3° En fin, las ordenaciones en que a entre dos veces, no serán todas diversas; si quitamos dos veces a y consideramos las combinaciones correspondientes, serán en número de

$$C_{n-2}^{m-a}$$

y si permutamos las letras que allí entran, incluso dos veces a, tendremos:

$$P_n C_{n-2}^{m-a}$$

resultados no todos diversos, pues permutando las dos letras a en cada combinación no se la cambia, por todo habrá pues:

$$\frac{P_n}{P_2} C_{n-2}^{m-a}$$

resultados diversos, etc.

El número buscado es en fin:

$$P_n \left(C_n^{m-a} + \frac{C_{n-1}^{m-a}}{P_1} + \frac{C_{n-2}^{m-a}}{P_2} + \cdots\cdots + \frac{C_{n-a}^{m-a}}{P_\alpha} \right) \qquad (51''')$$

Supongamos ahora β letras iguales á b, además de las α iguales á a.

El término general de la cantidad buscada será el número de ordenaciones en las que a entra μ veces y b entra ν veces; dicho término general es:

$$\frac{P_n}{P_\mu P_\nu} C_{n-\mu-\nu}^{m-a-\beta}$$

Así pues, el número de resultados buscados es:

$$\Sigma \frac{P_n}{P_\mu P_\nu} C_{n-\mu-\nu}^{m-a-\beta} \qquad (51'''')$$

quedando μ y ν menores que α y β.

(Laurent.)

*58. **Permutaciones.** Como sucede con las ordenaciones, el número que resulta en este caso es *menor* que el que da la fórmula del número de permutaciones de m cantidades.

Si se tiene, por ejemplo, las tres letras: a, b, c, que producen seis permutaciones:

$$abc,\ acb,\ cab,\ bac,\ bca,\ cba.$$

Suponiendo $b = a$, resulta:

$$aac,\ aca,\ caa,\ aac,\ aca,\ caa,$$

que se reducen á *tres:*

$$aac,\ aca,\ caa.$$

Su número era:

$$P_3 = 1.2.3;$$

luego:

$$\frac{P_3}{P_2} = \frac{1.2.3}{1.2} = 3.$$

Lo propio, como hemos dicho, pasa con las ordenaciones y combinaciones.

Si se trata de tres letras: a, b, c, sus ordenaciones dos á dos serán:

$$ab,\ ac,\ ba,\ bc,\ ca,\ cb.$$

Suponiendo b idéntica á a, estas seis ordenaciones son:

$$aa,\ ac,\ aa,\ ac,\ ca,\ ca,$$

que se reducen á tres:

$$aa,\ ac,\ ca.$$

Si se trata de cinco letras: a, b, c, d, e, sus combinaciones, tomándolas tres á tres, son:

$$abc,\ abd,\ abe,\ acd,\ ace,\ ade,$$
$$bcd,\ bce,\ bde,$$
$$cde,$$

Suponiendo $b = a$:

$$aac,\ aad,\ aae,\ acd,\ ace,\ ade,$$
$$acd,\ ace,\ ade,$$
$$cde,$$

que son siete en lugar de diez.

Entremos á determinar á P número de permutaciones distintas entre las permutaciones de m letras si se suponen α iguales á a, β á b, γ á c, etc.

Supongamos α letras iguales á a entre las m letras: a, b, c, ... y representémoslas por: a_1, a_2, a_3 ......, a_α.

Formando las permutaciones de las m letras, se obtendrá un número P_m.

Sea x el número de permutaciones distintas obtenidas al suponer α letras iguales á a.

Si en estas x permutaciones distintas se permutan a_1, a_2, a_3 ......, a_α sin tocar á las otras letras, los resultados serán idénticos, y como cada una de las letras idénticas es susceptible de P_α permutaciones (que en rigor representan una sola) (1) se deduce que xP_α será el número total de permutaciones, se tiene pues:

$$xP_\alpha = P_m$$

porque se reproduce así la tabla de las P_m permutaciones primitivas; luego:

$$x = \frac{P_m}{P_\alpha}$$

Suponiendo ahora en esas permutaciones β letras iguales á b, el número x de permutaciones distintas satisfará la relación:

$$x = x_1 P_\beta$$

luego:

$$x_1 = \frac{x}{P_\beta} = \frac{P_m}{P_\alpha P_\beta}$$

finalmente:

$$P = \frac{P_m}{P_\alpha P_\beta P_\gamma \ldots\ldots} = \frac{m!}{\alpha!\beta!\gamma!\ldots\ldots} \qquad (51^{\mathrm{V}})$$

59. **Combinaciones.** Para hallar el número de combinaciones de m objetos n á n, cuando hay α objetos ~~distintos~~ iguales con a, β iguales con b, etc., razonaremos así:

El número de grupos distintos en los que a figura μ veces y b figura ν veces, se obtienen combinando las $m - \alpha - \beta$ objetos distintos, $n - \mu - \nu$ á $n - \mu - \nu$.

(1) Puesto que $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots\ldots = a_\alpha$.

Siendo dicho número:

$$C_{n-\mu-\nu}^{m-\alpha-\beta}$$

el número C total de combinaciones lo dará la relación

$$C=\Sigma C_{n-\mu-\nu}^{m-\alpha-\beta} \qquad (51^{VI})$$

en la que se hará variar á μ de 0 á α, á ν de 0 á β, y se pondrá: $C_p^q=0$, para valores negativos del índice p, pues se tiene:

$$\mu+\nu > \text{ ó } = n$$

(Eduardo Prado, *Álgebra Superior*, página 85.)

60. **Fórmula del binomio de Newton en el caso de un exponente entero y positivo.** El objeto de esta fórmula que lleva el nombre de su ilustre inventor, consiste en formar la potencia de un grado cualquiera de un binomio, sin pasar por las anteriores.

Para averiguar la ley que rige la formación de la potencia m de un binomio y no tropezar con el inconveniente de las reducciones de términos semejantes, tomaremos m binomios:

$$(x+a)(x+b)(x+c)\ldots\ldots(x+h)(x+k)$$

cuyo producto vamos á formar.

Si multiplicamos entre sí todos los primeros términos de los binomios, resultará:

$$x^m$$

Tomando después los primeros términos de $m-1$ binomios y el segundo término del binomio restante, sucesivamente obtendremos:

$$ax^{m-1},\ bx^{m-1},\ cx^{m-1}\ldots\ldots,kx^{m-1}$$

que sumadas producen:

$$(a+b+c+\ldots\ldots+k)x^{m-1}=x^{m-1}\Sigma a$$

Tomando los primeros términos en $m-2$ binomios y los segundos en los dos restantes, resultará:

$$(ab+ac+\ldots\ldots+ak+bc+\ldots\ldots+bk+\ldots\ldots+hk)x^{m-2}=x^{m-2}\Sigma ab$$

Pero siguiendo análogamente llegaremos á formar el producto

$$(a.b.c.d\ldots\ldots h.k)x^0=a.b.c\ldots\ldots h.k$$

luego

$$(x+a)(x+b)\ldots\ldots(x+k)=x^m+x^{m-1}\Sigma a+x^{m-2}\Sigma ab+\ldots\ldots+(a.b.c\ldots\ldots h.k) \qquad (52)$$

fórmula de la que fácilmente pasaremos á la que da la potencia m de un binomio, suponiendo:

$$a=b=c=\ldots\ldots=k$$

Con esta hipótesis el primer miembro de (52) será:

$$(x+a)^m$$

El primer término del segundo miembro x^m no cambiará.

El segundo término tiene un factor Σa que se cambiará en la letra a repetida tantas veces como binomios ó letras hay, es decir, en ma.

El término $x^{m-2}\Sigma ab$, contiene un factor Σab que será igual á $\Sigma aa=\Sigma a^2$, es decir, a^2 tomada tantas veces como expresa el número de combinaciones de m cantidades dos á dos, es decir:

$$C_2^m=\frac{m(m-1)}{2}$$

El factor Σabc se mudará en:

$$\Sigma aaa=\Sigma a^3$$

es decir, a^3 repetida tantas veces como expresa el número de combinaciones de m objetos tres á tres ó:

$$C_3^m=\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}, \text{etc.}$$

El último término será:

$$a.b.c.d\ldots\ldots\ldots k=a^m$$

luego

$$(x+a)^m=x^m+mx^{m-1}a+\frac{m(m-1)}{1.2}x^{m-2}a^2+\ldots\ldots+a^m$$
$$=x^m+\binom{m}{1}x^{m-1}a+\binom{m}{2}x^{m-2}a^2+\binom{m}{3}x^{m-3}a^3+\ldots\ldots+\binom{m}{m}a^m \qquad (53)$$

que es la fórmula de Newton en el caso de exponente entero positivo. [1]

61. Si se propone un polinomio

$$(a+b+c+\ldots\ldots+k)^m$$

se supondrá:

$$b+c+\ldots\ldots+k=x$$

luego se tendrá la expresión:

$$(a+x)^m$$

que se desarrollará por las reglas:

$$(a+x)^m=a^m+ma^{m-1}x+\frac{m(m-1)a^{m-2}x^2}{1.2}+\ldots\ldots+x^m$$

luego se supondrá:

$$c+\ldots\ldots+k=u$$

de suerte que:

$$x=b+u$$

luego:

$$(a+b+\ldots\ldots+k)^m=(a+x)^m=(a+b+u)^m=a^m+ma^{m-1}(b+u)+$$
$$+\frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}(b+u)^2+\ldots\ldots+(b+u)^m$$

Supondríamos:

$$d+\ldots\ldots\ldots+k=v$$

luego:

$$u=c+v$$

y prosiguiendo análogamente resolveríamos la cuestión. (Véase el párrafo 70.)

62. En la fórmula (53) notamos las propiedades de la potencia de un binomio que

(1) Fórmula que es un caso particular de otra denominada de Taylor y se explicará al hablar de las Funciones Derivadas.

nos enseña el Álgebra Elemental (véase Contreras, Álgebra, pág. 121, año 1884) respecto á la homogeneidad de los términos del desarrollo, las literales que entran en ellos, el gradual crecimiento ó decrecimiento en los exponentes, el número de términos del desarrollo, las analogías entre los exponentes y coeficientes de los términos equidistantes de los extremos, la formación de los coeficientes, etc., propiedades que creemos inútil demostrar.

63. Si observáremos que la fórmula general del término general del desarrollo de la potencia de un binomio es fácil escribirla, pues suponiendo que se pide el $n+1^{\text{ésimo}}$ término, que tiene n antes que él, el coficiente que le corresponde será C_n^m y los exponentes de los términos del binomio que entran en dicho término general serán para el término $n+1^{\text{ésimo}}$, $m-n$ y n complementarios entre sí; llamando, pues, t^{n+1} el mencionado término general:

$$t^{n+1}=C_n^m x^{m-n}a^n=\binom{m}{n}x^{m-n}a^n \tag{54}$$

ó como lo escribe el Álgebra Elemental:

$$t^{n+1}=\frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots[m-(n-1)]}{1.2.3\ldots\ldots n}x^{m-n}a^n \tag{55}$$

64. Si el binomio propuesto tuviese su segundo término negativo, bastaría cambiar el signo de los términos que contuviesen las potencias impares de dicha cantidad; luego:

$$(x\pm a)^m=x^m\pm mx^{m-1}a+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2a^2\pm\ldots\ldots\pm a^m$$

Suponiendo $x=1$:

$$(1\pm a)^m=1\pm ma+\frac{m(m-1)}{1.2}a^2\pm\ldots\ldots\pm a^m$$

fórmula de fácil aplicación para la potencia m de un polinomio cuando a representa la suma algebraica de varias cantidades.

OBSERVACIONES.

65. I. Suponiendo en el binomio

$$(x+a)^m$$

que:

$$x=1, \quad a=1,$$

resulta:

$$(2)^m=1+m+\frac{m(m-1)}{1.2}+\ldots\ldots\ldots \tag{56}$$

luego: *la suma de los coeficientes del desarrollo es igual al número 2 elevado á la potencia del binomio.*

66. II. Suponiendo $x=a=1$ en el binomio $(x-a)^m$, se tiene:

$$0=1-\frac{m}{1}+\frac{m(m-1)}{1.2}-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}+\ldots\ldots\pm1 \tag{57}$$

luego: *la suma de los coeficientes del rango impar es igual á la de los de rango par.*

67. III. Si en la fórmula (55) se toma para n un número entero mayor que m, habrá

habrá un factor de la forma $m-m=0$ entre los del término general, lo que demuestra que más allá del rango $m+1$ no hay términos.

68. IV. La ley de formación de los coeficientes queda expresada por la relación (fórmula 55):

$$\left.\begin{aligned} T_n&=T_{n-1}\frac{m-n+2}{n-1}\,\frac{a}{x} \\ T_{n+1}&=T_n\frac{m-n+1}{n}\,\frac{a}{x},\text{ etc.}\end{aligned}\right\} \tag{58}$$

Los coeficientes irán aumentando si es >1 la relación que expresa por qué cantidad se ha de multiplicar el coeficiente del término T_{n+1} para formar el de T_{n+2}, es decir:

$$\frac{m-n}{n+1}>1 \tag{59}$$

ó bien:

$$n<\frac{m-1}{2} \tag{60}$$

Hay que distinguir dos casos:

1º *m impar*. Si m es impar, $m-1$ es par y n puede recibir el valor $\frac{m-1}{2}$; la fórmula (60) y de consiguiente la (59) se cambian en ecuaciones, y queda:

$$\frac{m-n}{n+1}=1$$

luego T_{n+1} y T_{n+2} tienen igual coeficiente.

El rango $n+1$ del término T_{n+1} será:

$$n+1=\frac{m-1}{2}+1=\frac{m+1}{2}$$

luego el término T_{n+1} termina la primera mitad del desarrollo y T_{n+2} comienza la segunda.

El exponente n de a en el término T_{n+1} es:

$$n=\frac{m-1}{2}$$

y el de x es (fórmula 55):

$$m-n=\frac{m+1}{2}$$

En el caso de m *impar, se conoce, pues, que se ha llegado á la mitad del desarrollo cuando en el último término formado, el exponente de* x*, es una unidad mayor que el de* a.

2º *m es par*. Como m es par, $m-1$ es impar, n no puede ser igual á $\frac{m-1}{2}$.

Pero si $n=\frac{m}{2}-1$, la desigualdad (60) se satisface y el coeficiente de T_{n+2} crece.

Mas si $n=\frac{m}{2}$, cambia de sentido la desigualdad (60) lo mismo que la (59), y como $\frac{m-n}{n+1}<1$, los coeficientes decrecen. Así pues, el coeficiente máximo corresponde á:

$$n=\frac{m}{2}$$

en cuyo caso el rango $n+1$ de T_{n+1} será:

$$n+1=\frac{m}{2}+1$$

Se llega, pues, en este momento á la mitad justa del desarrollo y el coeficiente de T_{n+1} será único, no se repetirá.

El exponente n de a será:

$$n=\frac{m}{2}$$

El de x será:

$$m-n=\frac{m}{2}$$

Así pues: *cuando* m *es par se llega á la mitad del desarrollo si en el último término formado* x *y* a *tienen exponentes iguales.*

69. V. *¿Cuál es el número máximo de combinaciones entre las que pueden obtenerse con* m *objetos tomándolos 1 á 1, 2 á 2, ...,* m *á* m?

No hay sino averiguar el máximo coeficiente del desarrollo de la mª potencia de un binomio cualquiera.

1º Si m es impar, hay sólo dos coeficientes máximos iguales entre sí y en medio del desarrollo:

$$C^m_{\frac{m-1}{2}},\quad C^m_{\frac{m+1}{2}}$$

2º Si m es par, el *único* coeficiente máximo y á la mitad del desarrollo es:

$$C^m_{\frac{m}{2}}$$

Si por ejemplo se tienen siete objetos, el máximo número de combinaciones resulta tomándolos 3 á 3 ó 4 á 4.

Con diez objetos se tomarán 5 á 5.

VI. Se ha demostrado (párrafo 56, teorema I) la relación:

$$C^m_n=C^{m-1}_{n-1}+C^{m-1}_n$$

reemplazando m por $m+1$, se tiene:

$$C^{m+1}_n=C^m_{n-1}+C^m_n \tag{61}$$

luego *en el desarrollo de*

$$(x+a)^{m+1}$$

un término cualquiera tiene por coeficiente la suma de los coeficientes del término del mismo rango y del rango precedente en el desarrollo de $(x+a)^m$.

Así, por ejemplo, como:

$$(x+a)^4=x^4+4x^3a+6x^2a^2+4xa^3+a^4$$

se tendrá:

$$\begin{aligned}(x+a)^5&=x^5+(4+1)x^4a+(6+4)x^3a^2+(4+6)x^2a^3+(1+4)xa^4+a^5\\&=x^5+5x^4a+10x^3a^2+10x^2a^3+5xa^4+a^5\end{aligned}$$

70. **Elevación á potencias y extracción de raíces de los polinomios.** Dado el polinomio:

$$(a+b+c+\ldots\ldots+l)^m$$

hallaremos la fórmula del término general del desarrollo de su potencia m, que evidentemente será de la forma:

$$A\,a^p b^q c^r \ldots\ldots k^t l^u$$

con la condición:

$$p+q+r+\ldots\ldots+t+u=m$$

y vamos á calcular á A conociendo: $p, q, \ldots\ldots, u$.

Sea

$$b+c+\ldots\ldots+l=x$$

luego:

$$(a+b+c+\ldots\ldots+l)^m=(a+x)^m$$

El conjunto de términos que contienen el factor a^p (siendo p positivo á lo sumo igual á m), es según la fórmula del binomio

$$C^m_p a^p x^{m-p}$$

Hay pues que desarrollar x^{m-p}, es decir:

$$(b+c+\ldots\ldots+l)^{m-p}=(b+y)^{m-p}$$

siendo

$$c+\ldots\ldots+l=y$$

El conjunto de términos que contienen el factor b^q siendo q á lo sumo igual á $m-p$, es:

$$C^{m-p}_q b^q y^{m-p-q}$$

Y el conjunto de términos de $(a+b+c+\ldots\ldots+l)^m$ que contienen el factor $a^p b^q$, es:

$$C^m_p C^{m-p}_q a^p b^q y^{m-p-q}$$

Prosiguiendo se obtiene la expresión:

$$C^m_p C^{m-p}_q C^{m-p-q}_r \ldots\ldots a^p b^q c^r \ldots\ldots j^s (k+l)^{m-p-q-r-\ldots\ldots-s}$$

y en definitiva, el término que contiene á

$$a^p b^q c^r \ldots\ldots j^s k^t l^u$$

será:

$$C^m_p C^{m-p}_q C^{m-p-q}_r \ldots\ldots C^{m-p-q-r-\ldots\ldots-s}_t a^p b^q c^r \ldots\ldots k^t l^u$$

El coeficiente vale:

$$\frac{m!}{p!(m-p)!}\cdot\frac{(m-p)!}{q!(m-p-q)!}\ldots\ldots\frac{(m-p-q-\ldots\ldots-s)!}{t!(m-p-q-\ldots\ldots-s-t)!}$$

y como

$$m=p+q+r+\ldots\ldots+s+t+u$$

queda:

$$\frac{m!}{p!q!r!\ldots\ldots t!u!}$$

y el termino general será:

$$T=\frac{m!}{p!q!r!\ldots\ldots t!u!}a^p b^q c^r \ldots\ldots k^t l^u \tag{62}$$