tiendo de cierto rango se multiplican sus términos por números finitos (positivos ó negativos) la nueva serie también será convergente.

Sea la serie convergente

$$u_0+u_1+u_2+\ldots\ldots+u_n+u_{n+1}+\ldots\ldots+u_{n+p}+\ldots\ldots \qquad (82)$$

Por hipótesis

$$\text{lím}\,(u_n+\ldots\ldots+u_{n+p})=0, \quad (n=\infty) \qquad (83)$$

Multiplicando los términos de la serie (82) partiendo del rango n (por ejemplo) por los números finitos A, B, ..., L, ... se originará la nueva serie:

$$u_0+u_1+u_2+\ldots\ldots+\mathrm{A}u_n+\mathrm{B}u_{n+1}+\ldots\ldots+\mathrm{L}u_{n+p}+\ldots\ldots \qquad (84)$$

y siendo positivos: $u_n, \ldots\ldots, u_{n+p}$; en virtud del teorema de las medias (párrafo 87) se tendrá:

$$\mathrm{A}u_n+\mathrm{B}u_{n+1}+\ldots\ldots+\mathrm{L}u_{n+p}=(u_n+u_{n+1}+\ldots\ldots+u_{n+p})\times \text{media}\,(\mathrm{A, B, C}, \ldots\ldots, \mathrm{L})$$

por ser (A, B, C, ..., L) finita y tenerse la condición (83), resulta:

$$\text{lím}\,(\mathrm{A}u_n+\mathrm{B}u_{n+1}+\ldots\ldots+\mathrm{L}u_{n+p})=0, \quad (n=\infty)$$

luego la serie (84) es *convergente.*

Corolarios. 1º Si una serie es convergente tomando sus términos positivamente, lo será si se consideran los términos con los signos que tienen en realidad, pues los signos de la serie primitiva se restituyen multiplicando los de la serie de términos positivos por $+1$ ó por -1, lo que no altera la *convergencia.*

2º Si una serie de términos positivos tiene sus términos respectivamente menores, partiendo de cierto rango que los de otra serie de términos también positivos; la primera es convergente si lo es la segunda.

Sean las dos series:

$$u_0+u_1+u_2+\ldots\ldots+u_n+\ldots\ldots \qquad (85)$$
$$v_0+v_1+v_2+\ldots\ldots+v_n+\ldots\ldots \qquad (86)$$

por hipótesis:

$$v_n<u_n, \quad v_{n+1}<u_{n+1}, \ldots\ldots, v_{n+p}<u_{n+p}$$

a fortiori:

$$v_n+v_{n+1}+\ldots\ldots+v_{n+p}<u_n+u_{n+1}+\ldots\ldots+u_{n+p}$$

mas se tiene como (85) es convergente:

$$\text{lím}\,(u_n+u_{n+1}+\ldots\ldots+u_{n+p})=0, \quad (n=\infty)$$

cualquiera que sea p; luego:

$$\text{lím}\,(v_n+v_{n+1}+\ldots\ldots+v_{n+p})=0$$

y la serie (86) es convergente.

91'. **Series de términos positivos.** *Como siendo positivos los términos de una serie, su suma crece cuando se toman más, la condición necesaria y suficiente para que la serie sea convergente, es pues que la suma de sus términos por más lejos que se la prolongue, no crezca más allá de todo límite.*

Así pues, si la serie dada tiene sus términos partiendo de cierto rango contantemente $\left\{\begin{matrix}\text{menores}\\ \text{mayores}\end{matrix}\right.$ que los correspondientes de otra serie $\left\{\begin{matrix}\text{convergente}\\ \text{divergente}\end{matrix}\right.$ de términos positivos será $\left\{\begin{matrix}\text{convergente}\\ \text{divergente}\end{matrix}\right.$.

Decimos partiendo de cierto rango, porque si se da á n un valor finito, la *convergencia* ó *divergencia* se manifiesta en los términos que constituyen á R_n y siguen al *enésimo* (es decir á S_n).

Generalmente se hace la comparación para las series convergentes con una progresión geométrica decreciente, ilimitada y convenientemente escogida, y para las divergentes con una progresión geométrica creciente ilimitada ó bien con la *serie armónica* [1].

Teorema III. *Si partiendo de cierto rango la relación de un término al precedente es constantemente* $\left\{\begin{matrix}\text{menor}\\ \text{mayor}\end{matrix}\right.$ *que un número fijo* K $\left\{\begin{matrix}\text{menor}\\ \text{mayor}\end{matrix}\right.$ *que la unidad, la serie será* $\left\{\begin{matrix}\text{convergente}\\ \text{divergente}\end{matrix}\right.$.

Sea la serie:

$$u_0+u_1+u_2+u_3+\ldots\ldots+u_{n-1}+u_n+u_{n+1}+\ldots\ldots \qquad (87)$$

Si del término $(n+1)$ en adelante, se tiene:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}<\mathrm{K}, \quad \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}}<\mathrm{K}, \quad \frac{u_{n+3}}{u_{n+2}}<\mathrm{K}, \ldots\ldots$$

resultará:

$$u_{n+1}<\mathrm{K}u_n, \quad u_{n+2}<\mathrm{K}u_{n+1},$$

y *a fortiori:*

$$u_{n+2}<\mathrm{K}^2u_n, \quad u_{n+3}<\mathrm{K}u_{n+2}$$

y *a fortiori:*

$$u_{n+3}<\mathrm{K}^3u_n, \ldots\ldots$$

Luego del término $n+1$ en adelante los términos de la serie (87) son menores que los sucesivos de la progresión geométrica decreciente é ilimitada

$$u_n+\mathrm{K}u_n+\mathrm{K}^2u_n+\mathrm{K}^3u_n+\ldots\ldots$$

y será convergente.

Inversamente, si se tiene:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}>\mathrm{K}, \quad \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}}>\mathrm{K}, \quad \frac{u_{n+3}}{u_{n+2}}>\mathrm{K}, \ldots\ldots$$

resulta:

$$u_{n+1}>\mathrm{K}u_n, \quad u_{n+2}>\mathrm{K}^2u_n, \quad u_{n+3}>\mathrm{K}^3u_n, \ldots\ldots$$

y la serie propuesta, del término $n+1$ en adelante, tiene sus términos mayores que los de la progresión geométrica creciente ilimitada

$$u_n+\mathrm{K}u_n+\mathrm{K}^2u_n+\ldots\ldots$$

y será divergente. Este teorema es debido á D'Alembert.

Corolario I. *El límite superior del error que se comete conservando sólo* n *términos en la serie dada, es igual al primer término despreciado, dividido por la diferencia que hay entre la unidad y el número fijo* K.

Si sólo se conservan n términos en la serie, el resto $\mathrm{R}_n=\mathrm{S}-\mathrm{S}_n$ es menor que el límite de la suma de los términos de la progresión geométrica decreciente ilimitada:

$$u_n+\mathrm{K}u_n+\mathrm{K}^2u_n+\ldots\ldots=\frac{u_n}{1-\mathrm{K}}$$

[1] Una serie de términos positivos no puede ser indeterminada evidentemente.

Teorema IV. *Cuando en una serie la relación* $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ *tiende hacia un límite determinado* l *á medida que crece* n *indefinidamente, la serie será convergente ó divergente según que* l *es menor ó mayor que la unidad.*

En el primer caso puede escogerse entre l y 1 un número fijo K, entonces <1, abajo del cual caerá la relación $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tendiendo á su limite l, la serie será convergente (teorema III).

En el segundo caso puede escogerse entre l y 1 un número fijo K, entonces >1, arriba del cual caerá la relación $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tendiendo á su límite l, la serie divergente (teorema III, segunda parte).

Teorema V. *El límite* l *puede ser igual á la unidad y hay que distinguir dos casos.*

1º La relación $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ puede aproximarse á $l=1$ quedando superior á este límite, la serie será divergente (párrafos 88).

2º La relación $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ puede aproximarse á $l=1$ quedando siempre inferior á este límite, entonces hay incertidumbre. Los términos de la serie van decreciendo á partir de cierto rango; pero su suma va aumentando y se ignora de antemano si este crecimiento se produce sin límites.

En conclusión: *Si partiendo de cierto rango y al crecer* n *indefinidamente la relación* $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ *tiende hacia un límite igual á 1, la serie es divergente si esta relación queda siempre superior á su límite; pero cuando queda constantemente inferior á este límite, hay incertidumbre, pudiendo ser la serie convergente ó divergente.*

N. B.—Cuando se trata de una serie ordenada respecto á las potencias de una variable, los valores especiales de ésta deciden la convergencia ó la divergencia.

Sea

$$A_0+A_1x+A_2x^2+\dots\dots+A_nx^n+\dots\dots$$

se tiene entonces

$$L=\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\frac{A_nx^n}{A_{n-1}x^{n-1}}=\lim\frac{A_n}{A_{n-1}}x$$

y llamando

$$\lim\frac{A_n}{A_{n-1}}=l,\quad (n=\infty)$$ [1]

se tendrá:

1º Si $lx<1$, ó bien $x<\frac{1}{l}$ la serie será convergente (teorema IV).

2º Para valores de x comprendidos entre $+\frac{1}{l}$ y $-\frac{1}{l}$ la serie será convergente (teorema II, corolario 1º), pues una serie convergente cuando sus términos son positivos, lo es igualmente cuando se toma un cierto número de ellos negativamente.

3º Si $lx=1$ ó $x=\pm\frac{1}{l}$ hay incertidumbre; pero si partiendo de cierto rango $\frac{A_n}{A_{n-1}}$ queda superior á l, $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ quedará superior á $lx=1$ y la serie será divergente para $x=\frac{1}{l}$ (teorema V).

Lo relativo á las series de la especie que acabamos de estudiar subsiste para los teoremas análogos á los precedentes que vamos á demostrar más adelante.

Teorema VI. *Si partiendo de cierto rango la expresión*

$$u_n^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{u_n}$$

queda constantemente menor que un número fijo K *menor que la unidad, la serie es convergente, y si queda contantemente superior á un número fijo* $K>1$, *es divergente.*

[1] Es decir, llamando l el límite de la relación $\frac{A_n}{A_{n-1}}$ cuando n crece indefinidamente.

Por la primera hipótesis:

$$\sqrt[n]{u_n}<K \quad \text{ó} \quad u_n<K^n$$
$$\sqrt[n+1]{u_{n+1}}<K \quad \text{ó} \quad u_{n+1}<K^{n+1}$$
$$\sqrt[n+2]{u_{n+2}}<K \quad \text{ó} \quad u_{n+2}<K^{n+2}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

resulta que partiendo de u_n, los términos sucesivos de la serie considerada quedan menores que los de la progresión geométrica decreciente é ilimitada:

$$\div K^n:K^{n+1}:K^{n+2}:\dots\dots$$

y la serie es *convergente* (párrafo 91').

El límite del error que se comete tomando sólo n términos, es $<\frac{K^n}{1-K}$.

En segundo lugar se tiene:

$$\sqrt[n]{u_n}>K \quad \text{ó} \quad u_n>K^n$$
$$\sqrt[n+1]{u_{n+1}}>K \quad \text{ó} \quad u_{n+1}>K^{n+1}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Partiendo de u^n, los términos sucesivos de la serie considerada son mayores que los términos de la progresión geométrica creciente é ilimitada:

$$\div K^n:K^{n+1}:K^{n+2}:\dots\dots$$

y la serie es divergente. Este teorema se debe á Cauchy.

Como de ordinario $\sqrt[n]{u^n}$ tiende á un límite determinado cuando n crece indefinidamente (véanse teoremas III, IV y V), resulta:

Teorema VII. *Cuando en una serie la expresión* $\sqrt[n]{u_n}$ *tiende á un límite determinado* l *cuando* n *crece indefinidamente, la serie es convergente ó divergente según que* l *sea menor ó mayor que la unidad. Cuando* $l=1$, *la serie es divergente si* $\sqrt[n]{u_n}$ *queda constantemente superior á la unidad (partiendo de cierto rango); pero cuando queda inferior constantemente hay incertidumbre y la serie puede ser convergente ó divergente.*

Corolario. Las expresiones

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \quad \text{y} \quad \sqrt[n]{u_n}$$

tienen el mismo límite. Suponiendo:

$$\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=l,\quad \lim\sqrt[n]{u_n}=l_1$$

en la serie

$$u_0+u_1+u_2+\dots\dots+u_n+\dots\dots$$

basta probar que $l=l_1$.

Valiéndonos de la serie auxiliar

$$u_0+u_1x+u_2x^2+u_3x^3+\dots\dots+u_nx^n+\dots\dots \qquad (88)$$

los dos *límites* l y l_1 se habrán multiplicado por x (teorema V, N. B.)

La serie (88) será convergente ó divergente según que se tenga $lx<1$, es decir, $x<\frac{1}{l}$ ó bien $l_1x>1$, es decir, $x>\frac{1}{l_1}$. Si no se tiene $\frac{1}{l}=\frac{1}{l_1}$, es decir, $l=l_1$, se podría atribuir á x valores comprendidos entre $\frac{1}{l}$ y $\frac{1}{l_1}$, y para estos valores especiales la serie auxiliar sería á un mismo tiempo *convergente* y *divergente* (teor. III y VI), lo que es absurdo.

Teorema VIII. *Si partiendo de cierto rango la relación*

$$\frac{\log \frac{1}{u_n}}{\log n}$$

es constantemente mayor que K *número fijo mayor que la unidad, la serie es convergente, y si esta relación es constantemente menor que* K, *número fijo menor que la unidad, la serie es divergente.*

Por el supuesto se tiene:

$$\frac{\log \frac{1}{u_n}}{\log n} > \mathrm{K}$$

ó bien:

$$\log \frac{1}{u_n} > \mathrm{K} \log n \quad \text{ó} \quad \log \frac{1}{u_n} > \log (n)^{\mathrm{K}}$$

de donde

$$\frac{1}{u_n} > n^{\mathrm{K}}$$

ó bien:

$$u_n < \frac{1}{n^{\mathrm{K}}}, \qquad u_{n+1} < \frac{1}{(n+1)^{\mathrm{K}}}$$

y como la serie

$$\frac{1}{n^{\mathrm{K}}} + \frac{1}{(n+1)^{\mathrm{K}}} + \ldots\ldots \text{ (1)}$$

es convergente, puesto que $\mathrm{K} > 1$, lo será la propuesta.

De una manera análoga, si

$$\frac{\log \frac{1}{u_n}}{\log n} < \mathrm{K} \qquad (\mathrm{K} < 1)$$

la serie es *divergente.*

Teorema IX. *Cuando en una serie la relación*

$$\frac{\log \frac{1}{u_n}}{\log n}$$

tiende á un límite determinado l *(cuando* $\mathrm{n} = \infty$ *), la serie es* $\left\{\begin{smallmatrix}\text{convergente}\\ \text{divergente}\end{smallmatrix}\right.$ *según que* $\left\{\begin{smallmatrix}l>1\\ l<1\end{smallmatrix}\right.$. *Si* $\mathrm{l} = 1$ *la serie es divergente si la relación considerada constantemente queda* < 1 *y si constantemente queda mayor que la unidad, hay incertidumbre, y la serie puede ser convergente ó divergente.*

Teorema X. *Si en dos series de términos positivos*

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_n + \ldots\ldots \qquad (89)$$

$$v_0 + v_1 + v_2 + \ldots\ldots + v_n + \ldots\ldots \qquad (90)$$

constantemente se tiene partiendo de cierto rango

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} < \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

si (89) *es convergente lo será* (90).

(1) Véase la aplicación X, párrafo 96.

Si se tiene al contrario

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} > \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

la divergencia de (89) *conduce á admitir la divergencia de* (90).

En el primer caso se tiene:

$$v_{n+1} < u_{n+1} \frac{v_n}{u_n}$$

luego:

$$v_{n+2} < u_{n+2} \frac{v_{n+1}}{u_{n+1}} \quad \textit{a fortiori} \quad v_{n+2} < u_{n+2} \frac{v_n}{u_n}$$

$$v_{n+3} < u_{n+3} \frac{v_{n+2}}{u_{n+2}} \quad \textit{a fortiori} \quad v_{n+3} < u_{n+3} \frac{v_n}{u_n}$$

Como la serie

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_n + u_{n+1} \frac{v_n}{u_n} + u_{n+2} \frac{v_n}{u_n} + \ldots\ldots$$

es convergente (teorema II), se infiere de consiguiente (teorema II, corolario 2º) que la serie (90) es convergente.

La segunda parte es fácil de demostrar.

Teorema XI. *Si los términos de una serie*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots + u_n + \ldots\ldots \qquad (91)$$

son positivos y decrecen sin cesar, la serie considerada y la nueva serie

$$u_1 + a u_a + a^2 u_{a^2} + a^3 u_{a^3} + \ldots\ldots + a^n u_{a^n} + \ldots\ldots \qquad (92)$$

son á la par convergentes ó divergentes. (Siendo cualquiera el número entero a y formando los multiplicadores é índices $1, a, a^2, a^3, \ldots\ldots, a^n \ldots\ldots$, una progresión geométrica cuyo primer término es 1 y la razón es a.)

Sea (91) convergente y $a^n u_{a_n}$ el término general de (92); como los términos de (91) van decreciendo, la suma de los términos sucesivos de la serie

$$u_{a^{n-1}+1} + u_{a^{n-1}+2} + u_{a^{n-1}+3} + \ldots\ldots + u_{a^n}$$

es mayor que u_{a_n} tomado tantas veces como términos hay en la serie considerada y como de $u_{a^{n-1}+1}$ á u_{a^n} hay un número de términos expresado por:

$$a^n - a^{n-1} = a^{n-1}(a-1)$$

Puede escribirse multiplicando en los dos miembros por a:

$$u_{a^n} a^n (a-1) < a(u_{a^{n-1}+1} + \ldots\ldots + u_{a^n})$$

y *a fortiori* como $a - 1$ es número entero:

$$a^n u_{a^n} < a(u_{a^{n-1}+1} + \ldots\ldots + u_{a^n})$$

Haciendo $n=2, 3, 4, \ldots\ldots, n, \ldots\ldots$ en esta desigualdad:

$$a^2 u_{a^2} < a(u_{a+1} + u_{a+2} + u_{a+3} + \ldots\ldots + u_{a^2}$$
$$a^3 u_{a^3} < a(u_{a^2+1} + u_{a^2+2} + u_{a^2+3} + \ldots\ldots + u_{a^3})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a^n u_{a^n} < a(u_{a_{n-1}+1} + \ldots\ldots + u_{a^n})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

poniendo además las identidades:

$$u_1 = u_1, \quad a u_a = a u_a$$

y sumando miembro á miembro

$$u_1 + a u_a + a^2 u_{a^2} + \ldots\ldots + a^n u_{a^n} + \ldots\ldots < u_1 + a(u_a + u_{a+1} + \ldots\ldots + u_{a^n} + \ldots\ldots)$$

Como la serie (91) cuyos términos todos (fuera de u_1) figuran en el segundo miembro de esta desigualdad partiendo de u_n, es convergente, este segundo miembro no puede crecer indefinidamente. Así pues, la (92) reproducida por completo en el primer miembro de la desigualdad será convergente.

De un modo análogo se demostraría la segunda parte (teorema debido á Cauchy).

92. **Series de signos cualesquiera.** Teorema XII. *Cuando se suceden los términos en una serie con cualquiera ley respecto al signo, dicha serie es convergente si lo es la que resulte de tomar todos sus términos con el signo positivo.*

Por hipótesis la serie de los términos tomados positivamente es *convergente* y habrá entonces en ella un límite determinado para las dos sumas de los términos que corresponden á los términos positivos y á los negativos de la serie propuesta; así pues, será fijo y determinado el límite de su diferencia, la cual no siendo otra que la suma algebraica de la serie dada, se sigue que ésta es *convergente.*

Corolario. *Cuando una serie cuyos términos tienen signos contrarios, es convergente si se les toma positivamente, se puede cambiarlos de orden sin que la convergencia desaparezca, ni se modifique el valor de la serie.*

93. N. B. No se puede afirmar la *divergencia* en una serie cuyos términos tienen signos cualesquiera y es divergente si se les toma positivamente; *puede ser convergente* (compárese con el teorema XII).

Hay dos clases de series convergentes; en unas la *convergencia* se debe al decrecimiento conveniente de los términos, en las otras depende de la sucesión de signos; las primeras quedan convergentes cuando se toman sus términos positivamente; las segundas se hacen divergentes.

94. Del corolario del teorema XII á la vez deducimos otro.

Corolario. *En una serie convergente que no conserva su carácter cuando se toman sus términos positivamente, no hay derecho de modificar el orden de los términos de cualquier manera.*

Pues podría cambiarse la suma y aun la naturaleza de la serie (véase la aplicación III, párrafo 96).

94′. **Series de términos alternados.** Teorema XIII. *Cuando los términos de una serie son alternativamente positivos y negativos y decrecen indefinidamente en valor absoluto, teniendo cero por límite, la serie es convergente.*

Sea la serie:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + u_5 - \ldots\ldots \mp u_{n-1} \pm u_n \mp u_{n+1} \pm \ldots\ldots \qquad (93)$$

Para que sea convergente es necesario y basta tener:

$$\text{lím} \pm (u_n - u_{n+1} + u_{n+2} - \ldots\ldots - u_{n+p-1}) = 0$$

cualquiera que sea p y cuando crece n indefinidamente.

Podemos hacer abstracción del signo (¹) y considerar la expresión:

$$u_n - u_{n+1} + u_{n+2} - u_{n+3} + \ldots\ldots - u_{n+p-1}$$

Como por hipótesis

$$u_n > u_{n+1} > u_{n+2} > u_{n+3} > \ldots\ldots > u_{n+p-1}$$

es evidente que esta expresión es á la vez positiva y menor que u_n.

Se puede, en efecto, escribirla así:

$$(u_n - u_{n+1}) + (u_{n+2} - u_{n+3}) + \ldots\ldots + (u_{n+p-2} - u_{n+p-1})$$

ó bien:

$$u_n - (u_{n+1} - u_{n+2}) - (u_{n+3} - u_{n+4}) - \ldots\ldots - u_{n+p-1} \qquad (94)$$

Está pues comprendida entre cero y u_n y es una media entre estos dos extremos. Como por otra parte u_n tiende á cero (para $n=\infty$), ella tiene, pues, cero por límite y la serie propuesta es convergente.

Puede demostrarse con mayor claridad como sigue:

Sea la serie anterior y hagamos:

$$S_n = u_1 - u_2 + u_3 - \ldots\ldots + u_n, \quad S_{n+1} = u_1 - u_2 + u_3 - \ldots\ldots + u_n - u_{n+1}$$

la suma S de toda la serie se puede escribir indistintamente:

$$\left.\begin{aligned} S &= S_n - (u_{n+1} - u_{n+2}) - (u_{n+3} - u_{n+4}) - \ldots\ldots \\ &= S_{n+1} + (u_{n+2} - u_{n+3}) + (u_{n+4} - u_{n+5}) \ldots\ldots \end{aligned}\right\} \qquad (95)$$

Siendo hipotéticamente positivas las diferencias encerradas entre paréntesis, la suma S total quedará comprendida entre S_n y S_{n+1}. De estas dos, la primera siempre mayor que la segunda, va continuamente disminuyendo; la segunda, menor siempre que la primera, va constantemente aumentando, como se ve claramente por las formas siguientes:

$$S_n = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \ldots\ldots - (u_{n-1} - u_n) \qquad (96)$$
$$S_{n+1} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \ldots\ldots + (u_n - u_{n+1}) \qquad (96')$$

Así pues, tienden á un límite común y finito; luego lo propio se dirá de la suma S de toda la serie y ésta será *convergente.*

OBSERVACIÓN.

TEOREMA DE DUHAMEL SOBRE LAS SERIES DE TÉRMINOS POSITIVOS.

95. Hemos visto que hay casos en que falla la regla general de convergencia en las series de términos positivos (teorema V, etc.): el teorema de *Duhamel* resuelve esta dificultad (aunque presenta también un caso dudoso).

(¹) Pues lím $\pm a = \pm$ lím a.