Si $n=\infty$, $l=a$, de suerte que la serie es *convergente.*

XII. Sea la serie ordenada:

$$\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n}+\cdots\cdots$$

Si $x=1$ ó $x>1$, es *divergente.*

Si $x<1$ (en valor absoluto) es *convergente.*

XIII. Sea la serie ordenada:

$$1+\frac{1}{2}x+\frac{1.3}{1.4}x^2+\frac{1.3.5}{2.4.6}x^3+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^4+\ldots\ldots+\frac{1.3.5.7\ldots\ldots 2n-1}{2.4.6.8\ldots\ldots 2n}x^n+\ldots\ldots$$

Se tiene pues:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2n+1}{2n+2}=\frac{1+\dfrac{1}{2n}}{1+\dfrac{1}{n}}x$$

Si $x>1$, es *divergente;* si $x<1$, es *convergente.*

Si $x=1$, hay incertidumbre, pues la relación $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ queda siempre inferior á su límite.

Comparándola con la serie armónica:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}+\cdots\cdots$$

para pasar del enésimo término al siguiente es necesario multiplicar $\frac{1}{n}$ por $\frac{n}{n+1}$.

Para pasar del enésimo término en la serie propuesta que es:

$$\frac{1.3.5.7\ldots\ldots(2n-3)}{2.4.6.8\ldots\ldots(2n-2)}$$

al siguiente se multiplica por $\frac{2n-1}{2n}$.

Como los dos primeros términos de ambas series son los mismos, comparando los multiplicadores se tiene:

$$\frac{2n-1}{2n}>\frac{n}{n+1}$$

Así pues, es *divergente*, pues partiendo del tercero, sus términos son mayores que los de la serie armónica.

XIV. Consideremos la serie:

$$\frac{1}{1^n}+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^n}+\cdots\cdots$$

se tiene:

$$u_n=\frac{1}{n^n}$$

luego:

$$\frac{1}{u^n}=n^n,\quad \frac{\operatorname{Log}\dfrac{1}{u_n}}{\operatorname{Log} n}=\frac{n.\operatorname{Log} n}{\operatorname{Log} n}=n$$

Si $n>1$, la serie es *convergente.*

Si $n<1$, la serie es *divergente.*

XV. Sea

$$\frac{1}{1.2}-\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\frac{1}{1.2.3.4.5}+\cdots\cdots$$

esta serie es *rápidamente convergente.*

XVI. Sean las series

$$x-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}-\frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7}+\cdots\cdots+\frac{x^{2n+1}}{1.2.3\ldots\ldots(n+1)}$$

y la

$$1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\frac{x^6}{1.2.3.4.5.6}+\cdots\cdots+\frac{x^{2n}}{1.2.3.4\ldots\ldots 2n}+\cdots\cdots$$

La primera da:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{x^2}{(2n+2)(2n+3)}$$

y la segunda:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{x^2}{(2n+1)(2n+2)}$$

Para valores determinados de x, cero es el límite de estas relaciones (para $n=\infty$); así pues, las series son convergentes para todo valor finito de x, cuando se toman sus términos en valor absoluto.

Así pues, lo son en rigor para todo valor finito de x.

XVII. **Serie e.** La serie

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\cdots\cdots+\frac{1}{1.2.3.4\ldots\ldots n}+\cdots\cdots \qquad (107)$$

importante en el análisis, es convergente y tiene por límite un número inconmensurable que aproximadamente se conoce tomando un número suficiente de términos.

1º Tenemos en la serie propuesta:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{n+1}$$

relación menor que la unidad, que tiende á cero cuando n crece indefinidamente, la serie es pues *convergente.*

2º Deteniéndonos en el término u_n inclusive, vamos á determinar el límite del error que se comete en el valor de la serie.

Se tiene:

$$u_n=\frac{1}{1.2.3\ldots\ldots n}$$

partiendo de este término se tiene:

$$\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}}=\frac{1}{n+2}$$

y puede tomarse un número $K<1$, abajo del cual caiga la relación $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, tendiendo hacia cero su límite igual á $\frac{1}{n+1}$ (teoremas III y IV).

Entonces el primer término despreciado u_{n+1} tiene por expresión $\mathrm{K}u_n$ y los siguientes son menores que K^2u_n, K^3u_n...... Así pues, el límite del error cometido conservando $(n+1)$ términos, es menor que $\frac{\mathrm{K}u_n}{1-\mathrm{K}}$, es decir, menor que

$$u_n\frac{\dfrac{1}{n+1}}{1-\dfrac{1}{n+1}}=\frac{1}{n}u_n$$

Si ε designa el error cometido deteniéndose hasta u_n inclusive; finalmente:

$$\varepsilon<\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1.2.3.4......n}$$

3º *El límite de la suma de la serie es un número inconmensurable comprendido entre 2, 5 y 3.*

Los tres primeros términos dan una suma igual á $2\frac{1}{2}$; luego la de la serie es á su vez mayor que este número.

Los subsecuentes términos de la serie verifican las condiciones:

$$\frac{1}{1.2.3}<\frac{1}{2^2},\quad \frac{1}{1.2.3.4}<\frac{1}{2^3},\quad \frac{1}{1.2.3.4.5}<\frac{1}{2^4}......,\quad \frac{1}{1.2.3.4......n}<\frac{1}{2^n}$$

El resto de la serie (después del tercer término) es menor que el límite de la suma de los términos de la progresión geométrica decreciente ilimitada que tiene $\frac{1}{2^2}$ por primer termino, $\frac{1}{2}$ por razón y por suma:

$$\frac{1}{2}=\frac{1-\dfrac{1}{2}}{\dfrac{1}{2^2}}$$

El límite de la serie es, pues, menor que

$$2\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}=3$$

Además, este límite es inconmensurable.

Supongamos que es conmensurable é igual á $\frac{p}{q}$, siendo p y q enteros:

$$\frac{p}{q}=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+......+\frac{1}{1.2.3......q}+$$
$$+\frac{1}{1.2.3......q}\left(\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)(q+2)}+\frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)}+......\right)$$

Multiplicando los dos miembros de esta supuesta ecuación por 1.2.3...... q, resultará:

$$p.1.2.3........(q-1)=\mathrm{N}+\left[\frac{1}{(q+1)}+\frac{1}{(q+1)(q+2)}+......\right]$$

representando por N la suma de los términos que desde 1 hasta $\frac{1}{1.2.3.4....q}$ se transforman en números enteros.

Pero se tiene:

$$\left[\frac{1}{(q+1)}+\frac{1}{(q+1)(q+2)}+......\right]<\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)^2}+\frac{1}{(q+1)^3}+......=$$
$$=\left(\frac{\dfrac{1}{q+1}}{1-\dfrac{1}{q+1}}=\frac{1}{q}\right)$$

fracción propiamente dicha.

Así pues, la supuesta igualdad conduce á admitir que un número entero puede ser igual á un mixto, lo que es absurdo.

Si el límite de la serie no puede ser comensurable, tiene que ser inconmensurable y se le designa por e.

Así pues:

$$e=\lim\left(1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+......+\frac{1}{1.2.3......n}+......\right)$$

Deteniéndose hasta el término $\frac{1}{1.2.3....q}$; es decir, hasta u_q y conservando $q+1$ términos en la serie, el resto R_{q+1} puede escribirse así:

$$\mathrm{R}_{q+1}=\frac{1}{1.2.3......q}\left[\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)(q+2)}+......\right] \qquad (107')$$

Como la cantidad encerrada dentro del paréntesis es menor que $\frac{1}{q}$, resulta:

$$\mathrm{R}_{q+1}<\frac{1}{q}\cdot\frac{1}{1.2.3......q} \qquad (107'')$$

Tomando catorce términos, resulta:

$$\begin{array}{r}
2.\,50000\,00000\\
0.\,16666\,66667\\
0.\,04166\,66667\\
0.\,00833\,33333\\
0.\,00138\,88889\\
0.\,00019\,84127\\
0.\,00002\,48016\\
0.\,00000\,27557\\
0.\,00000\,02756\\
0.\,00000\,00251\\
0.\,00000\,00251\\
0.\,00000\,00021\\
0.\,00000\,00002\\
\hline
2.\,71828\,18286
\end{array}$$

Siendo

$$\mathrm{R}_{14}<\frac{1}{13}u_{13}<\frac{1}{13}\cdot\frac{1}{1.2.3.4......13}=\frac{1}{80951270400}$$

es decir:

$$\mathrm{R}_{14}<\frac{1}{8.10^{10}}$$

ó la octava parte de una unidad del décimo orden decimal.

Calculando e con veinte cifras decimales:

$$e=2.71828182845904523536......$$

XVIII. Sea la serie:

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+......+\frac{x^n}{1.2.3......n}+...... \qquad (107''')$$

Como

$$\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}}=\frac{x}{n+1}$$

y para $n=\infty$, su límite es cero, la serie es convergente cualquiera que sea x (siendo determinada).

Además:

$$R_{n+1}=\frac{x^n}{1.2......n}\left[\frac{x}{n+1}+\frac{x^2}{(n+1)(n+2)}+......\right]$$

luego:

$$R_{n+1}<\frac{x^n}{1.2......n}\left[\frac{x}{n+1}+\frac{x^2}{(n+1)^2}+......\right]$$

Suponiendo:

$$\frac{x}{n+1}<1 \quad ó \quad n+1-x>0,$$

queda:

$$R_{n+1}<\frac{x^n}{1.2......n}\cdot\frac{\frac{x}{n+1}}{1-\frac{x}{n+1}}<\frac{x^{n+1}}{1.2......n}\cdot\frac{1}{n+1-x} \qquad (107'''')$$

Si $x=1$, se obtiene la *serie e* y el valor de la resta para esta serie.

96'. **Límite de $(1+\frac{1}{m})^m$ cuando crece m indefinidamente.** PRIMER CASO. m *entero y positivo.* Desarrollando la potencia m de $1+\frac{1}{m}$ por la fórmula del binomio de Newton, resulta:

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}\left(1-\frac{1}{m}\right)+\frac{1}{1.2.3}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)+......$$
$$......+\frac{1}{1.2......m}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)......\left(1-\frac{n-1}{m}\right) \qquad (108)$$

Comparémosla con la serie e que es:

$$e=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+......+\frac{1}{1.2.3......n}+...... \qquad (108')$$

y observaremos: que del tercer término en adelante los de (108) son menores que los de (108') y que (108) se compone de un número finito de términos mientras que (108') es serie ilimitada; así pues, la expresión (108) es menor que la serie e cualquiera que sea la magnitud de m.

La expresión (108) que aumenta con m tiene, pues, cuando m crece indefinidamente, un límite que debe ser menor ó á lo sumo igual á e; vamos á demostrar que es igual.

Como la serie e es convergente (párrafo 96, ejemplo XVII), puede darse á n un valor bastante grande para que el error cometido despreciando los términos que siguen

al $(n+1)^{\text{ésimo}}$ sea menor que una cantidad dada δ tan pequeña como se quiera, llamando e_n la suma de los $n+1$ primeros términos, se tiene:

$$e-e_n<\delta$$

Por otra parte, en el desarrollo (108), considerando los $n+1$ primeros términos, se ve que á medida que crece m indefinidamente quedando fijo n, los diversos numeradores tienen por límite 1 (párrafo 86); así pues, cada término del desarrollo tiene por límite el término correspondiente de e_n y su suma compuesta de un número finito de términos tiene e_n por límite.

Puede de consiguiente tomarse m bastante grande para que designando por A_n la suma de los $n+1$ primeros términos del desarrollo se tenga:

$$e_n-A_n<\delta$$

De las dos desigualdades establecidas resulta:

$$e-A_n<2\delta$$

Habiendo elegido por n un valor fijo suficientemente grande, se puede satisfacer esta última desigualdad haciendo crecer m indefinidamente.

Ahora bien, si se dan á n valores indefinidamente crecientes, el desarrollo A_n aumenta tendiendo á su límite lím $(1+\frac{1}{m})^m$; 2δ tiende hacia cero, luego resulta:

$$e-\text{lím}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=0 \quad ó \text{ bien } \quad \text{lím}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=e \qquad (108'')$$

que es lo que trataba de demostrarse.

SEGUNDO CASO. m *fraccionario.* Supongamos que designando por n un número entero muy grande, se tenga:

$$m=n+a, \qquad (a<1)$$

En este supuesto, $(1+\frac{1}{m})^m$ estará comprendida entre:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad y \quad \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n$$

Esto es evidente, puesto que la expresión $(1+\frac{1}{n})^{n+1}$ resulta de sustituir en $(1+\frac{1}{m})^m$ por $\frac{1}{m}$ y m respectivamente, los números más grandes $\frac{1}{n}$ y $n+1$, y la segunda de reemplazar las mismas cantidades $\frac{1}{m}$ y m por los números más pequeños $\frac{1}{n+1}$ y n.

Pero se tiene:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

y

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\frac{1}{1+\frac{1}{n+1}}$$

Como n es entero y muy grande, $(1+\frac{1}{n})^n$ y $(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}$ difieren muy poco de e, $1+\frac{1}{n}$ y $1+\frac{1}{n+1}$, muy poco de la unidad y las dos precedentes expresiones tienen e por límite; luego $(1+\frac{1}{m})^m$ comprendida entre ambas, también tiene por límite e.

TERCER CASO. m *negativo y creciendo indefinidamente en valor absoluto.* Pongamos $m = -m'$ siendo m' positivo y tendremos:

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = \left(1-\frac{1}{m'}\right)^{-m'} = \left(\frac{m'-1}{m'}\right)^{-m'} = \left(\frac{m'}{m'-1}\right)^{m'}$$
$$= \left(1+\frac{1}{m'-1}\right)^{m'} = \left(1+\frac{1}{m'-1}\right)^{m'-1}\left(1+\frac{1}{m'-1}\right)$$

Cuando crece m' indefinidamente $(1+\frac{1}{m'-1})^{m'-1}$ tiende hacia e y $(1+\frac{1}{m'-1})$ tiende á 1; luego:

$$\text{lím}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e$$

96″. **Límite de $(1+\frac{1}{m})^{-m}$ ó de $(1-\frac{1}{m})^m$ cuando m crece indefinidamente.** Evidentemente se tiene:

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{-m} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{m}\right)^m}$$

luego:

$$\text{lím}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{-m} = \frac{1}{e} \qquad (108''')$$

Asimismo:

$$\left(1-\frac{1}{m}\right)^m = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{m}\right)^{-m}} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^m}$$

luego:

$$\text{lím}\left(1-\frac{1}{m}\right)^m = \frac{1}{e} \qquad (108'''')$$

96‴. **Límite de $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ cuando α tiende á cero.** Pongamos $\frac{1}{m} = \alpha$ ó sea $m = \frac{1}{\alpha}$ en la expresión:

$$e = \text{lím}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$$

Como si m tiende al infinito, α tiende á cero y viceversa, se puede concluir que:

$$\text{lím}\,(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$$

cuando α va siempre disminuyendo de manera de tender á *cero* tanto como se quiera, es e luego:

$$\underset{(\alpha=0)}{\text{lím}\,(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}} = e$$

resultado de gran interés en el análisis.

DESARROLLO EN SERIE.

97. **Método de los coeficientes indeterminados.** Este método de tan gran utilidad se usa con ventaja si se conoce la *forma* del desarrollo que se busca; pero si no sucede esto, es forzoso probar la legalidad de los coeficientes que se determinan.

98. Sea

$$F(x) = A + Bx + Cx^2 + \ldots\ldots \qquad (109)$$

siendo A, B, ..., los coeficientes indeterminados cuyo valor se busca.

Recurriendo á una propiedad fácil de evidenciar de $F(x)$, se la expresará con ayuda de la serie supuesta, de manera de obtener una igualdad de la forma:

$$P + Qx + Rx^2 + \ldots\ldots = 0 \qquad (109')$$

siendo P, Q, ..., coeficientes independientes de x, compuestos con los coeficientes indeterminados A, B, ...; como (109′) debe subsistir cualquiera que sea x, es una identidad y produce las condiciones:

$$P=0,\quad Q=0,\quad R=0\ldots\ldots$$

que determinarán á A, B, C, ...

II. Si dada una función $F(x)$ se encuentra que equivale á un desarrollo

$$A + Bx + Cx^2 + \ldots\ldots$$

y á otro de la misma forma

$$A' + B'x + C'x^2 + \ldots\ldots$$

deben ambos ser iguales:

$$A + Bx + Cx^2 + \ldots\ldots = A' + B'x + C'x^2 + \ldots\ldots$$

ó bien:

$$A - A' + x(B - B') + x^2(C - C') + \ldots\ldots = 0$$

que para que sea satisfecha cualquiera que sea x, debe tenerse:

$$A = A',\quad B = B',\quad C = C'\ldots\ldots$$

Dos series convergentes y ordenadas respecto de las potencias crecientes de x, *enteras y positivas, son idénticas si los coeficientes de las mismas potencias de* x *son iguales.*

APLICACIONES.

99. I. Desarrollar en serie el producto indefinido:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})\ldots\ldots$$

Llamando P el producto, pongamos:

$$P = 1 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \ldots\ldots$$

cambiando x en x^2, la serie es:

$$1 + A_1x^2 + A_2x^4 + A_3x^6 + \ldots\ldots$$

y el producto es:

$$(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\ldots\ldots$$

es decir:

$$\frac{P}{1+x}$$