Además:

$$x = Az + Bz^2 + Cz^3 + \ldots\ldots$$

que da:

$$x = \frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots\ldots$$

ó bien:

$$x = \frac{y-1}{1} - \frac{(y-1)^2}{2} + \frac{(y-1)^3}{3} - \frac{(y-1)^4}{4} + \ldots\ldots$$

Como $y = e^x$, se tendrá:

$$x = \text{Log}\, y$$

La fórmula anterior puede escribirse así:

$$\text{L}y = \frac{y-1}{1} - \frac{(y-1)^2}{2} + \frac{(y-1)^3}{3} - \ldots\ldots$$

102. N. B. El método inverso de las series se usa poco por la dificultad con que se tropieza de encontrar una ley de formación para los coeficientes y es á veces necesario un gran número de coeficientes antes de determinar esa ley.

CAPÍTULO VI.

Fracciones continuas.—Teoría general.—Propiedades de las reducidas.— Fracciones continuas periódicas.—Teorema de Lagrange.—Conversión de las fracciones continuas en serie y *viceversa*.—Aplicaciones.—Resolución de las ecuaciones indeterminadas de primer grado con dos incógnitas.—Resolución de la ecuación exponencial.—Aplicaciones.

103. Atribuyen algunos á Lord Brouncker la invención de las fracciones continuas, pero el descubrimiento de sus principales propiedades se debe, sobre todo, á Huygens (1682). La introducción de esta teoría en el análisis es muy natural como vamos á ver, pues da el medio de obtener valores y más aproximados á un número dado.

104. Se llama fracción continua toda expresión de la forma:

$$a_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \ldots\ldots}}} \qquad (116)$$

en que las cantidades $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, b_1, b_2, b_3, \ldots\ldots$, pueden entrar un número ilimitado de veces.

Cuando el número de las cantidades $a_1, a_2, \ldots\ldots, b_1, b_2, \ldots\ldots$, es indefinido, el valor de la expresión (16) que representaremos por F_n, puede ser convergente si F_n tiende á un límite finito al crecer n indefinidamente *siendo este límite el valor de la fracción continua*, ó bien la fracción es divergente cuando no tiende á ningún límite.

El valor F_n se llama la nª reducida; las fracciones:

$$\frac{a_1}{b_1},\ \frac{a_2}{b_2},\ \frac{a_3}{b_3} \ldots\ldots$$

fracciones integrantes.

$$a_0,\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots\ldots$$

cocientes incompletos, y por oposición se llaman *cocientes completos* á las expresiones:

$$a_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \ldots\ldots}} \qquad b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \ldots\ldots} \qquad b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \ldots\ldots}$$

Reducidas son los resultados de convertir en números fraccionarios las expresiones:

$$a_0, \quad a_0+\frac{a_1}{b_1}, \quad a_0+\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2}}, \quad a_0+\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2+\cfrac{a_3}{b_3}}}, \text{ etc.}$$

y la formación de las reducidas será:

$$\left.\begin{aligned} &a_0, \quad a_0+\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_0 b_1+a_1}{b_1} \\ &a+\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2}}=a_0+\cfrac{a_1}{\cfrac{b_1 b_2+a_2}{b_2}}=\frac{b_2(a_1+a_0 b_1)+a_0 a_2}{b_1 b_2+a_2}, \text{ etc.} \end{aligned}\right\} \tag{117}$$

Si el modo precedente de formación es general, lo expresará claramente la fórmula:

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}=\frac{P_n b_n+P_{n-1} a_n}{Q_n b_n+Q_{n-1} a_n} \tag{118}$$

en la que P_n, Q_n representan respectivamente el numerador y denominador de la reducida de orden n.

Para demostrar la fórmula (118) supongamos que se verifica para un valor

$$n=m$$

Si cambia m en $m+1$, la ley debe subsistir si es general.

En efecto, para pasar de la reducida de orden $m+1$ á la de orden $m+2$, basta cambiar:

$$b_m \quad \text{en} \quad b_m+\frac{a_{m+1}}{b_{m+1}}$$

y resulta:

$$\begin{aligned} \frac{P_{m+2}}{Q_{m+2}} &= \frac{P_m\left(b_m+\dfrac{a_{m+1}}{b_{m+1}}\right)+P_{m-1} a_m}{Q_m\left(b_m+\dfrac{a_{m+1}}{b_{m+1}}\right)+Q_{m-1} a_m}=\frac{b_{m+1}(P_m b_m+P_{m-1} a_m)+P_m a_{m+1}}{b_{m+1}(Q_m b_m+Q_{m-1} a_m)+Q_m a_{m+1}} \\ &= \frac{P_{m+1} b_{m+1}+P_m a_{m+1}}{Q_{m+1} b_{m+1}+Q_m a_{m+1}} \end{aligned} \tag{119}$$

luego la ley es general y su traducción al lenguaje vulgar es muy fácil.

105. **Propiedades fundamentales de las reducidas.** I. Se tiene:

$$\frac{P_n}{Q_n}-\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}=\frac{P_n Q_{n-1}-Q_n P_{n-1}}{Q_n Q_{n-1}} \tag{120}$$

pero según la fórmula (118) conocemos P_n, Q_n, luego:

$$\begin{aligned} P_n Q_{n-1}-Q_n P_{n-1} &= Q_{n-1}(P_{n-1} b_{n-1}+P_{n-2} a_{n-1})-P_{n-1}(Q_{n-1} b_{n-1}+Q_{n-2} a_{n-1}) \\ &= -a_{n-1}(P_{n-1} Q_{n-2}-P_{n-2} Q_{n-1}) \end{aligned}$$

Haciendo en esta expresión:

$$n=3, 4, \ldots\ldots, n$$

resulta:

$$\begin{aligned} &P_3 Q_2-Q_3 P_2=-(P_2 Q_1-P_1 Q_2) a_2 \\ &P_4 Q_3-Q_4 P_3=-(P_3 Q_2-Q_3 P_2) a_3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &P_n Q_{n-1}-Q_n P_{n-1}=-(P_{n-1} Q_{n-2}-P_{n-2} Q_{n-1}) a_{n-1} \end{aligned}$$

Multiplicando ordenadamente las $n-2$ precedentes relaciones, se tiene:

$$P_n Q_{n-1}-Q_n P_{n-1}=(-1)^{n-2}(P_2 Q_1-Q_2 P_1) a_2 a_3 a_4 \ldots\ldots a_{n-1} \tag{121}$$

Pero se tiene:

$$P_1=a_0, \quad Q_1=1, \quad P_2=a_0 b_1+a_1, \quad Q_2=b_1$$

De consiguiente:

$$P_2 Q_1-P_1 Q_2=a_1$$

y

$$P_n Q_{n-1}-Q_n P_{n-1}=(-1)^{n-2}.a_1.a_2.a_3.a_4 \ldots\ldots a_{n-1} \tag{122}$$

Sustituyendo en (120) resulta:

$$\frac{P_n}{Q_n}-\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}=\frac{(-1)^{n-2} a_1.a_2.a_3 \ldots\ldots a_{n-1}}{Q_n Q_{n-1}} \tag{123}$$

Así pues: *las diferencias entre las reducidas sucesivas son alternativamente de signos contrarios y el valor absoluto de cada diferencia es igual al producto de los numeradores de las fracciones integrantes que figuran en la reducida de orden más elevado, dividido por el producto de los denominadores de las reducidas consideradas.*

II. Si se aplica la fórmula (118) á la reducida $\frac{P_n}{Q_n}$, se tiene:

$$\frac{P_n}{Q_n}=\frac{P_{n-1} b_{n-1}+P_{n-2} a_{n-1}}{Q_{n-1} b_{n-1}+Q_{n-2} a_{n-1}} \tag{124}$$

y si se pone en lugar de b_{n-1}:

$$x_{n-1}=b_{n-1}+\frac{a_n}{b_n+\text{etc.}}$$

el primer miembro será evidentemente el valor X de la fracción continua, luego:

$$X=\frac{P_{n-1} x_{n-1}+P_{n-2} a_{n-1}}{Q_{n-1} x_{n-1}+Q_{n-2} a_{n-1}} \tag{125}$$

de consiguiente:

$$X-\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}=\frac{(P_{n-2} Q_{n-1}-P_{n-1} Q_{n-2}) a_{n-1}}{Q_{n-1}(Q_{n-1} x_{n-1}+Q_{n-2} a_{n-1})}$$

y

$$\frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}}-X=\frac{(P_{n-2} Q_{n-1}-P_{n-1} Q_{n-2}) x_{n-1}}{Q_{n-2}(Q_{n-1} x_{n-1}+Q_{n-2} a_{n-1})}$$

Pero en la fórmula (122) se obtiene:

$$P_{n-1} Q_{n-2}-P_{n-2} Q_{n-1}=(-1)^{n-3} a_1 a_2 \ldots\ldots a_{n-2}$$

luego:

$$\left.\begin{aligned} X-\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} &= \frac{(-1)^{n-4} a_1 a_2 a_3 \ldots\ldots a_{n-2} a_{n-1}}{Q_{n-1}(Q_{n-1} x_{n-1}+Q_{n-2} a_{n-1})} \\ \frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}}-X &= \frac{(-1)^{n-4} a_1 a_2 a_3 \ldots\ldots a_{n-2} a_{n-1}}{Q_{n-2}(Q_{n-1} x_{n-1}+Q_{n-2} a_{n-1})} \end{aligned}\right\} \tag{126}$$

Así pues:

$$X-\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} \quad \text{y} \quad \frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}}-X$$

son del mismo signo, luego X *está comprendida entre dos reducidas consecutivas.*

Si las cantidades: $a_1, a_2, \ldots\ldots, b_1, b_2, \ldots\ldots$ son positivas, se puede fijar un *límite superior* del error que se comete cuando se toma por valor de la fracción continua la $n-1^{\text{ésima}}$ reducida.

En efecto, se tiene:

$$Q_n = Q_{n-1} b_{n-1} + Q_{n-2} a_{n-1} \qquad (x_{n-1} > b_{n-1})$$

De consiguiente (fórmula 126):

$$x - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} < \frac{(-1)^{n-4} a_1 a_2 \ldots\ldots a_{n-1}}{Q_{n-1} Q_n}$$

y como

$$Q_{n-1} < Q_n$$

a fortiori:

$$x - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} < \frac{(-1)^{n-4} a_1 a_2 \ldots\ldots a_{n-1}}{Q_{n-1}^2} \qquad (127)$$

104. **Convergencia de las fracciones continuas.** Para estudiar esta cuestión hay que convertir en serie la nª reducida.

Si en la fórmula (123) se da á n los valores: 2, 3, ... n, se tendrá:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{P_2}{Q_2} - \frac{P_1}{Q_1} = \frac{a_1}{Q_2 Q_1} \\
&\frac{Q_3}{P_3} - \frac{P_2}{Q_2} = -\frac{a_1 a_2}{Q_3 Q_2} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-2} a_1 a_2 a_3 \ldots\ldots a_{n-1}}{Q_n Q_{n-1}}
\end{aligned}\right\} \qquad (128)$$

Sumando ordenadamente las precedentes relaciones, resulta:

$$\frac{P_n}{Q_n} = a_0 + \frac{a_1}{Q_2 Q_1} - \frac{a_1 a_2}{Q_3 Q_2} + \frac{a_1 a_2 a_3}{Q_4 Q_3} - \ldots\ldots + \frac{(-1)^{n-2} a_1 a_2 \ldots\ldots a_{n-1}}{Q_n Q_{n-1}} \qquad (129)$$

Si esta serie es convergente (véase el Capítulo V) lo será la fracción propuesta.

107. **Fracciones continuas ordinarias.** Supondremos que la fracción continua tiene la forma:

$$a_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{b_3 + \ldots}}} \qquad (130)$$

por ser esta clase de fracciones las de mayor aplicación, lo que se consigue suponiendo en la fórmula general (116):

$$a_1 = a_2 = a_3 = \ldots\ldots = 1$$

entonces los cocientes incompletos serán:

$$a_0,\ b_1,\ b_2,\ \text{etc.}$$

Puede faltar la parte entera inicial de la fracción continua y se supone entonces que

es 0; pero puede en general escribirse como fórmula tipo de fracciones continuas ordinarias:

$$b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{b_3 + \cfrac{1}{b_4 + \text{etc.}}}} \qquad (130')$$

Haciendo: $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots\ldots = 1$ en la fórmula (118), resulta:

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{P_n b_{n+1} + P_{n-1}}{Q_n b_{n+1} + Q_{n-1}} \qquad (131)$$

fórmula general referida á la (130′).

De consiguiente: *el numerador de una reducida de cualquier orden se forma multiplicando el numerador de la precedente por el cociente incompleto que le corresponde y añadiendo á dicho producto el numerador de la reducida anteprecedente á la que se va á formar.*

El denominador sigue la mismo ley, formándose con los dos denominadores precedente y anteprecedente y el cociente incompleto que corresponde.

108. Supongamos que se tiene $\frac{159}{493}$ fracción irreductible que bajo esta forma no nos da una idea clara de su valor y veremos cómo se procede para conseguirlo.

Para ello dividamos sus dos términos entre 159 (lo que no altera el quebrado), y tendremos:

$$\frac{1}{\frac{493}{159}} = \frac{1}{3 + \frac{16}{159}}$$

Despreciando $\frac{16}{159}$, tendremos $\frac{1}{3}$ por resultado, cantidad mayor que $\frac{1}{3+\frac{16}{159}}$.

Si en vez de despreciar $\frac{16}{159}$ suponemos que vale 1, tendremos por resultado $\frac{1}{4}$, número menor que $\frac{1}{3+\frac{16}{159}}$; vemos pues que la fracción propuesta $\frac{1}{3+\frac{16}{159}}$ está comprendida entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{4}$, lo que ya da idea aproximada de su valor.

Operando con $\frac{16}{159}$ como lo hemos hecho con el primitivo quebrado, se tendrá:

$$\frac{16}{159} = \frac{1}{\frac{159}{16}} = \frac{1}{9 + \frac{15}{16}}$$

es decir:

$$\frac{159}{493} = \frac{1}{\frac{493}{159}} = \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{15}{16}}}$$

despreciando $\frac{15}{16}$, tendremos $\frac{1}{9} > \frac{16}{159}$ y $\frac{1}{3+\frac{1}{9}}$ será menor que $\frac{159}{493}$. Pero $\frac{1}{3+\frac{1}{9}} = \frac{9}{28}$; luego la fracción propuesta está comprendida entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{9}{28}$ que da á conocer su valor con mayor aproximación.

Como la diferencia entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{9}{28}$ es:

$$\frac{1}{3} - \frac{9}{28} = \frac{1}{84}$$

el error que se comete tomando $\frac{1}{3}$ por valor de $\frac{159}{493}$ es $\frac{1}{84}$ menor que el verdadero, cantidad casi despreciable.

Procediendo con $\frac{15}{16}$ lo mismo que con los anteriores quebrados, se tiene:

$$\frac{15}{16}=\frac{1}{\frac{16}{15}}=\frac{1}{1+\frac{1}{15}}$$

luego la fracción propuesta será:

$$\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{15}}}}$$

prescindiendo de $\frac{1}{15}$, la última fracción se reduce á $\frac{1}{1}=1$ mayor que $\frac{15}{16}$ y $\frac{1}{9+1}=\frac{1}{10}$ es menor que $\frac{16}{159}$, finalmente:

$$\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{1}}}=\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{10}}=\frac{10}{31}$$

es mayor $\frac{159}{463}$. Luego $\frac{159}{493}$ está comprendido entre $\frac{9}{28}$ menor que él y $\frac{10}{31}$ mayor que él, la diferencia entre estos dos valores es $\frac{1}{868}$ y el error que se cometiese tomando cualquiera de los dos precedentes valores por valor del quebrado propuesto, sería menor que $\frac{1}{868}$.

Vemos por la serie precedente de operaciones, que podemos llegar á encontrar fracciones de términos sencillos que dan valores aproximados de una fracción de términos grandes.

109. Concluimos, pues, que el valor del quebrado propuesto, bajo la forma de fracción continua, será:

$$\frac{159}{493}=\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{15}}}}$$

aproximadamente.

110. Como el valor en fracción continua del quebrado propuesto, se ha obtenido por una serie de divisiones, como al obtener el m. c. d. de dos números, podemos establecer la siguiente regla:

Extráigase el m. c. d. de los términos del quebrado hasta hallar un residuo nulo (si hay reducción), *los cocientes serán los denominadores de las fracciones integrantes de la fracción continua. Es claro que si el número fraccionario propuesto es >1, el primer cociente representa la parte entera que entra en la expresión de la fracción continua.*

111. I. Para aplicar la regla tomemos por ejemplo el $\frac{12}{93}$ que da:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} 93 & 12 & 9 & 3 & 0 \\ \hline & 7 & 1 & 3 & \end{array}$$

luego:

$$\frac{12}{93}=\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}$$

II. El quebrado $\frac{65}{149}$ da:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c} 149 & 65 & 19 & 8 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ \hline & 2 & 3 & 2 & 2 & 1 & 2 & \end{array}$$

luego:

$$\frac{65}{149}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}}}$$

III. Sea el quebrado $\frac{829}{347}$ que da:

$$\frac{829}{347}=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{19}}}}}$$

IV. Sea $\frac{104}{28}$ que produce:

$$\frac{104}{28}=3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}$$

112. Vamos á pasar ahora á aplicar la ley de formación de las reducidas á un ejemplo, estudiando luego las propiedades de las reducidas, sobre cuya teoría pueden consultarse con fruto las "*Adiciones* de Lagrange" al "*Álgebra*" de Euler.

113. Sea

$$\frac{65}{149}=0+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}}}$$

(Ejemplo II).

Según la ley de formación de las reducidas, tendremos (formadas de antemano las dos primeras):

1ª reducida................. $\frac{0}{1}=0$

2ª „ .... $\frac{0.2+1}{2}=\frac{1}{2}$

3ª „ .... $\frac{1.3+0}{2.3+1}=\frac{3}{7}$

4ª „ .... $\frac{3.2+1}{7.2+2}=\frac{7}{16}$

5ª „ .... $\frac{7.2+3}{16.2+7}=\frac{17}{39}$

6ª „ .... $\frac{17.1+7}{39.1+16}=\frac{24}{55}$

7ª „ .... $\frac{24.2+17}{55.2+39}=\frac{65}{149}$