es igual á la suma de los números de combinaciones* n — 1 *á* $n-1$ *de* $m-1$, $m-2$, $m-3$, ..., n — 1 *objetos.*

Se tiene (teorema I):

$$\mathrm{C}_n^m = \mathrm{C}_{n-1}^{m-1} + \mathrm{C}_n^{m-1}$$

$$\mathrm{C}_n^{m-1} = \mathrm{C}_{n-1}^{m-2} + \mathrm{C}_n^{m-2}$$

$$\mathrm{C}_n^{m-2} = \mathrm{C}_{n-1}^{m-3} + \mathrm{C}_n^{m-3}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\mathrm{C}_n^n = \mathrm{C}_{n-1}^{n-1}$$

Sumando ordenadamente:

$$\mathrm{C}_n^m = \mathrm{C}_{n-1}^{m-1} + \mathrm{C}_{n-1}^{m-2} + \ldots\ldots + \mathrm{C}_{n-1}^{n-1} \qquad (51')$$

relación que demuestra el teorema.

ORDENACIONES, PERMUTACIONES Y COMBINACIONES DE OBJETOS QUE SE DIVIDEN EN GRUPOS DE OBJETOS IDÉNTICOS.

*57. I. **Ordenaciones.** Si formadas las ordenaciones de m letras n á n, se suponen α letras iguales á a, β letras iguales á b, etc., ¿cuál es el número de resultados diversos?

Ante todo, supongamos que sólo hay α letras iguales á a.

1º Las ordenaciones en que a no entra, son todas diversas, su número es el de ordenaciones de $m-\alpha$ letras n á n, es decir:

$$\mathrm{O}_n^{m-a} = \mathrm{P}_n \mathrm{C}_n^{m-a}$$

2º Las ordenaciones en que a entra una vez, son todas diversas, y para conocer su número acudiremos á las combinaciones correspondientes; quitemos a, tendremos las combinaciones de $m-\alpha$ letras $n-1$ á $n-1$.

Si en cada una de estas combinaciones permutamos las n letras que entran incluso a, tendremos:

$$\mathrm{P}_n \mathrm{C}_{n-1}^{m-a}$$

resultados diversos, ó bien:

$$\frac{\mathrm{P}_n}{\mathrm{P}_1}\mathrm{C}_{n-1}^{m-a} \qquad (51'')$$