signando pues por Y_y, Y'_y los términos funciones de y en los precedentes segundos miembros:

$$Y_y = ma^{m-1} + \ldots\ldots + Mna^{m-n}x^{n-1} + N(n+1)a^{m-n-1}x^n + \ldots\ldots$$
$$Y'_y = ma^{m-1} + \ldots\ldots + M(m-n)a^{m-n-1}x^n + N(m-n-1)a^{m-n-2}x^{n+1} + \ldots\ldots$$

Identificando los coeficientes de las mismas potencias de x, para la identificación de las ecuaciones y refiriéndose por ejemplo á los que afectan á x^n, se tendrá:

$$N(n+1)a^{m-n-1} = M(m-n)a^{m-n-1}$$

es decir:

$$N = \frac{M(m-n)}{n+1}$$

que entraña la ley de formación de los coeficientes y hallamos de otro modo por las fórmulas (58), como el razonamiento que nos ha conducido á obtener la anterior fórmula, lo hicimos cualquiera que fuese m, queda demostrada la generalidad de la fórmula del binomio.

Cuando m sea entero y positivo, el número de términos es limitado, acaba en a^m.

Cuando m está en cualquiera de los otros casos, se compondrá el desarrollo de un número indefinido de términos, será una serie.

*78. **Triángulo aritmético de Pascal.—Números figurados.—Aplicaciones.** —*Newton* descubrió la fórmula que lleva su ilustre nombre, después que *Pascal* hubiera dado en su triángulo aritmético, un diagrama si se quiere, de la expresada fórmula; pero el primero al contrario del segundo, aprovechó los símbolos generales del Álgebra para fijar las leyes de su fórmula.

Si elevamos $x+a$ á diversas potencias 1.2.3...... m y escribimos en líneas horizontales los coeficientes de los desarrollos, formaremos el siguiente cuadro poco diverso del adoptado por Pascal en su obra "*Uso del triángulo aritmético para las partidas de juego.*"

$$\begin{array}{c|l}
1 & 1, \\
1 & 2,\ 1, \\
1 & 3,\ 3,\ 1, \\
1 & 4,\ 6,\ 4,\ 1, \\
1 & 5,\ 10,\ 20,\ 5,\ 1, \\
1 & 6,\ 15,\ 20,\ 15,\ 6,\ 1, \\
1 & 7,\ 21,\ 35,\ 35,\ 21,\ 7,\ 1. \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
1 & C_1^m,\ C_2^m,\ C_3^m \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Una vez escritas las dos primeras líneas horizontales (ó aun sólo la primera), las demás se deducen por la fórmula:

$$C_n^{m+1} = C_{n-1}^m + C_n^m \qquad (64)$$

[Véase el párrafo 69, fórmula (61)].

El teorema entrañado en la anterior fórmula se verifica en el cuadro anterior, pues cada número de dicho cuadro es igual á la suma del que está arriba de él, más el de la izquierda de este último.

Construído por esta regla el triángulo aritmético, haremos abstracción de la primera columna separándola con una raya.

Como los diferentes números de combinaciones que sirven de coeficientes en el desarrollo del binomio comienzan en el segundo término, se ve de una manera general que

la mª línea horizontal encierra los números de combinaciones de m objetos tomados 1 á 1, 2 á 2, 3 á 3, ..., m á m; mientras la nª columna vertical encierra los números de combinaciones n á n de n, $n+1$, $n+2$, ... objetos.

En el punto de cruzamiento de la mª línea y de la nª columna, se tendrá el número de combinaciones de m objetos n á n, es decir, C_n^m.

Los términos de la primera columna vertical del triángulo (haciendo abstracción de la columna de los unos) se llaman *números naturales ó números figurados de primer orden;* los de la segunda columna, *triangulares ó figurados de segundo orden;* los de la tercera columna, *piramidales ó figurados de tercer orden;* ......, los de la nª columna, *figurados de nº orden.*

Si tomamos un número cualquiera del cuadro anterior, tendremos sucesivamente escogiendo por ejemplo el número 21 de la segunda columna:

$$21 = 15+6 = 6+5+10 = 6+5+4+6 = 6+5+4+3+3 = 6+5+4+3+2+1$$

Luego *un número cualquiera de una columna dada, es igual á la suma de los números de la columna precedente que están situados arriba de la horizontal á que pertenece el número escogido en la segunda columna.*

En otros términos: *el pº número figurado de nº orden es igual á la suma de los* p *números figurados de* (n — 1) *orden que le son superiores.*

Admitiendo que el pº número figurado de nº orden pertenece á la mª línea horizontal, este resultado corresponde justamente á la fórmula general (51′) párrafo 56, que es:

$$C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^{m-2} + \ldots\ldots + C_{n-1}^{n-1}$$

que es propiamente el fundamento del triángulo aritmético.

79. Del párrafo 78 y de lo dicho respecto al punto de cruzamiento de la mª línea y la nª columna, se deduce que el rango de una línea horizontal expresado por su primer término, es el exponente del número de combinaciones que ahí se encuentran y el rango de una columna vertical marcada evidentemente por el de la línea horizontal en que empieza, es el índice de los números de combinaciones que encierra.

Así pues, la nª columna vertical que contiene los números figurados de nº orden, comienza en la nª línea horizontal.

El pº número de esta nª columna vertical pertenece, pues, á la $n+p$ª-1 línea horizontal, y tiene por expresión:

$$C_n^{n+p-1} = C_{p-1}^{n+p-1}$$

(Véase párrafo 50-2º)

es decir:

$$\frac{(n+p-1)(n+p-2)(n+p-3)\ldots\ldots p}{1.2.3\ldots\ldots n} = \frac{(n+p-1)(n+p-2)\ldots\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots\ldots(p-1)} \quad (65)$$

expresión del pº número figurado del nº orden.

Por ejemplo, el cuarto número figurado del cuarto orden, sería sustituyendo $p=4$, $n=4$, el número 35, como puede verse en la tabla.

APLICACIONES.

80. I. *Valor de la suma de los* m *primeros números enteros* (naturales).

Como la suma de los m primeros números figurados de primer orden, es el mº número figurado del segundo orden, sustituyendo:

$$p=m, \quad n=2,$$

en la fórmula (65) nos daría:

$$\frac{m(m+1)}{2}$$

resultado conocido, párrafo 75.

II. *Suma de los cuadrados de los* m *primeros números enteros.*

Se tiene la identidad:

$$x^2=x+x(x-1)=x+\frac{2x(x-1)}{2}$$

Valiéndonos de esta transformación, si comparamos la anterior relación con la obtenida en la Aplicación I, reemplazando sucesivamente x por 1.2.3...... m, veremos claramente que el valor pedido es igual á la suma de los m primeros números naturales, más el doble de la suma de los $m-1$ números figurados de segundo orden respectivamente (es decir del $m-1^{mo}$ número figurado de tercer orden).

Así pues, haciendo en (65) $p=m-1$, $n=3$, resulta:

$$\frac{m(m+1)(m-1)}{1.2.3}$$

y el valor buscado será:

$$S_2=\frac{m(m+1)}{2}+\frac{m(m+1)(m-1)}{3}=\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

III. *Suma de los cubos de los* n *primeros números.*

Se tiene idénticamente:

$$x^3=x+x(x^2-1)=x+\frac{6(x-1)x(x+1)}{1.2.3}$$

Comparándola con la precedente fórmula y reemplazando á x por 1.2.3...... m, veremos que la suma pedida es igual á la suma de los m primeros números naturales, más seis veces la suma de los $m-1$ primeros números figurados de tercer orden ó sea seis veces el $m-1^{mo}$ número figurado de cuarto orden que se obtiene suponiendo en fórmula (65):

$$p=m-1, \quad n=4,$$

lo que da:

$$\frac{(m+2)(m+1)m(m-1)}{1.2.3.4}$$

finalmente:

$$S_3=\frac{m(m+1)}{2}+\frac{(m+2)(m+1)m(m-1)}{4}=\left[\frac{m(m+1)}{2}\right]^2 \qquad (66)$$

Es decir que la suma de los cubos *es igual al cuadrado de la suma de estos* m *primeros números.*

En conclusión vemos que el triángulo aritmético permite determinar las sumas de las potencias semejantes de los m primeros números.

PILAS DE BALAS.

* 81. En los parques de artillería se *apilan* los proyectiles, las bombas, etc.; pudiendo ser los primeros *cilindro-cónicos* si se destinan á piezas rayadas, ó *esféricos* si las piezas son de *alma lisa.*

Los primeros admiten una disposición, los segundos varias, y el problema consiste en calcular rápidamente el número de proyectiles del mismo calibre contenidos en una pila determinada.

I. **Pilas de proyectiles cilindro-cónicos.** Para construir esta clase de pilas se forma una primera hilera de m proyectiles reposando en el suelo y tocándose á lo largo de una generatriz cilíndrica.

Encima se coloca una hilera de $m-1$ proyectiles llenando cada uno el hueco que hay entre dos de la hilera inferior. Otra tercera hilera se sobrepone compuesta de $m-2$ proyectiles, etc., hasta colocar finalmente 3.2 y 1 proyectil.

La figura obtenida así será un triángulo equilátero cuyo lado contiene m proyectiles.

Al lado se colocan otras capas semejantes, es decir, otros triángulos equiláteros, y el aspecto total de la pila es un prisma triangular reposando sobre una de sus caras.

Para calcular el número total de proyectiles tendremos que hacer el siguiente raciocinio.

Una capa sola contiene:

$$m+(m-1)+(m-2)+\ldots\ldots+3+2+1=\frac{m+1}{2}m=\frac{m(m+1)}{2}$$

que es la suma de los m primeros números naturales ó el mº número figurado de segundo orden que por esto se han llamado *triangulares.*

Si hay p capas, se tendrá para el número total:

$$N=p.\frac{m(m+1)}{2}$$

Para usar la fórmula se contará en el suelo el número m de proyectiles en anchura y el número p de proyectiles en longitud.

Si hay 6 capas y 10 proyectiles en anchura, el número total sería:

$$N=330$$

II. **Proyectiles esféricos.** Dan lugar á tres clases de pilas:

1º, triangulares; 2º, de base cuadrada; 3º, de base rectangular.

1º *Pila triangular.* La base y las capas sucesivas, superpuestas y horizontales, son triangulares; la primera contiene m proyectiles por lado; la segunda, $m-1$; la tercera, $m-2$, etc...... la superior sólo un proyectil.

Cada bala reposa sobre tres inferiores, partiendo de la segunda capa en adelante, y la pila completa semeja una pirámide triangular ó tetraedro regular (siendo las aristas iguales y conteniendo cada una m proyectiles).

El número total de balas de la pila es igual á la suma de los números de balas de cada capa ó sea la suma de los m primeros números figurados de segundo orden, es decir, el m.º número figurado de tercer orden.

Luego el resultado final será:

$$\frac{m(m+1)(m+2)}{6}$$

fórmula que también se obtiene así:

Como cada lado de la primera capa tiene m balas, dicha capa tendrá:

$$\frac{m(m+1)}{2}=\frac{1}{2}(m^2+m)$$

Haciendo $m=1, 2, 3, \ldots\ldots, m$ las sucesivas capas contendrán:

$$\tfrac{1}{2}(1^2+1),\ \tfrac{1}{2}(2^2+2),\ \tfrac{1}{2}(3^2+3), \ldots\ldots,\ \tfrac{1}{2}(m^2+m)$$

y la suma total:

$$\begin{aligned} S&=\tfrac{1}{2}(1^2+1)+\tfrac{1}{2}(2^2+2)+\tfrac{1}{2}(3^2+3)+\ldots\ldots+\tfrac{1}{2}(m^2+m)\\ &=\tfrac{1}{2}(1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots+m^2)+\tfrac{1}{2}(1+2+3+\ldots\ldots+m)\\ &=\frac{m(m+1)(2m+1)}{12}+\frac{m^2+m}{4}=\frac{m(m+1)(m+2)}{6}\end{aligned}$$

Esto explica el título de *piramidales* dado á los números figurados de tercer orden.

Siendo 1 el número de balas de la primera capa:

$1+2=3$ será el número para la segunda.
$1+2+3=6$ „ „ „ „ „ tercera.
$1+2+3+4=10$ „ „ „ „ „ cuarta.
....

$$1+2+3+\ldots\ldots+m=\frac{m(m+1)}{2} \text{ será el número para la } m.^a$$

cada capa se forma por la adición de los números naturales.

De aquí, como comprobación, nos vemos conducidos á formar la tabla de números figurados:

Aristas......	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10.........	*números naturales.*
Capas.......	1,	3,	6,	10,	15,	21,	28,	36,	45,	55.........	„ *triangulares.*
Pila.........	1,	4,	10,	20,	35,	56,	84,	120,	165,	220.........	„ *piramidales.*

La primera línea expresa cuántas balas hay en cada arista ó el número de capas de la pila.

La segunda el número de balas contenidas en las diversas capas.

La tercera el número total de balas de la pila.

Así pues, en una pila de 10 capas hay 220 balas, resultado conforme al que resulta de sustituir el valor $m=10$ en:

$$S=\frac{m(m+1)(m+2)}{6}$$

lo que da:

$$S=220$$

2.ª *Pila de base cuadrada.* Las capas son cuadrados superpuestos cuyos lados sucesivamente van conteniendo una bala menos que los anteriores hasta rematar en una sola bala.

Cada bala reposa sobre cuatro y la pila semeja una pirámide cuadrangular de base cuadrada.

Como la arista del cuadrado más inferior tiene m balas, habrá m^2 en el cuadrado, habrá $(m-1)^2$ en el siguiente, $(m-2)^2$ en el superpuesto á éste, ..., 2^2 en el penúltimo y 1^2 en el último y superior, luego se tendrá llamando N el número de balas:

$$N=1^2+2^2+\ldots\ldots+(m-1)^2+m^2=S_2=\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

pues es el valor de la suma de los cuadrados de los m primeros números.

La tabla que puede reemplazar á la fórmula será:

Aristas...........	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8...........
Capas.............	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64...........
Pila...............	1,	5,	14,	30,	55,	91,	140,	204...........

La primera línea marca el número de capas ó de balas que entran en cada arista.

La segunda, el número de balas que comprende cada capa.

La tercera, el número total de balas de la pila.

Si pues se tiene una pila de 6 capas, contendrá 91 balas.

En efecto, sustituyendo $m=6$ en:

$$S_2=\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

resulta:

$$S_2=91$$

3.º *Pilas rectangulares.* La base es un rectángulo de m balas de largo por $n<m$ de ancho.

Llamaremos:

$$m-n=p$$

La primera capa es un rectángulo conteniendo n hileras de m balas cada una.

La segunda capa horizontal, en la que cada bala descansa en cuatro inferiores, tendrá $n-1$ hileras con $m-1$ balas cada una.

La tercera capa, $n-2$ hileras con $m-2$ balas, etc.

Finalmente, la última que es la n.ª capa, contendrá $n-(n-1)=1$ hilera de $m-(n-1)=m-n+1$ balas, es decir, $p+1$ balas.

Comenzando, pues, en orden contrario:

La primera hilera tiene $p+1$ balas y reposa sobre dos hileras de $p+2$ balas, siguiendo tres hileras con $p+3$ balas, cuatro hileras con $p+4$ balas, etc., en fin, n hileras con $p+n$ balas.

La pila, pues, tiene el aspecto de un prisma triangular descansando sobre una cara y truncado regularmente en sus dos extremidades, ó bien un techo de cuatro aguas.

Reasumiendo, el número N total de balas es:

$$\begin{aligned} N&=p+1+2(p+2)+3(p+3)+\ldots\ldots+n(p+n)\\ &=p(1+2+3+\ldots\ldots+n)+(1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots+n^2)\\ &=\frac{pn(n+1)}{2}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\ &=\frac{n(n+1)(3p+2n+1)}{6}=\frac{n(n+1)(3m-n+1)}{6}\end{aligned}$$

Si se supone:

$$m = n$$

se obtendrá evidentemente la fórmula para el caso de la pila de base cuadrada.

Para formar una tabla de este caso, es preciso dar un valor á la capa superior $p+1$, supongamos 10 y se tendrá:

Aristas...........	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10...........	
Capas............	10,	22,	36,	52,	70,	90,	112,	136,	162,	190...........	
Pila..............	10,	32,	68,	120,	190,	280,	392,	528,	690,	880...........	

La primera línea marca el número de capas de la pila y el de balas de cada arista lateral; además el rango de capas de una pila dada.

La segunda, el número de balas de cada capa de la pila; esta línea se forma en virtud de la fórmula:

$$n(p+n)$$

en la que

$$p = 9 \quad \text{y} \quad n = 1, 2, 3, \ldots\ldots$$

La tercera se forma fácilmente.

Como expresa el número total de balas de la pila, el número 880, por ejemplo, indica que hay 880 balas en una pila oblonga de 10 capas.

La fórmula

$$\frac{n(n+1)(3p+2n+1)}{6}$$

produce el mismo valor 880 si se sustituye en ella:

$$p = 9, \quad n = 10$$

OBSERVACIONES.

*82. I. La pila de base rectangular puede pues considerarse como la unión de una pila de base cuadrada cuyo lado tiene n balas y un prisma triangular análogo (salvo la oblicuidad) al de los proyectiles cilindro-cónicos, lo que geométricamente es evidente (Comberousse). (Véase el valor de N, Pilas rectangulares, 3º)

II. Si la pila es truncada, se la supone completa y el valor pedido es la diferencia entre la pila entera y la añadida.

Por ejemplo: sea una pila rectangular truncada con m por n balas en la base y $m'+1$ por $n'+1$ en la capa superior.

Le falta para ser completa las balas comprendidas en la pila rectangular completa que tuviera m' por n' balas en su base, luego llamando N el número de balas del trozo de pila propuesto:

$$N = \frac{n(n+1)(3m-n+1)}{6} - \frac{n'(n'+1)(3m'-n'+1)}{6}$$

III. Observaremos que las fórmulas anteriores las hallaremos como aplicaciones en el "Cálculo de las Diferencias."

IV. Las capas de una pila triangular partiendo de la que reposa sobre el suelo, contienen sucesivamente [cambiando m en $m-1$, $m-2$, ... en la fórmula $\frac{m(m+1)}{2}$]:

$$\frac{m(m+1)}{2} = \tfrac{1}{2}m^2 + \tfrac{1}{2}m \text{ balas}$$

$$\frac{(m-1)(m-1+1)}{2} = \tfrac{1}{2}(m-1)^2 + \tfrac{1}{2}(m-1) \text{ balas}$$

$$\frac{(m-2)(m-2+1)}{2} = \tfrac{1}{2}(m-2)^2 + \tfrac{1}{2}(m-2) \quad \text{,,}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$1 = \tfrac{1}{2}1^2 + \tfrac{1}{2}1 \text{ balas}$$

Sumando se tendrá, escribiendo la suma simbólicamente:

$$S = \tfrac{1}{2}\sum_{m=1}^{m=m} m^2 + \tfrac{1}{2}\sum_{m=1}^{m=m} m \qquad (67)$$

sustituyendo:

$$S = \frac{1}{2}\,\frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + \frac{1}{2}\,\frac{m(m+1)}{2} = \frac{m(m+1)(m+2)}{6}$$

que es la fórmula para la pila triangular hallada por un nuevo procedimiento independiente de las propiedades del triángulo aritmético, etc.