114. Propiedades generales de las reducidas. I. *Las reducidas son alternativamente mayores y menores que la fracción continua.* Esto se deduce del párrafo 105–II.

II. *La diferencia entre dos reducidas consecutivas es una fracción cuyo numerador es $+1$ ó -1, según que el rango de la segunda sea par ó impar.* Esto se deduce del párrafo 105–I, como igualmente que: *las diferencias entre las reducidas consecutivas son alternativamente de signos contrarios, que se forma el numerador como anuncia este teorema y que el denominador es el producto de los denominadores de las reducidas consideradas.*

Corolario. *Una reducida $\frac{R}{R'}$* (par ó impar) *es un quebrado irreductible.*

Supongamos que h es factor común de R y R', por la propiedad anterior se tiene:

$$RQ'-R'Q=\pm 1$$

si $\frac{Q}{Q'}$ es la reducida anterior; luego:

$$\frac{RQ'-QR'}{h}=\frac{RQ'}{h}-\frac{QR'}{h}=\frac{\pm 1}{h}$$

por ser h factor de R y de R' el primer miembro de esta ecuación es divisible entre h, y el segundo es una fracción propia, pues $h>1$, hipotéticamente; como esto es un absurdo, R y R' deben ser primos entre sí.

Si pues convertimos en fracción continua un quebrado capaz de simplificación, y formamos hasta la última reducida, hallaremos el quebrado simplificado ó reducido á su más simple expresión:

$$\frac{348}{924}=0+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{9}}}}$$

siendo las reducidas

$$\tfrac{0}{1},\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{2}{5},\ \tfrac{3}{8},\ \tfrac{29}{77}$$

vemos que:

$$\tfrac{348}{924}=\tfrac{29}{77}$$

III. *Todas las reducidas de orden par, son fracciones mayores y las de orden impar menores que el número reducido á fracción continua.* Se deduce de la I y II propiedad.

Por ejemplo:

$$\frac{65}{149}=0+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}}}$$

Reducidas:

$$\tfrac{0}{1},\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{3}{7},\ \tfrac{7}{16},\ \tfrac{17}{39},\ \tfrac{24}{55},\ \tfrac{65}{149}$$

en que:

$$\tfrac{65}{149}>\tfrac{0}{1}\text{ pero}<\tfrac{1}{2},\qquad >\tfrac{3}{7}\text{ pero}<\tfrac{7}{16},\text{ etc.}$$

IV. *Una reducida de un orden cualquiera da un valor más aproximado al de la fracción continua que la que le precede.*

De la fórmula (126) se deduce, que como se ha supuesto $Q_{n-1}>Q_{n-2}$:

$$Q_{n-1}(Q_{n-1}x_{n-1}+Q_{n-2}a_{n-1})>Q_{n-2}(Q_{n-1}x_{n-1}+Q_{n-2}a_{n-1})$$

luego:

$$X-\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}<\frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}}-X$$

que es lo que enuncia el teorema.

Corolario. De todo lo anterior se deduce que:

1º Como las reducidas de orden par son mayores que el quebrado y tienen que converger á él como límite, formarán una serie decreciente.

2º Como los impares son menores que el quebrado, para que tiendan á él formarán una serie creciente.

V. *Cada reducida está comprendida entre las dos que le preceden inmediatamente.*

De la fórmula (128) se infiere:

$$\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}-\frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}}=\frac{(-1)^{n-3}}{Q_{n-1}Q_{n-2}} \tag{132}$$

$$\frac{P_n}{Q_n}-\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}=\frac{(-1)^{n-2}}{Q_nQ_{n-1}} \tag{133}$$

Sumando estas relaciones:

$$\frac{P_n}{Q_n}-\frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}}=\frac{(-1)^{n-2}}{Q_{n-1}}\left(\frac{1}{Q_n}-\frac{1}{Q_{n-2}}\right) \tag{134}$$

Como $Q_n>Q_{n-2}$, la cantidad:

$$\frac{1}{Q_n}-\frac{1}{Q_{n-2}}$$

es negativa.

Si pues n es par, como $(-1)^{n-2}$ es entonces positivo,

$$\frac{P_n}{Q_n}-\frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}}$$

será negativo, y como entonces

$$\frac{P_n}{Q_n}-\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$$

es positivo, se tendrá:

$$\frac{P_n}{Q_n}<\frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}},\quad \frac{P_n}{Q_n}>\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$$

Si n es impar, $(-1)^{n-2}$ será negativo,

$$\frac{P_n}{Q_n}-\frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}}$$

será una diferencia positiva,

$$\frac{P_n}{Q_n}-\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$$

será negativo.

Se tiene, pues:

$$\frac{P_n}{Q_n} > \frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}}, \quad \frac{P_n}{Q_n} < \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$$

luego $\frac{P_n}{Q_n}$ está comprendido entre las reducidas

$$\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}, \quad \frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}}$$

VI. *El error que se comete tomando por valor de la fracción continua una de las reducidas, es menor que un quebrado cuyo numerador es 1 y el denominador el producto de los denominadores de esta reducida y su consecutiva.*

La diferencia entre dos reducidas consecutivas:

$$\frac{P_n}{Q_n} \text{ y } \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$$

es (párrafo 105-I):

$$\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-2}}{Q_n Q_{n-1}}$$

Así pues, como el valor de la fracción continua está comprendido entre ambas reducidas, la diferencia entre el valor de la fracción continua y una de las reducidas ó sea el error mencionado será menor que

$$\frac{(-1)^{n-2}}{Q_n Q_{n-1}}$$

VII. *El error que se comete tomando por valor de la fracción continua* (que llamaremos X) *una reducida, es menor que la 1 dividida por el producto del denominador de esta reducida por la suma de este denominador y del de la precedente reducida.*

El error mencionado es menor que la unidad dividida por el cuadrado del denominador de la reducida que se considere, y mayor que la unidad dividida entre el producto del denominador de la reducida que se considera por la suma de este denominador y el de la siguiente reducida (haciendo abstracción del signo de 1).

Tenemos por el párrafo 105-II:

$$X - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-4}}{Q_{n-1}(Q_{n-1}x_{n-1} + Q_{n-2})}$$

pero como:

$$x_{n-1} > 1, \quad Q_{n-1}(x_{n-1} + Q_{n-2}) > Q_{n-1}(Q_{n-1} + Q_{n-2})$$

y *a fortiori:*

$$X - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} < \frac{(-1)^{n-4}}{Q_{n-1}(Q_{n-1} + Q_{n-2})} \qquad (135)$$

y *a fortiori:*

$$X - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} < \frac{(-1)^{n-4}}{Q_{n-1}^2} \qquad (136)$$

Finalmente como se tiene (párrafo 105-II):

$$x_{n-1} = b_{n-1} + \frac{1}{b_n}$$

se tendrá:

$$x_{n-1} < b_{n-1} + 1$$

De consiguiente:

$$Q_{n-1}x_{n-1} + Q_{n-2} < Q_{n-1}(b_{n-1} + 1) + Q_{n-2}$$

ó bien:

$$Q_{n-1}x_{n-1} + Q_{n-2} < Q_{n-1}b_{n-1} + Q_{n-1} + Q_{n-2}$$

Pero como:

$$Q_{n-1}b_{n-1} + Q_{n-2} = Q_n$$

resulta:

$$Q_{n-1}x_{n-1} + Q_{n-2} < Q_n + Q_{n-1}$$

luego:

$$\frac{(-1)^{n-4}}{Q_{n-1}(Q_{n-1}x_{n-1} + Q_{n-2})} > \frac{(-1)^{n-4}}{Q_{n-1}(Q_n + Q_{n-1})}$$

finalmente:

$$X - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} > \frac{(-1)^{n-4}}{Q_{n-1}(Q_n + Q_{n-1})} \qquad (137)$$

VIII. *Una reducida cualquiera se acerca al valor de X, no sólo más que las precedentes, sino aun que otra función cuyo denominador sea menor que el de la reducida que se considera.*

Es decir, que no existe otra fracción que en términos más sencillos dé un valor más aproximado al de X.

Sea $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ la reducida que se considera y $\frac{m}{m'}$ una fracción tal que se tenga:

$$m' < Q_{n-1}$$

y vamos á demostrar que $\frac{m}{m'}$ no se acerca al valor de X más que $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$.

Desde luego $\frac{m}{m'}$ no puede estar comprendida entre $\frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}}$ y $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$, pues para esto la diferencia entre $\frac{m}{m'}$ y $\frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}}$ que es:

$$\frac{mQ_{n-2} - m'P_{n-2}}{m'Q_{n-2}}$$

numéricamente debía ser menor que la diferencia

$$\frac{(-1)^{n-3}}{Q_{n-1}Q_{n-2}} \text{ entre } \frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}} \text{ y } \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$$

Ahora bien, es imposible que:

$$\frac{mQ_{n-2} - m'P_{n-2}}{m'Q_{n-2}} < \frac{(-1)^{n-3}}{Q_{n-1}Q_{n-2}}$$

pues $mQ_{n-2} - m'P_{n-2}$ es un número entero por lo menos igual á 1.

Pero como $m' < Q_{n-1}$, resulta:

$$m'Q_{n-2} < Q_{n-1}Q_{n-2}$$

Resultado contradictorio con la desigualdad.

Estando pues X comprendido entre $\frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}}, \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ en cuyo caso no está $\frac{m}{m'}$, si escribimos estas cuatro cantidades en orden de magnitud, sólo habrá dos combinaciones posibles:

$$1^{a} \quad \frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}}, \; X, \; \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}, \; \frac{m}{m'}$$

$$2^{a} \quad \frac{m}{m'}, \; \frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}}, \; X, \; \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$$

En la primera combinación se tiene:

$$X-\frac{m}{m'}>X-\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$$

en la segunda:

$$X-\frac{m}{m'}>X-\frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}}$$

y *a fortiori:*

$$X-\frac{m}{m'}>X-\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$$

que es lo que debíamos demostrar.

N. B.—No puede suponerse:

$$mQ_{n-2}-m'P_{n-2}=0$$

pues resultaría:

$$\frac{m}{m'}=\frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}}$$

y $\frac{m}{m'}$ se confundiría con $\frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}}$.

Este principio da el medio de determinar en qué reducida conviene detenerse para que el error que se cometa sea menor que una fracción dada $\frac{1}{\delta}$.

Designando por $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ esta reducida desconocida; como tenemos:

$$X-\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}<\frac{1}{Q^2_{n-1}}$$

Es claro que el error será menor que $\frac{1}{\delta}$ si suponemos:

$$\frac{1}{Q^2_{n-1}}<\frac{1}{\delta}$$

de donde:

$$Q^2_{n-1}>\delta \quad \text{y} \quad Q_{n-1}>\sqrt{\delta}$$

no excluyendo el signo $>$ al signo $=$; así pues, *para obtener el valor de una fracción continua en menos de una unidad fraccionaria dada, basta detenerse en una reducida cuyo denominador sea igual cuando menos á la raíz cuadrada del de dicha unidad fraccionaria.*

IX. *Si una fracción irreductible está comprendida entre dos reducidas consecutivas, el denominador de la expresión dada es superior al denominador de cada una de las reducidas.*

Sea $\frac{a}{b}$ la fracción comprendida entre las reducidas consecutivas:

$$\frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}},\ \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$$

En valor absoluto se tiene:

$$\frac{a}{b}-\frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}}<\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}-\frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}}$$

luego:

$$\frac{a}{b}-\frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}}<\frac{1}{Q_{n-2}Q_{n-1}}$$

ó bien:

$$\frac{aQ_{n-2}-bP_{n-2}}{Q_{n-2}b}<\frac{1}{Q_{n-2}Q_{n-1}}$$

Como $aQ_{n-2}-bP_{n-2}$ es cantidad positiva y cuando menos igual á 1:

$$Q_{n-2}b>Q_{n-2}Q_{n-1}$$

ó bien:

$$b>Q_{n-1}$$

y *a fortiori:*

$$b>Q_{n-2}$$

X. *Toda fracción ordinaria que se aproxime más al valor de la fracción continua que una reducida cualquiera, es más complexa que dicha reducida.*

Sea $\frac{a}{b}$ la fracción y $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ la reducida considerada.

Se tiene por hipótesis:

$$X-\frac{a}{b}<X-\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$$

Por otra parte (teorema IV) en valor absoluto:

$$X-\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}<X-\frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}}$$

y *a fortiori:*

$$X-\frac{a}{b}<X-\frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}}$$

Mas como la cantidad X está comprendida entre dos reducidas consecutivas, lo propio pasará con $\frac{a}{b}$ y se tendrá (teorema IX):

$$b>Q_{n-1}$$

(Eduardo Prado.)

XI. *Si se desarrolla un número commensurable en fracción continua, ésta es limitada, y recíprocamente toda fracción continua limitada representa un número commensurable.*

Sea $\frac{a}{b}$ el número dado, y se tiene llamando α el cociente y r el resto de $a \div b$:

$$\frac{a}{b}=\alpha+\frac{r}{b}=\alpha+\cfrac{1}{\cfrac{b}{r}}$$

Análogamente:

$$\frac{b}{r}=\beta+\frac{r'}{r}=\beta+\cfrac{1}{\left(\cfrac{r}{r'}\right)}, \text{ etc.}$$

Tendríamos que seguir dividiendo $r \div r'$, y como los divisores sucesivos van disminuyendo, se llegará al fin á una resta que divida á la precedente; llamándola ω resultará la fracción continua limitada

$$\frac{a}{b}=\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\gamma+\ddots+\cfrac{1}{\omega}}}$$

Recíprocamente, si la fracción continua es limitada de la forma:

$$x=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d}}}$$

efectuando las operaciones indicadas se tendrá sucesivamente:

$$x=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d}}}=a+\frac{cd+1}{b(cd+1)+d}=\frac{d[c+a(bc+1)]+ab+1}{b(cd+1)+d}=\frac{A}{B}$$

número conmensurable.

XII. *Todo número inconmensurable corresponde á una fracción continua ilimitada y recíprocamente.*

En efecto, si la fracción fuese limitada, representaría un número conmensurable, tiene pues que ser ilimitada para que represente un número inconmensurable.

El número considerado no puede corresponder á una fracción continua limitada, porque ésta corresponde á un número conmensurable.

115. **Fracciones continuas periódicas.** Una fracción continua en la que una ó varias fracciones integrantes se reproducen siempre en el mismo orden, se llama *periódica.*

Es *pura* cuando el período principia desde el origen de la fracción, *mixta* cuando no sucede así.

116. TEOREMA. *Toda fracción continua periódica es una de las raíces de una ecuación de segundo grado, de coeficientes racionales.*

I. Supongamos que sea *periódica simple* [1] la fracción, es decir que se tenga:

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cdots+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cdots+\cfrac{1}{n+\text{etc.}}}}}}}} \qquad (138)$$

Representando por x el valor de esta fracción, debe tenerse:

$$x=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cdots+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{x}}}} \qquad (139)$$

puesto que la fracción sigue del mismo modo sin detenerse nunca.

Si designamos, pues, por $\frac{R}{R'}$ y $\frac{Q}{Q'}$ las dos reducidas que corresponden á los cocientes

[1] Periódica simple equivale á periódica pura.

incompletos n y el que precede á n, tendremos de consiguiente según los párrafos 105 y 107:

$$x=\frac{Rx+Q}{R'x+Q'}$$

de donde se deduce inmediatamente:

$$R'x^2-(R-Q')x-Q=0$$

Como esta ecuación de segundo grado de coeficientes racionales tiene Q negativo, las raíces serán de signos contrarios; y desechando la negativa que no satisface al problema, la raíz positiva será el valor de la fracción continua.

Supongamos que se tiene:

$$x=3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\text{etc.}}}}}}}}}$$

Pondremos:

$$x=3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{x}}}$$

Tomaremos las reducidas que son:

$$\frac{3}{1},\ \frac{4}{1},\ \frac{11}{3},\ \frac{11x+4}{3x+1}$$

resultará:

$$x=\frac{11x+4}{3x+1}$$

que da:

$$x=\frac{5+\sqrt{37}}{3}$$

valor de la fracción.

II. Si la fracción es *periódica mixta*, tendremos:

$$y=p+\cfrac{1}{q+\cdots+\cfrac{1}{r+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cdots+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cdots+\cfrac{1}{n+\text{etc.}}}}}}}}}$$