Y además:

$$(a+b+\ldots\ldots+l)^m=\Sigma T$$

Designando por Σ la suma obtenida, dando á p, q, ..., u, todos los valores enteros positivos que verifiquen la condición:

$$p+q+\ldots\ldots+u=m$$

70′. NOTA.— Cuando se hace uno de estos números igual á cero, la fórmula es ilusoria. Por ejemplo, sea $n=0$ la serie:

$$1.2\ldots\ldots n$$

no puede tener sentido, pues evidentemente tomando factores crecientes partiendo de 1, no puede hallarse cero.

Para evitar este inconveniente remontándonos al término general del desarrollo de $(a+x)^m$, la hipótesis $n=0$ lo reduce á:

$$\frac{a^m}{1.2\ldots\ldots 0}$$

Pero por otro lado la hipótesis $n=0$ debería dar en este desarrollo el término que no contiene á x y este término es a^m; luego para que este término pueda deducirse de la fórmula del término general, es suficiente prescindir de la serie 1.2.3...... n ó considerarla igual á 1 cuando $n=0$.

Igual observación se extiende á las demás series de factores contenidos en el denominador de T, y entonces T dará, sin excepción, todos los términos del desarrollo de la potencia m del polinomio $a+b+c+\ldots\ldots$

70″. La fórmula (62) puede escribirse de otro modo.

Como:

$$\begin{aligned} 1.2.3\ldots\ldots m &= P_m \\ 1.2.3\ldots\ldots n &= P_n \\ 1.2.3\ldots\ldots p &= P_p \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

y la suma de los diversos resultados que se obtienen dando á m, n, p, ... los valores debidos, es la potencia m del polinomio $a+b+c+\ldots\ldots$ se tiene sin duda:

$$(a+b+c+\ldots\ldots)^m=\Sigma\frac{P_m}{P_n P_p P_q\ldots\ldots}a^n b^p c^q\ldots\ldots$$

en la que

$$n+p+q+\ldots\ldots=m$$

y además:

$$P_0=1$$

por lo antes dicho.

71. **Aplicaciones.— Cuadrado de un polinomio.** Se tiene $m=2$; luego:

$$(a+b+c+\ldots\ldots)^2=\Sigma\frac{P_2}{P_n P_p}a^n b^p$$

siendo

$$n+p=2$$

Valores admisibles para n y p:

$$\left.\begin{matrix} n=0 & p=2 \\ n=2 & p=0 \end{matrix}\right\}\text{ producen }\left\{\begin{matrix} P_0 P_2=1.2=2 \\ P_2 P_0=2.1=2 \end{matrix}\right\}=2$$

$$n=1 \quad p=1 \qquad \text{,,} \qquad P_1 P_1=1$$

De consiguiente se tendrá:

$$(a+b+c+\ldots\ldots)^2=\Sigma a^2+\Sigma 2ab$$

Cubo de un polinomio. Se tiene $m=3$; luego:

$$(a+b+c+\ldots\ldots)^3=\Sigma\frac{P_3}{P_n P_p P_q}a^n b^p c^q$$

teniéndose la condición:

$$n+p+q=3$$

Valores admisibles para n, p, q:

$$\left.\begin{matrix} n=1, & p=1, & q=1 \\ n=2, & p=1, & q=0 \\ n=2, & p=0, & q=1 \end{matrix}\right\}\text{ luego }\left\{\begin{matrix} P_n P_p P_q=1 \\ \left.\begin{matrix} P_n P_p P_q \\ P_n P_p P_q \end{matrix}\right\}=P_2=2 \end{matrix}\right.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\left.\begin{matrix} n=3, & p=0, & q=0 \\ n=0, & p=3, & q=0 \\ n=0, & p=0, & q=3 \end{matrix}\right\}\text{ luego }\ P_n P_p P_q=P_3=6$$

Se tiene, pues, la conocida relación:

$$(a+b+\ldots\ldots)^3=\Sigma 6abc+\Sigma 3a^2b+\Sigma a^3$$

72. **Extracción de raíces.** El problema por resolver es: *Suponiendo que un polinomio* P *es la* m*ª potencia de* p, *determinar á* p.

Suponiendo ordenados ambos polinomios según las potencias decrecientes de una misma literal x, y llamando a, b, c, ... los términos desconocidos de la raíz p, deben ser tales que elevando:

$$p=a+b+c+\ldots\ldots+l$$

á la mª potencia, se obtenga P.

Si imaginamos que se forma la potencia por multiplicaciones sucesivas, claramente se comprende que en el resultado el término en x que tenga el máximo exponente será la potencia m de a; luego se *determinará el primer término de la raíz buscada* p, *extrayendo la raíz* m *del primer término del polinomio dado* P.

Supongamos que

$$p=a+z$$

siendo z la suma desconocida de los demás términos $b+c+d+\ldots\ldots$ tendremos:

$$P=p^m=(a+z)^m=a^m+ma^{m-1}z+\frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}z^2+\ldots\ldots$$

que da:

$$P-a^m=ma^{m-1}z+\frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}z^2+\ldots\ldots$$

Haciendo

$$z = b + z_1$$

se tendrá:

$$P - a^m = ma^{m-1}b + ma^{m-1}z_1 + \frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}(b+z_1)^2 + \ldots\ldots$$

El primer término de $P - a^m$ es $ma^{m-1}b$, así pues:

$$\frac{P - a^m}{ma^{m-1}} = \frac{ma^{m-1}b}{ma^{m-1}} + \ldots\ldots = b + \ldots\ldots$$

luego *dividiendo el primer término de la diferencia* $\mathrm{P - a^m}$ *entre* $\mathrm{ma^{m-1}}$ (recordamos que se conoce a) *el cociente será el segundo término de la raíz.*

Continuando el procedimiento si suponemos:

$$a + b + \ldots\ldots = a + b + z_2$$

se tendrá:

$$P - (a+b)^m = (a+b+z_2)^m - (a+b)^m = m(a+b)^{m-1}z_2 + \ldots\ldots$$

haciendo:

$$z_2 = c + z_3$$

se hallará desarrollando:

$$P - (a+b)^m = ma^{m-1}c + \ldots\ldots$$

Dividiendo, pues, el primer término del desarrollo $\mathrm{P - (a+b)^m}$ *que es* $\mathrm{ma^{m-1}c}$ *entre* $\mathrm{ma^{m-1}}$, *se conocerá* c *que es el tercer término de la raíz,* etc., luego:

Se extraerá la raíz m *al primer término del polinomio dado y dicha raíz será el primer término de la raíz buscada.*

Los términos siguientes se obtienen dividiendo por m *veces la* (m − 1) *potencia de dicho primer término, el primer término de cada una de las restas sucesivas que se obtienen restando del polinomio dado la* m.ª *potencia del primer término de la raíz, la* m.ª *potencia de la suma de los dos primeros,* etc.

Además, evidentemente *un polinomio no es potencia* m.ª *exacta cuando:*

1.º *Siendo su primer término una potencia* m.ª *perfecta, no lo es el último.*

2.º *Cuando siendo entero el polinomio el primer término dé un residuo, no es exactamente divisible por* m *veces la* (m − 1) *potencia del primero de la raíz.*

73. Si el primer término del polinomio propuesto es de la forma:

$$Ax^n$$

el primero de la raíz será:

$$x^{\frac{n}{m}}\sqrt[m]{A}$$

Para que la raíz sea real y sea un polinomio entero respecto de x, n tiene que ser divisible por m, y si m es par, A debe ser positivo.

El último término de p^m es evidentemente l^m, pues se puede poner:

$$a + b + c + \ldots\ldots + l = z + l$$

y

$$p^m = (z + l)^m$$

Si pues, Lx^t es el último término de P, se tendrá:

$$l^m = Lx^t$$

y el último término de la raíz será:

$$l = x^{\frac{t}{m}}\sqrt[m]{L}$$

Para que la raíz sea real y entera, t debe ser divisible por m, y si m es par, L debe ser positivo (y como advertimos ya), los cocientes que resultan de dividir los primeros términos de las restas sucesivas por el divisor fijo ma^{m-1}, deben ser enteros.

Cuando la raíz es inexacta, lo que sucede si P no es m.ª potencia perfecta, la operación no tiene fin, llega un momento en que el exponente de la literal ordenadora es negativo y crece en valor absoluto incesantemente.

Se tendrá en ese instante, llamando P el polinomio, S la parte hallada de la raíz y R la resta:

$$P = S^m + R$$

74. **Aplicación.** *¿Qué condiciones son necesarias para que sea cubo perfecto el polinomio*

$$A_0x^3 + A_1x^2 + A_2x + A_3?$$

Extrayendo la raíz cúbica de este polinomio por el método general precedentemente indicado, resulta:

$$S = x\sqrt[3]{A_0} + \frac{A_1}{3\sqrt[3]{A_0^2}}$$

y el valor de R es:

$$R = P - S^m = P - S^3 = \left(A_2 - \frac{A_1^2}{3A_0}\right)x + A_3 - \frac{A_1^3}{27A_0^2}$$

el polinomio propuesto es cubo perfecto si se verifica la relación $R = 0$, es decir:

$$A_2 - \frac{A_1^2}{3A_0} = 0, \quad A_3 - \frac{A_1^3}{27A_0^2} = 0$$

ó bien:

$$A_1^2 = 3A_0A_2$$
$$A_1^3 = 27A_0^2A_3$$

(Eduardo Prado.)

Por ejemplo, si:

$$A_0 = 1, \quad A_1 = 3, \quad A_2 = 3, \quad A_3 = 1,$$

y se tiene:

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

cubo

este polinomio será ~~[illegible]~~ perfecto, pues:

$$A_1^2 = 9 = 3A_0A_2 = 3.1.3 = 9$$
$$A_1^3 = 27 = 27.1.1 = 27$$

Efectivamente:

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x+1)^3$$

75. **Suma de las potencias semejantes de los términos de una progresión.** Sean a, b, c, ..., k, l, los $m + 1$ primeros términos de una progresión aritmética cuya

razón es r; $S_1, S_2, S_3, \ldots\ldots, S_n$, las sumas de sus primeras, segundas, ..., enésimas potencias.

La expresión por calcular es referida á m términos:

$$S_n = a^n + b^n + \ldots\ldots + k^n$$

Elevando á la potencia $n+1$ las relaciones:

$$b = a + r, \quad c = b + r, \ldots\ldots, \quad l = k + r,$$

se tendrán las m relaciones:

$a^{n+1} = a^{n+1}$

$$b^{n+1} = a^{n+1} + (n+1)\,a^n r + \frac{n(n+1)}{2}\,a^{n-1} r^2 + \ldots\ldots + r^{n+1}$$

$$c^{n+1} = b^{n+1} + (n+1)\,b^n r + \frac{n(n+1)}{2}\,b^{n-1} r^2 + \ldots\ldots + r^{n+1}$$

....

$$l^{n+1} = k^{n+1} + (n+1)\,k^n r + \frac{n(n+1)}{2}\,k^{n-1} r^2 + \ldots\ldots + r^{n+1}$$

Sumando ordenadamente estas relaciones, reduciendo, sacando los factores comunes correspondientes y empleando las notaciones, resulta:

$$l^{n+1} = a^{n+1} + (n+1)\,r S_n + \frac{n(n+1)}{2}\,r^2 S_{n-1} + \ldots\ldots + m r^{n+1} \text{ (1)}$$

relación que da á conocer á S_n, conocidos:

$$S_{n-1}, \; S_{n-2}, \ldots\ldots, S_1$$

Como se conoce S_0 que vale:

$$S_0 = a^0 + b^0 + \ldots\ldots + k^0 = m$$

se determinará S_1, luego S_2, ... y S_n.

Sea la progresión:

$$\div 1.2.3.4 \ldots\ldots m.m+1$$

tendremos:

$$r = 1, \quad l = 1 + m, \quad a = 1,$$

luego:

$$(m+1)^{n+1} = 1 + (n+1)\,S_n + \frac{n(n+1)}{2}\,S_{n-1} + \ldots\ldots + m$$

Se tiene $S_0 = m$, para conocer á S_1, supondremos $n=1$ y se tendrá:

$$(m+1)^2 = 1 + 2 S_1 + S_0$$

Así pues:

$$S_1 = \frac{m(m+1)}{2}$$

(1) Evidentemente esta expresión contiene $n+2$ términos.

Haciendo $n=2$ en la fórmula, resulta:

$$(m+1)^3 = 1 + 3S_2 + 3S_1 + S_0 = 1 + 3S_2 + \frac{3m(m+1)}{2} + m$$

luego:

$$S_2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

Haciendo $n=3$, resulta:

$$(m+1)^4 = 1 + 4S_3 + 6S_2 + 4S_1 + S_0 = 1 + 4S_3 + m(m+1)(2m+1) + 2(m+1)m + m$$

de consiguiente:

$$S_3 = \frac{m^2(m+1)^2}{4}$$

igualmente:

$$S_4 = \frac{m(m+1)(2m+1)(3m^2+3m-1)}{30}, \text{ etc.}$$

3ª

(Véase el Capítulo XI. de la ~~Segunda~~ Parte y el párrafo 80 de estas Nociones.)

APLICACIONES.

76. I. *¿Cuántas y cuáles ordenaciones 2 á 2 y 3 á 3, presentan cuatro cantidades* a, b, c, d?

La fórmula general da:

$$0_n^m = 0_2^4 = 12$$

$$0_n^m = 0_3^4 = 24$$

Las primeras son:

ab, ac, ad,
bc, bd, ba,
cd, cb, ca,
dc, db, da.

Las segundas son:

abc, abd, bca, bcd, cdb, cda,
bcd, bca, bdc, bda, bac, bad,
cdb, cda, cbd, cba, cab, cad,
dcb, dca, dbc, dbd, dab, dac.

II. *¿Cuántas y cuáles permutaciones presentan cuatro objetos* a, b, c, d?

Se tiene:

$$P_m = 24$$

Las permutaciones se obtienen así:

Se tienen los grupos: *ab, ba.*

Introduciendo el objeto *c*:

abc, acb, cab, bac, bca, cba.

Finalmente:

abcd, abdc, adbc, dabc, acbd,
acdb, adcb, dacb, cabd, cadb,
cdab, dcab, bacd, badc, bdac,
dbac, bcad, bcda, bdca, dbca,
cbad, cbda, cdba, dcba.

III. *Cuatro objetos* a, b, c, d, *combinados 3 á 3, ¿cuántas y cuáles combinaciones producen?*
Ante todo se tiene:

$$C_3^4 = 4$$

Las combinaciones se obtienen así:
Ante todo se tiene:

$$ab,\ ac,\ ad,$$
$$bc,\ bd,$$
$$cd.$$

Finalmente:

$$abc,\ abd,\ acd,\ bcd.$$

*IV. Como la teoría del *Análisis Combinatorio* tiene un inmenso número de aplicaciones en la teoría de los Determinantes y anexas (Discriminantes, etc.), en el Cálculo de las Probabilidades, etc., vamos á poner un ejemplo del último, tan sólo para dar una idea de la importancia de la teoría.

Se trata de saber el número de ambos que se pueden formar con 90 números en un juego de lotería.

Haremos $m = 90$, $n = 2$ en el valor:

$$C_n^m = \frac{90.89}{1.2} = 4005$$

y se sabe que para calcular la probabilidad de un acontecimiento, se divide el número de casos favorables entre el número de posibles; en nuestro caso la probabilidad será expresada por la fracción: $\frac{1}{4005}$. Así pues, el que acierte un ambo debe recibir 4005 por 1.

Si se quisiera calcular el número de ternos, se tendría:

$$m = 90, \quad n = 3$$
$$C_n^m = \frac{90.89.88}{1.2.3} = 117480$$

y la probabilidad sería:

$$\frac{1}{117480}$$

Supongamos que de los 90 números se extraen 5, como se ejecuta en la lotería ordinaria y se trata de determinar la probabilidad de acertar un ambo. Para determinar el número de casos favorables, calculemos el número de ambos que se pueden formar con 5 números, lo que da suponiendo $m = 5$, $n = 2$:

$$C_n^m = \frac{5.4}{1.2} = 10$$

Dividiendo el número de casos favorables, entre el de posibles, la probabilidad sería:

$$\frac{10}{4005} = \frac{2}{801}$$

y el que acierte debe recibir 801 por 2.

El origen de la teoría de las probabilidades, lo mismo que de las combinaciones, re-

monta hasta Pascal (1623-1662), al que había propuesto problemas sobre el juego el *caballero de Méré* (1654).

No es absolutamente objeto de nuestra obra entrar en detalles sobre este ramo de la ciencia.

77. **Generalidad de la fórmula del binomio.** Formando las primeras potencias de $a + x$, por medio de la multiplicación, se reconoce inmediatamente que para un exponente entero positivo cualquiera, los dos primeros términos del desarrollo son:

$$a^m + ma^{m-1}x$$

y los demás de la forma:

$$Aa^{m-2}x^2 + Ba^{m-3}x^3 + \ldots\ldots$$

de suerte que designando por A, B, ..., los coeficientes que no contienen á a ni á x, se tendrá:

$$(a+x)^m = a^m + ma^{m-1}x + Aa^{m-2}x^2 + Ba^{m-3}x^3 + \ldots\ldots \qquad (63)$$

Cuando el exponente sea entero y negativo, resultará:

$$(a+x)^{-m} = \frac{1}{(a+x)^m} = \frac{1}{a^m + ma^{m-1}x + \ldots\ldots} = a^{-m} - ma^{-m-1}x + Aa^{-m-2}x^2 + \ldots\ldots$$

desarrollo de la forma del (63).

Si el exponente es fraccionario positivo:

$$(a+x)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(a+1)^m} = \sqrt[n]{a^m + ma^{m-1}x + \ldots\ldots} = a^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}a^{\frac{m}{n}-1}x + Aa^{\frac{m}{n}-2}x^2 + \ldots\ldots$$

Aplicando la regla para extraer la raíz enésima, lo que vemos que da una forma semejante á la (63).

Asimismo verificaríamos la semejanza para un exponente fraccionario negativo, pues se tiene:

$$(a+x)^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m + ma^{m-1}x + \ldots\ldots}}$$

Conocidos los dos primeros términos del desarrollo, sólo resta determinar A, B, C, ...

Para mayor generalidad consideremos dos términos consecutivos de un rango cualquiera y se tendrá:

$$(a+x)^m = a^m + ma^{m-1}x + \ldots\ldots + Ma^{m-n}x^n + Na^{m-n-1}x^{n+1} + \ldots\ldots$$

cambiando x en $x + y$, después a en $a + y$, como los coeficientes desconocidos no son funciones de a ni de x, se tendrá:

$$(a+x+y)^m = a^m + ma^{m-1}(x+y) + \ldots\ldots + Ma^{m-n}(x+y)^n + Na^{m-n-1}(x+y)^{n+1} + \ldots\ldots$$
$$(a+y+x)^m = (a+y)^m + m(a+y)^{m-1}x + \ldots\ldots + M(a+y)^{m-n}x^n +$$
$$+ N(a+y)^{m-n-1}x^{n+1} + \ldots\ldots$$

como los primeros miembros son iguales, lo serán los segundos cualesquiera que sean x é y, ordenándolos pues, respecto á x é y serán idénticos, no importando para el resultado que contengan potencias de binomios, pues que se conocen los dos primeros términos de dichas potencias, bastará poner en evidencia el término función de y; de-