79
265
195

Sea la serie de términos positivos:

$$u_1+u_2+u_3+\ldots\ldots+u_{n-1}+u_n+u_{n+1}+\ldots\ldots \qquad (97)$$

Supongamos la hipótesis $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n}=1$, permaneciendo $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ constantemente menor que la unidad partiendo de cierto rango.

Si α designa un infinitamente pequeño positivo, puede escribirse:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{1+\alpha}$$

Sentado esto, la ecuación (97) *es convergente ó divergente según que* lím $n\alpha$ *sea mayor ó menor que la unidad. Si* lím $n\alpha=1$ *y este producto partiendo de un cierto rango queda inferior á su límite, la serie es convergente.*

1º Sea primeramente:

$$\lim n\alpha=\mathrm{K}, \quad (\mathrm{K}>1)$$

Si m es una cantidad cualquiera determinada comprendida entre 1 y K, es decir mayor que la unidad, se tiene según la fórmula del desarrollo de la potencia de un binomio para un exponente cualquiera:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^m=1+\frac{m}{1}\cdot\frac{1}{n}+\frac{m(m-1)}{1.2}\,\frac{1}{n^2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\,\frac{1}{n^3}+\cdots\cdots=1+\frac{m}{n}(1+\delta)$$

siendo δ una cantidad que tiende á cero cuando crece n.

Para que partiendo de cierto valor de n se tenga:

$$1+\alpha>\left(1+\frac{1}{n}\right)^m$$

es suficiente tener:

$$1+\alpha>1+\frac{m}{n}(1+\delta)$$

es decir:

$$\alpha>\frac{m}{n}(1+\delta)$$

ó bien:

$$n\alpha>m(1+\delta)$$

al aumentar n, el primer miembro $n\alpha$ tiende por hipótesis hacia K que es mayor que m, mientras que el segundo tiende hacia m puesto que δ tiende á cero.

Así pues, partiendo de cierto valor determinado de n, la desigualdad

$$1+\alpha>\left(1+\frac{1}{n}\right)^m$$

queda fatisfecha.

Esta desigualdad equivale á:

$$\frac{1}{1+\alpha}<\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^m}$$

ó bien á:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}<\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^m}$$

Considerando la serie:

$$\frac{1}{1^m}+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^m}+\frac{1}{(n+1)^m}+\cdots\cdots \qquad (98)$$

que es *convergente* (aplicación X), pues $m>1$, se ve que la relación

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{\frac{1}{(n+1)^m}}{\frac{1}{n^m}}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^m=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^m}$$

Así pues:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}<\frac{v_{n+1}}{v_n}$$

si pues la serie (98) es *convergente a fortiori*, lo será la (97).

2º Sea ahora

$$\lim n\alpha=\mathrm{K}, \quad (\mathrm{K}<1)$$

siendo m una cantidad cualquiera determinada comprendida entre K y 1, se tiene:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^m=1+\frac{m}{n}(1+\delta)$$

Para que se verifique

$$1+\alpha<\left(1+\frac{1}{n}\right)^m$$

es suficiente que:

$$\alpha<\frac{m}{n}(1+\delta) \quad \text{ó} \quad n\alpha<m(1+\delta)$$

Cuando crece n, $n\alpha$ tiende por la hipótesis hacia $\mathrm{K}<m$, mientras el otro miembro tiende á m puesto que δ tiende á 0. Luego partiendo de un valor determinado de n, la condición:

$$1+\alpha<\left(1+\frac{1}{n}\right)^m$$

queda satisfecha.

Esta desigualdad equivale á

$$\frac{1}{1+\alpha}>\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^m}$$

luego:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}<\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^m}$$

Comparándola con la serie (98) ahora *divergente*, puesto que $m<1$ (1), se ve que en este caso

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}<\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

Si pues (98) es divergente, *a fortiori* lo es (97).

3º Si se tiene:

$$\lim n\alpha=1$$

hay incertidumbre.

(1) Puede verse párrafo 96, ejemplo X.

Sin embargo, si partiendo de cierto rango se verifica constantemente

$$n\alpha < 1 \quad \text{ó} \quad \alpha < \frac{1}{n}$$

la serie (97) es *divergente*.

En efecto, se tiene entonces:

$$\frac{1}{1+\alpha} > \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$$

La relación $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ es partiendo de cierto rango mayor que

$$\frac{1}{1+\frac{1}{n}}$$

es decir, que $\frac{n}{n+1}$, relación que corresponde á la serie armónica

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots\cdots$$

El caso dudoso que presenta este teorema es, pues, cuando $\text{lím}\, n\alpha = 1$ y el producto $n\alpha$ no es, partiendo de cierto rango, constantemente menor que la unidad.

(Comberousse.)

APLICACIONES.

96. I. Sea

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots\cdots+\frac{1}{(n-1)n}+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots\cdots$$

se tiene:

$$\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} = \frac{\frac{1}{(n+2)(n+3)}}{\frac{1}{(n+1)(n+2)}} = \frac{n+1}{n+3} = \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}}$$

cantidad menor que la unidad, la serie es *convergente*.

* Por otra parte

$$\text{lím}\, \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} = 1$$

Aplicando la conclusión preparatoria del teorema de Duhamel:

$$\frac{u_{n+1}}{u_{n+2}} = \frac{1}{1+\alpha} = \frac{n+1}{n+3}$$

luego:

$$\alpha = \frac{2}{n+1}, \quad n\alpha = \frac{2}{1+\frac{1}{n}}$$

y

$$\lambda = \text{lím}\, n\alpha = 2$$

se tiene $\lambda > 1$, luego la serie es *convergente*.

II. Sea la serie:

$$\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n}+\cdots\cdots$$

en la que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{x^{n+1}}{n+1}}{\frac{x^n}{n}} = \frac{n}{n+1}\,x = \frac{x}{1+\frac{1}{n}}$$

luego:

$$\text{lím}\, \frac{u_{n+1}}{u_n} = x$$

Si pues $x < 1$, la serie es *convergente*.

Si $x > 1$, la serie es *divergente;* si $x = 1$, se produce la serie *armónica* (párrafo 88).

III. **Serie de Lejeune-Dirichlet.** Sea la serie:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}+\cdots\cdots \tag{99}$$

que es convergente, pues se puede poner:

$$1-\frac{1}{2}=\frac{1}{1.2},\quad \frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{3.4},\quad \frac{1}{5}-\frac{1}{6}=\frac{1}{5.6},\ \cdots\cdots,\ \frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{(2n-1)2n},\ \cdots\cdots$$

y la serie producida

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{5.6}+\frac{1}{7.8}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2n-1)2n}+\cdots\cdots$$

es *convergente*, puesto que sus términos son respectivamente menores (párrafo 91′, etc.) que los de la serie

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots\cdots$$

que es *convergente* (aplicación I).

Considerando la serie formada con los valores absolutos de los términos de la precedente (99), se obtiene la serie armónica que es *divergente*.

Agrupando en la serie (99) los términos de modo que dos positivos sean seguidos de un negativo en el orden mismo que en ella están, resulta:

$$1+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{7}-\tfrac{1}{4}+\cdots\cdots \tag{100}$$

Aunque (99) y (100) contengan los mismos términos demostraremos que no tienen el mismo *límite*.

Juntando de dos en dos los términos de (99), se tienen grupos binomios de la forma:

$$\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n} \tag{101}$$

Como esta es una expresión general, haciendo:

$$n = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots\ldots,\ n$$

se tendrán dos á dos y en su orden los términos de la serie (99).

Así pues, designando por S la suma de la serie considerada, resulta:

$$S=\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right) \tag{102}$$

Reuniendo de cuatro en cuatro, el enésimo grupo cuaternario será:

$$\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n-2}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n} \tag{103}$$

y de una manera análoga:

$$S=\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n-2}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n}\right) \tag{104}$$

Tomando tres á tres los términos de (100), el enésimo grupo es:

$$\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n} \tag{105}$$

y se tendrá:

$$S'=\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{2n}\right) \tag{106}$$

Restando (103) de (105), resulta:

$$\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{4n}=\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)$$

Así la diferencia entre (105) y (103) es la mitad de la expresión (101) y se tiene idénticamente cualquiera que sea n:

$$\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n}=\left(\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n-2}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)$$

Restando ordenadamente (106) y (104), queda:

$$S'-S=\tfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)$$

luego (102):

$$S'-S=\tfrac{1}{2}S$$

ó bien:

$$S'=\tfrac{3}{2}S$$

luego mudando el orden de los sumandos, se altera, pues, la serie Dirichlet (teorema XII, corolario 2º).

IV. Sea la serie:

$$\frac{1}{1.2}-\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}-\ldots\ldots$$

que es convergente (teorema XIII), considerando la serie formada con los valores absolutos de los términos de la precedente, se obtiene otra serie también convergente.

En efecto, la serie que se produce es:

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\ldots\ldots$$

en la que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{n}$$

como $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ vemos que es menor que la unidad, la serie es *convergente.*

V. Sea la serie:

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots\ldots$$

como

$$\sqrt[n]{u_n}=\left(\frac{1}{n}<1\right)$$

la serie es *convergente.*

VI. Sea

$$\left(\frac{2n+1}{4n+1}\right)^n+\left(\frac{2n+3}{4n+5}\right)^{n+1}+\ldots\ldots$$

como

$$\sqrt[n]{u_n}=\left(\frac{2n+1}{4n+1}<1\right)$$

la serie es *convergente.*

VII. Sea la serie

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1.3}{2.4}+\ldots\ldots+\frac{1.3.5\ldots..(2n-1)}{2.4.6\ldots\ldots2n}+\ldots\ldots$$

comparándola con la serie armónica, resulta:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{2n+1}{2n+2},\quad \frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n+1}{n+2}$$

Como $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ puede formarse añadiendo n á los dos términos de la segunda, resulta:

$$\frac{2n+1}{2n+2}>\frac{n+1}{n+2}$$

ó bien:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}>\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

luego es *divergente* (teorema X).

VIII. Sea la serie

$$1+2x+3x^2+\ldots\ldots+nx^{n-1}+\ldots\ldots$$

es convergente si $x<1$, su valor es:

$$\frac{1}{(1-x)^2}$$

Así pues:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n+1}{n}x,$$

luego es *convergente.*

La serie propuesta puede escribirse:

$$1+x+x^2+x^3+\ldots\ldots=\mathrm{A}=\frac{1}{1-x}\,x$$

$$x+x^2+x^3+\ldots\ldots=\mathrm{B}=\frac{x}{1-x}$$

$$x^2+x^3+\ldots\ldots=\mathrm{C}=\frac{x^2}{1-x}$$

$$x^3+\ldots\ldots=\mathrm{D}=\frac{x^3}{1-x}$$

....

que son *convergentes* (nueva demostración de la convergencia de la serie propuesta).

Si S designa la suma total:

$$\mathrm{S}=\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}+\ldots\ldots=\frac{1}{1-x}+\frac{x}{1-x}+\frac{x^2}{1-x}+\cdots\cdots=\frac{1}{(1-x)^2}$$

IX. Sea la serie:

$$1+3x+6x^2+\ldots\ldots+\frac{n(n+1)}{2}x^{n-1}+\ldots\ldots$$

que es *convergente* y tiene por suma $\frac{1}{(1-x)^3}$, puede descomponerse así:

$$\mathrm{A}=1+2x+3x^2+\ldots\ldots=\frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\mathrm{B}=x+2x^2+3x^4+\ldots\ldots=\frac{x}{(1-x)^2}$$

....

que son *convergentes;* luego también por esta razón lo es la serie propuesta.

Así pues:

$$\mathrm{S}=\frac{1+x+\ldots\ldots}{(1-x)^2}=\frac{1}{(1-x)^3}$$

X. Sea la serie notable:

$$\frac{1}{1^n}+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^n}+\frac{1}{(n+1)^n}+\cdots\cdots$$

siendo n un número cualquiera positivo.

Si se supone $n=1$, se produce la serie armónica que es *divergente.*

Si se supone $n<1$, los denominadores de la serie son menores que los correspondientes de la serie armónica sin cambiar los numeradores; luego la serie es aún *divergente.*

Si $n>1$, tendremos entonces:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\dfrac{1}{(n+2)^n}}{\dfrac{1}{(n+1)^n}}=\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n=\left(\frac{1+\dfrac{1}{n}}{1+\dfrac{2}{n}}\right)^n$$

Para $n=\infty$, se convierte esta relación en 1; pero como permanece constantemente menor que 1, antes de llegar á su límite, hay incertidumbre (teorema V).

Agrupando los términos como á continuación los escribimos, pueden establecerse varias desigualdades:

$$\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}<\left(2\,\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

$$\frac{1}{4^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}+\frac{1}{7^n}<\left(4\,\frac{1}{4^n}=\frac{1}{4^{n-1}}\right)=\frac{1}{2^{2(n-1)}}$$

$$\frac{1}{8^n}+\frac{1}{9^n}+\frac{1}{10^n}+\frac{1}{11^n}+\frac{1}{12^n}+\frac{1}{13^n}+\frac{1}{14^n}+\frac{1}{15^n}<\left[8\,\frac{1}{8^n}=\frac{1}{8^{n-1}}=\frac{1}{2^{3(n-1)}}\right]$$

....

$$\frac{1}{(2^p)^n}+\frac{1}{(2^p+1)^n}+\frac{1}{(2^p+2)^n}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2^{p+1}-1)^n}<2^p\,\frac{1}{(2^p)^n}=\frac{1}{(2^p)^{n-1}}$$
$$=\frac{1}{2^{p(n-1)}}$$

Siendo la última desigualdad la peemésima, hay en el primer miembro un número de términos igual á:

$$(2^{p+1}-1-2^p)+1=2^p$$

Agregando miembro á miembro las desigualdades, se ve que salvo el primer término $\frac{1}{1^n}$, la suma de los términos de la serie es inferior á la suma de los términos de la progresión geométrica decreciente é ilimitada:

$$\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^{2(n-1)}}+\frac{1}{2^{3(n-1)}}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^{p(n-1)}}+\cdots\cdots \quad \text{cuya razón es: } \frac{1}{2^{n-1}}$$

La suma de los términos de la serie dada no puede, pues, crecer sin fin, y es convergente cuando $n>1$.

Si le aplicamos el teorema de *Cauchy* (teorema XI) vemos que la serie propuesta será *convergente* ó *divergente* á la par que la nueva serie:

$$1+\frac{2}{2^n}+\frac{4}{4^n}+\frac{8}{8^n}+\frac{16}{16^n}+\cdots\cdots$$

producida suponiendo $a=2$, y que no es sino la progresión geométrica ilimitada:

$$1+\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^{2(n-1)}}+\frac{1}{2^{3(n-1)}}+\cdots\cdots \quad \text{cuya razón es: } \frac{1}{2^{n-1}}$$

Si pues $n>1$, este valor es menor que la unidad, la progresión será decreciente y la serie propuesta *convergente.*

Si $n<1$, esta razón es mayor que la unidad, la progresión creciente y la serie *divergente.*

XI. Sea la serie:

$$a+2a^2+3a^3+4a^4+\ldots\ldots+na^n+\ldots\ldots$$

siendo a un número positivo cualquiera.

Si $a=1$ ó $a>1$, es *divergente.*

Si $a<1$, tendremos:

$$l=\lim\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}}=\lim\frac{(n+2)\,a^{n+2}}{(n+1)\,a^{n+1}}=\lim\frac{n+2}{n+1}\,a=\lim\frac{1+\dfrac{2}{n}}{1+\dfrac{1}{n}}\,a$$