Así pues:

$$1+A_1x^2+A_2x^4+A_3x^6+\ldots\ldots=\frac{1+A_1x+A_2x^2+\ldots\ldots}{1+x}$$

Quitando denominadores é igualando los coeficientes de las mismas potencias de x en ambos miembros, resulta (1):

$$A_1=1,\quad A_1=A_2,\quad A_1=A_3,\quad A_2=A_4,\quad A_2=A_5,\quad A_3=A_6,\quad A_3=A_7,\ldots\ldots$$

es decir:

$$A_1=1,\quad A_1=A_2,\quad A_2=A_3,\quad A_3=A_4,\ldots\ldots$$

luego:

$$P=1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots.=\frac{1}{1-x},\quad (x<1) \qquad (110)$$

En efecto:

$$\frac{1}{1-x}=\frac{1+x}{1-x^2}=\frac{(1+x)(1+x^2)}{1-x^4}=\frac{(1+x)(1+x^2)(1+x^4)}{1-x^8}$$
$$=\frac{(1+x)(1+x^2)\ldots\ldots(1+x^{2n-2})}{1-x^{2n}}$$

En la enésima fracción n entero tiende al ∞, como $x<1$, x^{2n} es un infinitamente pequeño que se anula en el límite; entonces el valor del primer miembro de la ecuación (110) es $\frac{1}{1-x}$ ó el segundo miembro de la misma ecuación.

II. Sea

$$\frac{1}{a-x}=\frac{1}{a}+\frac{x}{a^2}+\frac{x^2}{a^3}+\ldots\ldots$$

Suponiendo

$$\frac{1}{a-x}=A+Bx+Cx^2+\ldots\ldots.$$

produce:

$$1=\begin{array}{l|l|l} Aa+aB & x+aC & x^2+\ldots\ldots \\ -A & -B & \end{array}$$

Así pues:

$$Aa=1,\qquad aB-A=0,\qquad aC-B=0,\ \text{etc.}$$

de donde

$$A=\frac{1}{a},\quad B=\frac{1}{a^2},\quad C=\frac{1}{a^3},\ \text{etc.}$$

sustituyendo:

$$\frac{1}{a-x}=\frac{1}{a}+\frac{x}{a^2}+\frac{x^2}{a^3}+\ldots\ldots$$

Podemos emplear un método semejante empleando el siguiente raciocinio.

Sea la ecuación:

$$M+Nx+Px^2+Ux^3+\ldots\ldots=0$$

en la que M, N, P, ..., son independientes de x; como la expresión se verifica para cualquier valor de x, haciendo $x=0$ queda $M=0$ y la ecuación resultante después de dividida por x da:

$$N+Px+Ux^2+\ldots\ldots=0$$

Si $x=0$, $N=0$ y la ecuación resultante después de dividida por x da:

$$P+Ux+Rx^2+\ldots\ldots=0,\ \text{etc.}$$

(1) En lugar de formar la ecuación: $P+Qx+Rx^2+\ldots\ldots=0$, etc. (párrafo 98).

Se tienen, pues, las ecuaciones:

$$M=0,\qquad P=0,\qquad N=0,$$

en número igual al de los coeficientes, podemos pues determinarlos.

Ejemplo. Sea:

$$\frac{a}{a'+b'x}=A+Bx+Cx^2+Dx^3+\ldots\ldots$$

que da:

$$0=\begin{array}{r|r|r|r|l} Aa'+Ba' & x+Ca' & x^2+Da' & x^3+Ea' & x^4+\ldots\ldots \\ -a+Ab' & +Bb' & +Cb' & +Db' & \end{array}$$

Suponiendo $x=0$, queda:

$$0=Aa'-a$$

ó bien:

$$A=\frac{a}{a'}$$

la ecuación se reduce á:

$$0=\begin{array}{r|r|r|l} Ba' & x+Ca' & x^2+Da' & x^3+\ldots\ldots \\ +Ab' & +Bb' & +Cb' & \end{array}$$

ó dividiendo por x:

$$0=\begin{array}{r|r|l} Ba'+Bb' & x+Da' & x^2+\ldots\ldots \\ +Ab'+Ca' & +Cb' & \end{array}$$

Haciendo $x=0$, da:

$$Ba'+Ab'=0$$

ó bien:

$$B=-\frac{Ab'}{a'}=-\frac{ab'}{a'^2}$$

La ecuación restante después de dividirla por x es:

$$0=\begin{array}{r|r|l} Ca'+Da' & x+Ea' & x^2+\ldots\ldots \\ +Bb'+Ca' & +Db' & \end{array}$$

Si $x=0$, produce:

$$Ca'+Bb'=0,\qquad C=\frac{ab'^2}{a'^3},\ldots\ \text{etc.}$$

Así pues:

$$\frac{a}{a'+b'x}=\frac{a}{a'}-\frac{ab'}{a'^2}x+\frac{ab'^2}{a'^3}x^2-\frac{ab'^3}{a'^4}x^3+\ldots\ldots$$

100. N. B. Vemos que cada coeficiente se forma del anterior multiplicado por $-\frac{b'}{a'}$.

La restricción del párrafo (97) que exige que se conozca *a priori* la forma del desarrollo abstracto, es necesaria.

I. Sea por ejemplo:

$$\frac{1}{3x-x^2}$$

y pongamos:

$$\frac{1}{3x-x^2}=A+Bx+Cx^2+\ldots\ldots$$

que da:

$$0=-1+\begin{array}{r|r|r|l} 3Ax+3B & x^2+3C & x^3+3D & x^4+\ldots\ldots \\ -A & -B & -C & \end{array}$$

Procediendo como antes, produce:

$$0=-1,\quad 3\,\mathrm{A}=0,\quad 3\,\mathrm{B}-\mathrm{A}=0,\ \text{etc.}$$

y como vemos, la primera condición es un *absurdo;* pero poniendo:

$$\frac{1}{3x-x^2}=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{3-x}=\frac{1}{x}(\mathrm{A}+\mathrm{B}x+\mathrm{C}x^2+\ldots\ldots)$$

después de reducir da:

$$0=\begin{array}{c|c|c|l} 3\,\mathrm{A}+3\,\mathrm{B} & x+3\,\mathrm{C} & x^2+3\,\mathrm{D} & x^3+\ldots\ldots \\ -1\quad -\mathrm{A} & -\mathrm{B} & -\mathrm{C} & \end{array}$$

que produce:

$$3\,\mathrm{A}-1=0,\quad 3\,\mathrm{B}-\mathrm{A}=0,\quad 3\,\mathrm{C}-\mathrm{B}=0,\ \ldots\ldots$$

ó bien:

$$\mathrm{A}=\frac{1}{3},\quad \mathrm{B}=\frac{1}{9},\quad \mathrm{C}=\frac{1}{27},\quad \mathrm{D}=\frac{1}{81},\ \ldots\ldots$$

luego:

$$\frac{1}{3x-x^2}=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}x+\frac{1}{27}x^2+\frac{1}{81}x^3+\ldots\ldots\right)$$

ó bien:

$$\frac{1}{3x-x^2}=\frac{1}{3}x^{-1}+\frac{1}{9}x^0+\frac{1}{27}x+\frac{1}{81}x^2+\ldots\ldots$$

que encierra el término con exponente negativo $\frac{1}{3}x^{-1}$.

MÉTODO INVERSO.

101. **Regreso de las series.** Este método cuyo objeto es opuesto al del anterior, se reduce á que siendo por ejemplo la serie $x=\mathrm{F}(y)$, se trata de expresar á y por medio de otra serie en función de x:

$$y=\varphi(x)$$

Sea por ejemplo:

$$x=ay+by^2+cy^3+\ldots\ldots \tag{111}$$

Llamaremos:

$$y=\mathrm{A}x+\mathrm{B}x^2+\mathrm{C}x^3+\mathrm{D}x^4+\ldots\ldots$$

$$y^2=\begin{array}{r|l} \mathrm{A}^2x^2+2\,\mathrm{AB}x^3+\mathrm{B}^2 & x^4+\ldots\ldots \\ +2\,\mathrm{AC} & \end{array} \tag{112}$$

$$y^3=\begin{array}{r|l} \mathrm{A}^3x^3+3\,\mathrm{A}^2\mathrm{B} & x^4+\ldots\ldots \\ +\mathrm{A}^4 & \end{array}$$

que producen:

$$x=\left.\begin{array}{r|r|r|l} \mathrm{A}ax+a\mathrm{B} & x^2+a\mathrm{C} & x^3+a\mathrm{D} & x^4+\ldots\ldots \\ +\mathrm{A}^2b & +2\,\mathrm{AB} & +\mathrm{B}^2b & \\ & +\mathrm{A}^3\mathrm{C} & +2\mathrm{AC}b & \\ & & +3\,\mathrm{A}^2\mathrm{BC} & \\ & & +\mathrm{A}^4d & \end{array}\right\} \tag{113}$$

de la que se obtiene:

$$\mathrm{A}a-1=0$$

Es decir:

$$\mathrm{A}a=1,\quad \mathrm{A}=\frac{1}{a},\quad a\mathrm{B}+\mathrm{A}^2b=0,\quad \mathrm{B}=-\frac{b}{a^3},\quad \mathrm{C}=\frac{2b^3-ac}{a^5},\quad \mathrm{D}=\frac{5abc-a^2d-5b^3}{a^7},$$

$$\mathrm{F}=\frac{14b^4-21ab^2c+ba^2d+3a^2c^2-a^3c}{a^9}$$

....

luego:

$$y=\frac{1}{a}x-\frac{b}{a^3}x^2+\frac{2b^2-ac}{a^5}x^3+\ldots\ldots \tag{114}$$

I. Supongamos:

$$x=y-y^2+y^3-y^4+y^5-\ldots\ldots$$

Comparándola con (111) se obtiene:

$$a=1,\quad b=-1,\quad c=1,\quad d=-1,\quad e=1,\quad f=-1,\ \ldots\ldots \tag{115}$$

luego (114) produce:

$$y=x+x^2+x^3+\ldots\ldots$$

II. Sea

$$x=y+\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}+\frac{y^4}{4}+\frac{y^5}{5}+\ldots\ldots$$

en que

$$a=1,\quad b=\tfrac{1}{2},\quad c=\tfrac{1}{3},\quad d=\tfrac{1}{4},\ \ldots\ldots$$

y la fórmula (114) será:

$$y=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{60}-\ldots\ldots$$

III. Aplicaremos el regreso de las series (ó hallar x en función de y) á la fórmula:

$$y=\mathrm{A}x+\mathrm{B}x^3+\mathrm{C}x^5+\ldots\ldots$$

de las potencias impares de x.

Siendo:

$$x=ay+by^3+cy^5+dy^7+\ldots\ldots$$

resulta finalmente:

$$x=\frac{1}{\mathrm{A}}y-\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}^4}y^3+\frac{3\mathrm{B}-\mathrm{AC}}{\mathrm{A}^7}y^5+\ldots\ldots$$

Supongamos un caso particular, por ejemplo:

$$y=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots\ldots$$

(en que el segundo miembro es el desarrollo de e^x.)

Sea $y-1=z$, que produce:

$$z=\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots\ldots$$

Además:

$$x = Az + Bz^2 + Cz^3 + \dots\dots$$

que da:

$$x = \frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots\dots$$

ó bien:

$$x = \frac{y-1}{1} - \frac{(y-1)^2}{2} + \frac{(y-1)^3}{3} - \frac{(y-1)^4}{4} + \dots\dots$$

Como $y = e^x$, se tendrá:

$$x = \mathrm{Log}\, y$$

La fórmula anterior puede escribirse así:

$$\mathrm{L}y = \frac{y-1}{1} - \frac{(y-1)^2}{2} + \frac{(y-1)^3}{3} - \dots\dots$$

102. N. B. El método inverso de las series se usa poco por la dificultad con que se tropieza de encontrar una ley de formación para los coeficientes y es á veces necesario un gran número de coeficientes antes de determinar esa ley.

CAPÍTULO VI.

Fracciones continuas.—Teoría general.—Propiedades de las reducidas.- Fracciones continuas periódicas.—Teorema de Lagrange.—Conversión de las fracciones continuas en serie y *viceversa*.—Aplicaciones.—Resolución de las ecuaciones indeterminadas de primer grado con dos incógnitas.—Resolución de la ecuación exponencial.—Aplicaciones.

103. Atribuyen algunos á Lord Brouncker la invención de las fracciones continuas, pero el descubrimiento de sus principales propiedades se debe, sobre todo, á Huygens (1682). La introducción de esta teoría en el análisis es muy natural como vamos á ver, pues da el medio de obtener valores y más aproximados á un número dado.

104. Se llama fracción continua toda expresión de la forma:

$$a_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \dots\dots}}} \qquad (116)$$

en que las cantidades $a_1, a_2, a_3, \dots\dots, b_1, b_2, b_3, \dots\dots$, pueden entrar un número ilimitado de veces.

Cuando el número de las cantidades $a_1, a_2, \dots\dots, b_1, b_2, \dots\dots$, es indefinido, el valor de la expresión (16) que representaremos por F_n, puede ser convergente si F_n tiende á un límite finito al crecer n indefinidamente *siendo este límite el valor de la fracción continua*, ó bien la fracción es divergente cuando no tiende á ningún límite.

El valor F_n se llama la nª reducida; las fracciones:

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3} \dots\dots$$

fracciones integrantes.

$$a_0, b_1, b_2, b_3, \dots\dots$$

cocientes incompletos, y por oposición se llaman *cocientes completos* á las expresiones:

$$a_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \dots\dots}}, \qquad b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \dots\dots}, \qquad b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \dots\dots}$$