CAPÍTULO V.

NOCIONES SOBRE LAS SERIES DE TÉRMINOS REALES.

83. Tan capital es la importancia de este estudio, que convendremos en dividirlo en cuatro partes:

1ª Método de los límites.
2ª Consideraciones generales sobre las series.
3ª Teoremas de convergencia.
4ª Aplicaciones.

MÉTODO DE LOS LÍMITES.

84. Cuando una magnitud variable x se aproxima independientemente de una constante A, de suerte que el valor absoluto de la diferencia $A - x$ pueda quedar menor que cualquier cantidad dada, A es el *límite* de x y se tendrá:

$$\text{lím}\, x = A$$

85. I. Una cantidad variable no puede tender hacia dos límites distintos.

Supongamos que esto acontezca y sean a y b los límites tales que $a - b = d$, y sea $\delta < \frac{d}{2}$.

Los intervalos comprendidos entre $a + \delta$ y $a - \delta$ por un lado, y $b + \delta$, $b - \delta$ por otro, no tienen nada de común.

Las cantidades $b - \delta$, $b + \delta$, $a - \delta$, $a + \delta$, están colocadas en orden de magnitud, pues la diferencia entre dos términos intermedios es igual á $a - b - 2\delta$ ó $d - 2\delta$, cantidad positiva por hipótesis. Así pues, una cantidad variable cuyo *lím* fuese a, caería entre $a + \delta$ y $a - \delta$, y si b fuera el *límite* entre $b + \delta$ y $b - \delta$. Así pues, la cantidad variable considerada acabaría tendiendo hacia sus dos límites diversos a y b por estar comprendida á la vez en dos regiones opuestas, lo que es imposible.

Este teorema casi axiomático puede enunciarse así:

Si dos cantidades son constantemente iguales entre sí, siempre y cualquiera que sea el estado de magnitud que reciban, si una tiende hacia un límite la otra tiende al mismo límite.

Cuando una cantidad tiene por límite cero, se dice que es *infinitamente pequeña* tendiendo al límite.

Corolario. De lo anterior se deduce que *la diferencia entre una variable y su límite tendiendo á cero, es siempre un infinitamente pequeño.*

Si la cantidad crece hasta llegar á una magnitud mayor que toda magnitud asignable, la cantidad es infinitamente grande y simbólicamente se escribe $\frac{m}{0}$ ó ∞.

Estos nombres, como se comprende, se adoptan para más rapidez en el lenguaje.

Sea $y = \frac{a}{x-a}$, siendo a positiva y variable.

Dando á x un valor poco diverso de a, pongamos $x = a \pm \varepsilon$, siendo ε tan pequeño como se quiera, entonces $y = \frac{a}{\pm \varepsilon}$.

Como ε es infinitamente pequeño, y es infinitamente grande, positivo ó negativo, según lo sea ε, así el infinito puede ser positivo ó negativo.

86. Teorema fundamental. Sean $x, y, z......$ magnitudes variables que tienden hacia sus límites $a, b, c......$ y consideremos una ecuación cualquiera entre estas magnitudes y que tendrá la forma:

$$F(x, y, z......) = \varphi(x, y, z)$$

Admitiremos que las funciones F y φ permanecen continuas al menos cuando las variables $x, y, z......$ están cercanos á sus respectivos límites $a, b, c......$ Las diferencias de $x, y, z......$ á sus límites, podrán entonces ser bastante pequeñas para que las funciones $F(x, y, z......)$, $\varphi(x, y, z......)$ difieran ellas mismas tan poco como se quiera de $F(a, b, c......)$ y $\varphi(a, b, c......)$ que de consiguiente representan los límites de los dos miembros de la ecuación.

Como los *límites* de dos cantidades iguales son iguales, se tendrá finalmente:

$$F(a, b, c......) = \varphi(a, b, c......)$$

Así pues, cuando se desea obtener una relación entre cantidades consideradas como límites de cantidades variables más sencillas, se busca ante todo una relación entre estas cantidades variables y después se sustituye á las cantidades variables sus límites para obtener la relación que liga á las últimas.

Es decir: *cuando magnitudes variables tiendan hacia sus límites, toda función de estas variables tiende en general hacia la misma función de estos límites.*

Corolarios. 1º *Cuando varias cantidades variables tienden hacia sus límites, su suma ó diferencia tiene por límite la suma ó diferencia de los límites.*

2º *Su producto, el producto de estos límites.*

3º *Su cociente, el cociente de estos límites.*

4º *La potencia de una cantidad variable tiene por límite la misma potencia del límite de la cantidad* (siendo el exponente número finito) (1).

5º *La raíz de una cantidad variable tiene por límite la misma raíz del límite de esta cantidad.*

6º *El límite del producto de una variable por una constante es igual á ésta por el límite de aquélla.*

7º *El límite de una constante elevada á una función ó á una cantidad variable, es igual á la constante elevada al límite de la variable.*

Así pues:

$$\text{lím}\,(c^x) = c^{\text{lím}\, x} \ (2) \qquad (68)$$

(1) Entero ó fraccionario, positivo ó negativo.

(2) Siendo c una constante, se tiene llamando a el límite de x y α una cantidad infinitésima:

$$c^x = c^{a+\alpha} = c^a c^\alpha, \quad \text{lím}\,(c^x) = c^a c^0 = c^a = c^{\text{lím}\, x}$$

8º *El límite del logaritmo de una función ó cantidad variable es igual al logaritmo del límite de la variable.*

Así pues:

$$\text{lím}\,[\text{Log}\,(x)] = \text{Log}\,[\text{lím}\,(x)] \quad (^1) \qquad (69)$$

9º *El límite del seno de un arco variable es igual al seno del límite del arco mismo.*

Puede demostrarse así directamente:

$$\text{sen}\,x = \text{sen}\,(a+\alpha) = \text{sen}\,a\cos\alpha + \text{sen}\,\alpha\cos a$$
$$\text{lím}\,(\text{sen}\,x) = \text{sen}\,a = \text{sen}\,[\text{lím}\,(x)] \qquad (70)$$

Es inútil enunciar otros teoremas análogos.

87. TEOREMA. *Sean* $a_1, a_2, \ldots, a_n$; n *cantidades del mismo signo, y* $b_1, b_2, \ldots, b_n$; *n cantidades de signo cualquiera; la suma algebraica de los productos* $a_1 b_1, a_2 b_2, \ldots, a_n b_n$ *será igual á la suma de los factores* $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ *por una media entre los otros factores* $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$.

Poniendo

$$a_1 b_1 = \alpha_1, \quad a_2 b_2 = \alpha_2, \ldots, \quad a_n b_n = \alpha_n$$

y designando por A, B, la mayor y la menor de las fracciones

$$\frac{\alpha_1}{a_1}, \frac{\alpha_2}{a_2}, \ldots \frac{\alpha_n}{a_n}$$

las diferencias

$$A - \frac{\alpha_1}{a_1}, \quad A - \frac{\alpha_2}{a_2}, \ldots, \quad A - \frac{\alpha_n}{a_n}$$

y las

$$\frac{\alpha_1}{a_1} - B, \quad \frac{\alpha_2}{a_2} - B, \ldots, \quad \frac{\alpha_n}{a_n} - B$$

serán de idéntico signo, y como $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son cantidades del mismo signo, las diferencias incluidas en las series:

$$Aa_1 - \alpha_1, \quad Aa_2 - \alpha_2, \ldots, \quad Aa_n - \alpha_n, \quad \alpha_1 - Ba_1, \quad \alpha_2 - Ba_2, \ldots, \quad \alpha_n - Ba_n,$$

serán del mismo signo así como las sumas

$$A(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) - (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n),$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n - B(a_1 + a_2 + \ldots + a_n),$$

se infiere, pues, que las diferencias:

$$A - \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n}{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}, \quad \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n}{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n} - B$$

(1) Siendo e la base del sistema de logaritmos neperianos, se tiene $y = \text{Log}\,(x)$ y resultará:

$$e^y = x, \quad e^{\text{lím}\,y} = \text{lím}\,x$$

es decir:

$$\text{lím}\,y = \text{Log}\,[\text{lím}\,(x)],$$

luego

$$\text{lím}\,[\text{Log}\,(x)] = \text{Log}\,[\text{lím}\,(x)]$$

serán también del mismo signo, y siendo la *media* entre varias cantidades, la formada con ellas y comprendida entre la mayor y la menor se infiere que la fracción

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n}{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}$$

es media entre las fracciones:

$$\frac{\alpha_1}{a_1}, \frac{\alpha_2}{a_2}, \ldots, \frac{\alpha_n}{a_n}$$

Se puede, pues, escribir:

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n}{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n} = \text{media}\left(\frac{\alpha_1}{a_1}, \frac{\alpha_2}{a_2}, \ldots, \frac{\alpha_n}{a_n}\right)$$

Poniendo por $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sus valores $a_1 b_1, a_2 b_2, a_3 b_3, \ldots, a_n b_n$ y despejando, se tendrá:

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n = (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n) \times \text{media}\,(b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n)$$

ecuación que demuestra el teorema.

(Eduardo Prado.)

CONSIDERACIONES GENERALES SOBRE LAS SERIES.

88. Se llama *serie* una expresión compuesta de un número ilimitado de términos y si la serie es *regular*, se deducen unos de otros según cierta ley determinada.

Para conocer un término de la serie basta conocer su rango.

La expresión que hace conocer un término en función del rango que ocupa, es el *término general* de la serie.

Si se toman en una serie cierto número de términos, el conjunto de los que se dejan constituye el *resto* de la serie.

Podemos representar una serie así:

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{n-1} + u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+p-1} + u_{n+p} + \ldots$$

siendo entonces el *enésimo* término u_{n-1} y S_n la suma de los n primeros términos

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{n-1}$$

y en este caso

$$R_n = u_n + u_{n+1} + \ldots$$

Pueden suceder tres casos:

1º Si S_n, suma de los n primeros términos tiende hacia un límite cuando crece n indefinidamente, la serie es *convergente*, y si S es la suma de la serie:

$$S - S_n = R_n$$

2º Si S_n crece en valor absoluto cuando crece n indefinidamente, la serie es *divergente.*

3º Cuando S_n sin crecer indefinidamente no presenta límite fijo, pasando de un valor finito á otro, caprichosamente, sin detenerse en ninguno, cuando n crece sin fin, la serie es *indeterminada.*

Así pues, toda progresión geométrica *decreciente ilimitada* es *convergente;* y si *creciente é ilimitada, divergente.*

La serie

$$+1-1+1-1+1-1+1-1......$$

en que la suma de los n primeros términos pasa de 1 cuando n es impar, á cero cuando n es par, es *indeterminada.*

En la práctica, como se comprende, sólo las primeras tienen utilidad.

EJEMPLOS.

1º Sea la serie

$$1+x+x^2+x^3+....+x^{n-1}+\frac{x^n}{1-x} \qquad (71)$$

que proviene de la división $\frac{1}{1-x}$.

Si se tiene $x<1$, x^n puede ser tan pequeño como se quiera para n bastante grande, y la *serie* será *convergente* cambiándose en

$$1+x+x^2+......+x^{n-1}+...... \qquad (72)$$

cuyo límite es $S=\frac{1}{1-x}$.

Si $x>1$, x^n crecerá cuanto se quiera al crecer n, y la serie será *divergente.*

2º Sea

$$a+ax+ax^2+......+ax^{n-1}=S_n=\frac{a(1-x^n)}{1-x}=\frac{a}{1-x}-\frac{ax^n}{1-x} \qquad (73)$$

Si $x<1$, cuando n aumenta indefinidamente, $\frac{ax^n}{1-x}$ disminuye y se puede tomar á n bastante grande para que $\frac{ax^n}{1-x}$ sea tan pequeña como se quiera, la serie es *convergente.*

Si $x>1$, la serie es *divergente.*

No siempre es convergente una serie cuando sus términos convergen á cero, como sucede en la *serie armónica*

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+......+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1} \text{ (1)} \qquad (74)$$

cuyos términos decrecen sin fin.

Si partiendo de $\frac{1}{n}$ juntamos los n términos siguientes:

$$S_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+......+\frac{1}{2n}$$

Si todos los sumandos valiesen $\frac{1}{2n}$:

$$S_n=n\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}$$

pero como $n-1$ sumandos son mayores que $\frac{1}{2n}$:

$$S_n>\frac{1}{2}$$

(1) Véase la Aplicación II, párrafo 96, ó Comberousse, Geometría 137 y Álgebra Superior 364.

Agrupemos los términos de la serie de la manera siguiente:

$$\left.\begin{array}{l}1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+......+\frac{1}{16}\right)+ \\ \quad +......+\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+......+\frac{1}{2n}\right)+......\end{array}\right\} \qquad (76)$$

Pero se tiene:

$$1+\frac{1}{2}>\frac{1}{2},\ \frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{2},\ \frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{1}{2}, \text{ etc.}$$

La suma de los primeros términos de la serie considerada no tiende hacia determinado límite, pues tomando á n suficientemente grande, dicha suma crece más allá de todo límite y la serie será *divergente* (1).

La condición general de convergencia exige que las sumas:

$$S_n,\ S_{n+1},\ S_{n+2}......$$

se aproximen á un límite S. Así pues, las diferencias entre estas series pueden ser tan pequeñas como se quiera siendo n suficientemente grande.

Las diferencias entre las series serán:

$$S_{n+1}-S_n=u_n,\ S_{n+2}-S_n=u_n+u_{n+1},\ S_{n+3}-S_n=u_n+u_{n+1}+u_{n+2}, \text{ etc.}$$

Fijándonos en $S_{n+1}-S_n$, se concluye que tomando n suficientemente grande, los términos después de u_n serán tan pequeños como se quiera.

Como lo dicho para $S_{n+1}-S_n$ se aplica á $S_{n+2}-S_n$, $S_{n+3}-S_n$, etc., se deduce que cada una de las sumas

$$u_n+u_{n+1},\ u_n+u_{n+1}+u_{n+2}, \text{ etc.}$$

consideradas separadamente y cualquiera que sea el número de términos, deben ser tan pequeñas como se quiera para n suficientemente grande.

Con estas condiciones; S_n, S_{n+1}...... diferirán poco entre sí, tenderán á un mismo límite y sí habrá *convergencia.*

EJEMPLOS.

1º Sea

$$a+ax+ax^2+ax^3+......+ax^n+......$$

siendo ax^n el término general que puede ser el 1º, 2º, 3º, ... nº si se tiene:

$$n=0,\ 1,\ 2,\ ......$$

(1) Se llama serie *armónica* por el modo de formación de las series armónicas (véase Comberousse, obras citadas), pues la más sencilla progresión aritmética es:

$$\div 1.2.3......n.(n+1).(n+2)......$$

y la serie armónica que produce tiene términos recíprocos de éstos, luego será:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+......+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+......$$

Consideraremos este término sólo y le agregaremos después el siguiente, los dos siguientes, los tres siguientes, etc.

$$ax^n,\quad ax^n+ax^{n+1}=\frac{ax^n(1-x^2)}{1-x},\quad ax^n+ax^{n+1}+ax^{n+2}=\frac{ax^n(1-x^3)}{1-x},\ \text{etc.}$$

Si $x<1$, cada una de estas series puede ser tan pequeña como se quiera, tomando á n suficientemente grande y las condiciones de *convergencia* se verifican para la serie:

$$a+ax+ax^2+\ldots\ldots$$

2º Tomemos la serie:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots\ldots$$

si el término general es $\frac{1}{n+1}$, es claro que aumentando n disminuirá $\frac{1}{n+1}$; pero es preciso también que añadiendo á este término general un número cualquiera de términos, la suma pueda ser tan pequeña como se quiera, lo que no sucede, pues hemos visto que es $>\frac{1}{2}$; luego *no hay convergencia.*

EJEMPLO DE SERIES CONVERGENTES.

La identidad

$$u_0=(u_0-u_1)+(u_1-u_2)+\ldots\ldots+(u_{n-1}-u_n)+\ldots\ldots \qquad (77)$$

siendo

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ \ldots\ldots,\ u_n,\ \ldots\ldots$$

números sujetos sólo á la condición de que cuando n es suficientemente grande, u_n es infinitamente pequeño, encierra un gran número de *series convergentes,* puesto que su suma es conocida.

La suma de la serie es el primer miembro, los términos de la serie las diferencias del segundo, y como la suma de los n primeros términos se reduce á u_0-u_n que tiene por límite u_0 para n infinitamente grande, la serie es *convergente.*

EJEMPLOS.

1º Sean

$$u_0=1,\ u_1=x,\ u_2=x^2,\ u_3=x^3,\ \ldots\ldots,\ u_{n-1}=x^{n-1},\ u_n=x^n,\ \ldots\ldots$$

La ecuación anterior será:

$$1=(1-x)+(x-x^2)+(x^2-x^3)+\ldots\ldots+(x^{n-1}-x^n)+\ldots\ldots$$

de donde

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots\ldots+x^{n-1}+\ldots\ldots$$

que ya estudiamos.

2º Sean

$$u_0=1,\ u_1=\frac{1}{2},\ u_2=\frac{1}{3},\ u_3=\frac{1}{4},\ \ldots\ldots,\ u_{n-1}=\frac{1}{n},\ \ldots\ldots$$

La ecuación fundamental será:

$$1=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\ldots\ldots \qquad (78)$$

ó bien:

$$1=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots\ldots \qquad (79)$$

TEOREMAS DE CONVERGENCIA.

90. Dividiremos este estudio en cuatro partes:
1º Caracteres generales de convergencia.
2º Teoremas de convergencia en series compuestas de términos todos positivos.
3º Teoremas de convergencia en series cuyos signos son cualesquiera.
4º Teoremas de convergencia en series de signos alternados.

91. **Caracteres generales de convergencia.** TEOREMA I. *Para que una serie sea convergente es necesario y basta que para* n *bastante grande, la suma de los* p *términos que siguen á los* n *primeros sea menor en valor absoluto á una cantidad dada tan pequeña como se quiera y que tenga por límite cero cuando crece* n *indefinidamente y asimismo* p.

Sea la serie:

$$S=u_0+u_1+u_2+u_3+\ldots\ldots+u_{n-1}+u_n+u_{n+1}+\ldots\ldots+u_{n+p-1}+u_{n+p}+u_{n+p+1}+\ldots\ldots \qquad (80)$$

como la suponemos convergente debe tenerse:

$$\text{lím } S_n=S$$

y á la vez

$$\text{lím } S_{n+p}=S$$

ó bien:

$$\text{lím } S_{n+p}-\text{lím } S_n=\text{lím }(S_{n+p}-S_n)=0 \qquad (81)$$

es decir:

$$\text{lím }(u_n+u_{n+1}+\ldots\ldots+u_{n+p+1})=0$$

La condición enunciada es pues *necesaria,* pues se verifica en toda la serie supuesta convergente.

Recíprocamente, estando satisfecha la ecuación (81), la serie propuesta es convergente.

Si no fuese convergente, sería divergente ó indeterminada.

Si fuere divergente, la suma de los términos crecería á medida que se tomaran más. Ahora bien, S_n es una cantidad finita y la suma de los p términos que siguen á los n primeros tiende á cero cualquiera que sea p, á medida que aumenta n; así pues, la serie no es *divergente.* Tampoco es indeterminada, porque entonces pasando de un valor finito A (que por grande que sea p puede hacerse corresponder con S_n) á otro finito B diverso del primero (que puede hacerse corresponder con S_{n+p}) la suma de los p términos subsecuentes de los n primeros valdrá B — A y no tendrá cero por límite, lo que es contrario á la condición que expresa la ecuación (81), la serie no es pues *indeterminada.*

En conclusión: será *convergente* y la condición enunciada *además de necesaria es suficiente.*

TEOREMA II. *Si una serie es convergente, cuando se toman sus términos positivamente y par-*