Llamando y al valor de la fracción y x al de la parte periódica:

$$y=p+\cfrac{1}{q+\cdots+\cfrac{1}{r+\cfrac{1}{x}}}$$

Designando por $\frac{V}{V'}$ y por $\frac{U}{U'}$ las reducidas correspondientes al cociente r y al precedente, se tendrá:

$$y=\frac{Vx+U}{V'x+U'}$$

Pero acabamos de hallar que:

$$x=\frac{Nx+M}{N'x+M'}$$

luego, eliminando á x entre esta ecuación de segundo grado en x y la primera que es de primer grado en x, resultará una ecuación de segundo grado en y de coeficientes racionales, lo que terminará definitivamente la demostración del teorema.

Como las dos raíces de la ecuación en y podrían ser positivas, evitaremos la dificultad de conocer cuál de las dos es el valor de la fracción periódica mixta calculando desde luego la raíz positiva de la ecuación:

$$N'x^2+x(M'-N)-M=0$$

y sustituyéndola en seguida en la:

$$y=\frac{Vx+U}{V'x+U'}$$

* **Teorema de Lagrange.** Lagrange en su "*Tratado de la resolución de las ecuaciones de todos los grados*" [1] ha demostrado la recíproca del teorema anterior más difícil de establecer que dicho teorema.

Trata de demostrarse que: *Las raíces inconmensurables de una ecuación de segundo grado de coeficientes racionales, están expresadas por fracciones continuas periódicas* (vease 2.ª parte, Cap. [redacted]). XIV.

1.º Consideremos la ecuación de segundo grado, de coeficientes racionales

$$ax^2+bx+c=0 \tag{140}$$

Resolviéndola se tendrá:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{\mp b+\sqrt{b^2-4ac}}{\pm 2a}$$

Tomando los signos superiores:

$$x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Tomando las inferiores:

$$x=\frac{+b+\sqrt{b^2-4ac}}{-2a} \quad \text{ó} \quad \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Así pues, suponiendo:

$$F=b^2-4ac$$

la expresión:

$$x=\frac{\mp b+\sqrt{F}}{\pm 2a}$$

representa las dos raíces de la propuesta.

[1] Tomo VIII, Capítulo VI de la edición completa de las "Obras de Lagrange," publicada por J. A. Serret, "Curso de Algebra Superior" por J. A. Serret (1885) y Comberousse obras citadas.

Sean

$$\mp b=B, \quad \pm 2a=2A$$

y representemos con la notación C_{-1} la cantidad c tomada con un signo tal que se tenga:

$$ac=-AC_{-1}$$

entonces:

$$F=B^2+4AC_{-1}$$

y

$$x=\frac{B+\sqrt{F}}{2A} \tag{141}$$

Si m^2 es el mayor cuadrado contenido en $\sqrt{F}$ y a el mayor entero contenido en $\frac{B+m}{2A}$, se podrá poner:

$$x=a+\frac{1}{x_1} \tag{142}$$

luego:

$$a+\frac{1}{x_1}=\frac{B+\sqrt{F}}{2A}$$

de donde:

$$x_1=\frac{2A}{B-2Aa+\sqrt{F}}=\frac{2A(B-2Aa-\sqrt{F})}{(B-2Aa)^2-F}=\frac{B_1+\sqrt{F}}{2A_1}$$

suponiendo las relaciones:

$$2Aa-B=B_1$$
$$\frac{F-(2Aa-B)^2}{2A}=2A_1$$

Podrá pues suponerse:

$$x_1=a_1+\frac{1}{x_2}$$

de consiguiente:

$$a_1+\frac{1}{x_2}=\frac{B_1+\sqrt{F}}{2A_1}$$

de donde:

$$x_2=\frac{2A_1}{B_1-2A_1a_1+\sqrt{F}}=\frac{B_2+\sqrt{F}}{2A_2}$$

En general:

$$x_n=\frac{B_n+\sqrt{F}}{2A_n} \tag{143}$$

2.º Sustituyendo en la propuesta por x, su valor:

$$a+\frac{1}{x_1}$$

se obtiene una ecuación de la forma:

$$a_1x_1^2+b_1x_1+c_1=0 \tag{144}$$

Si en esta se sustituye:

$$x_1=a_1+\frac{1}{x_2}$$

resulta:

$$a_2x_2^2+b_2x_2+c_2=0 \tag{144'}$$

Suponiendo:

$$x_2 = a_2 + \frac{1}{x_3}$$

se tendrá:

$$a_3 x_3^2 + b_3 x_3 + c_3 = 0 \qquad (145)$$

y en general sustituyendo en:

$$a_{n-1} x_{n-1}^2 + b_{n-1} x_{n-1} + c_{n-1} = 0$$

en lugar de

$$x_{n-1}, \quad a_{n-1} + \frac{1}{x_n}$$

resultará:

$$a_n x_n^2 + b_n x_n + c_n = 0 \qquad (146)$$

cuyos coeficientes están ligados por relaciones que vamos á deducir.

3° Como se tiene en general

$$x_n = \frac{\mp b_n + \sqrt{F}}{\pm 2 a_n}$$

en la que

$$F = b_n^2 - 4 a_n c_n$$

y además:

$$x_n = \frac{B_n + \sqrt{F}}{2 A_n}$$

es preciso tener:

$$B_n = \mp b_n, \quad 2 A_n = \pm 2 a_n, \quad F = B_n^2 + 4 A_n C_n^{-1} \qquad (147)$$

siendo C_n^{-1} como siempre el valor de c_n con un signo tal que se tenga:

$$a_n c_n = -A_n C_n^{-1}$$

De estas ecuaciones concluimos que:

$$\left.\begin{array}{l} F = B_1^2 + 4 A_1 C_1^{-1} \\ F = B_2^2 + 4 A_2 C_2^{-1} \\ F = B_3^2 + 4 A_3 C_3^{-1} \\ \dotfill \end{array}\right\} \qquad (148)$$

que son las relaciones que ligan á los coeficientes y las ecuaciones en que entran $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots$ como incógnitas dan á conocer los cocientes incompletos.

4° Con estas observaciones preliminares demostraremos: 1°, que las raíces de la propuesta se pueden desarrollar en fracciones continuas; 2°, que estas fracciones son siempre periódicas.

La primera parte fácilmente se demuestra con sustituir unos en otros los valores:

$$x = a + \frac{1}{x_1}, \quad x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2}, \quad x_2 = a_2 + \frac{1}{x_3}, \ldots\ldots$$

que producen:

$$x = a + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots}}} \qquad (149)$$

Para demostrar la segunda parte, comenzaremos por sustituir en la relacion

$$F = B_n^2 + 4 A_n C_n^{-1}$$

en lugar de B_n^2 su valor en función de F y A, lo que se conseguirá por las siguientes operaciones.

Sabemos que:

$$x_{n-1} = a_{n-1} + \frac{1}{x_n}$$

y que

$$x_{n-1} = \frac{B_{n-1} + \sqrt{F}}{2 A_{n-1}}$$

igualando los segundos miembros y despejando á x_n:

$$x_n = \frac{2 A_{n-1}}{B_{n-1} - 2 A_{n-1} a_{n-1} + \sqrt{F}} = \frac{2 A_{n-1} a_{n-1} - B_{n-1} + \sqrt{F}}{\left(\frac{F - (2 A_{n-1} a_{n-1} - B_{n-1})^2}{2 A_{n-1}}\right)}$$

De consiguiente, como también se tiene:

$$x_n = \frac{B_n + \sqrt{F}}{2 A_n}$$

inferimos:

$$B_n = 2 A_{n-1} a_{n-1} - B_{n-1}$$

$$2 A_n = \frac{F - (2 A_{n-1} a_{n-1} - B_{n-1})^2}{2 A_{n-1}} = \frac{F - B_n^2}{2 A_{n-1}}$$

Despejando de esta ecuación á B_n^2:

$$B_n^2 = F - 4 A_n A_{n-1}$$

sustituyendo este valor en la ecuación:

$$F = B_n^2 + 4 A_n C_n^{-1}$$

resulta después de reducir:

$$C_n^{-1} = A_{n-1} \qquad (150)$$

y la ecuación

$$a_n c_n = -A_n C_n^{-1}$$

se cambiará en:

$$c_n = -\frac{A_n}{a_n} A_{n-1} \qquad (151)$$

luego c_n es en valor absoluto igual á A_{n-1}.

Ahora bien, de las relaciones (148) se deduce que las cantidades:

$$B_1, \; B_2, \; B_3, \ldots\ldots$$

son menores que $\sqrt{F}$ en valor absoluto y que las cantidades:

$$A_1, \; A_2, \; A_3, \ldots\ldots$$

son menores que $\frac{F}{4}$; esas cantidades deberán, pues, reproducirse y lo propio sucederá con los coeficientes de las transformadas sucesivas (146, etc.)

En efecto, si

$$B_n = B_s, \quad A_n = A_s$$

según la fórmula (148)

$$B_s^2 + 4 A_s C_s^{-1} = B_n^2 + 4 A_n C_n^{-1}$$

Además, según la (150):

$$C_n^{-1}=A_{n-1},\quad C_s^{-1}=A_{s-1}$$

luego:

$$C_n^{-1}=C_s^{-1},\quad A_{n-1}=A_{s-1}$$

De las fórmulas (147) y (151), inferimos:

$$b_n=b_s,\quad a_n=a_s,\quad c_n=c_s$$

Las transformadas:

$$a_n x_n^2+b_n x_n+c_n=0$$
$$a_s x_s^2+b_s x_s+c_s=0$$

serán pues idénticas, y la fracción continua será *periódica.*

118. **Conversión de las fracciones ordinarias en serie.** Para las fracciones ordinarias se tiene:

$$a_1=a_2=a_3=\ldots\ldots=1$$

luego:

$$\frac{P_1}{Q_1}=\frac{a_0}{1}$$

sustituyendo en la fórmula (129), hallaremos:

$$\frac{P_n}{Q_n}=\frac{a_0}{1}+\frac{1}{Q_1Q_2}-\frac{1}{Q_2Q_3}+\ldots\ldots \tag{152}$$

serie que según el Capítulo IV, es siempre convergente.

119. **Conversión de las series en fracciones continuas.** I. Consideremos la serie convergente

$$S=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_4}+\ldots\ldots \tag{152'}$$

Se tiene:

$$\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}=\frac{a_2-a_1}{a_1a_2}=\cfrac{1}{a_1+\cfrac{a_1^2}{a_2-a_1}} \tag{152''}$$

Reemplazando $\frac{1}{a_2}$ por $\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}$, es decir por:

$$\frac{a_3-a_2}{a_2a_3}=\cfrac{1}{\cfrac{a_2a_3}{a_3-a_2}}$$

esto equivale á reemplazar a_2 por:

$$\frac{a_2a_3}{a_3-a_2}=\cfrac{a_2}{1-\cfrac{a_2}{a_3}}=a_2+\cfrac{\cfrac{a_2^2}{a_3}}{1-\cfrac{a_2}{a_3}}=a_2+\frac{a_2^2}{a_3-a_2}$$

Efectuando, pues, los cambios convenientes en los dos miembros de (152''), resulta:

$$\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}=\cfrac{1}{a_1+\cfrac{a_1^2}{a_2+\cfrac{a_2^2}{a_3-a_2}-a_1}}=\cfrac{1}{a_1+\cfrac{a_1^2}{a_2-a_1+\cfrac{a_2^2}{a_3-a_2}}}$$

Análogamente mudando $\frac{1}{a_3}$ en:

$$\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_4}$$

en el primer miembro y cambiando en el segundo a_3 por

$$a_3+\frac{a_3^2}{a_4-a_3},\ \text{etc.}$$

el valor de S será finalmente

$$S=\cfrac{1}{a_1+\cfrac{a_1^2}{a_2-a_1+\cfrac{a_2^2}{a_3-a_2+\cfrac{a_3^2}{a_4-a_3+\cfrac{a_4^2}{a_5-a_4+\ldots\ldots}}}}} \tag{153}$$

II. Sea la serie convergente

$$B=b_1-b_2+b_3-b_4+\ldots\ldots$$

Haciendo en la fórmula (152') del ejemplo precedente:

$$a_1=\frac{1}{b_1},\quad a_2=\frac{1}{b_2},\ \text{etc.}$$

se tendrá:

$$B=\cfrac{1}{\cfrac{1}{b_1}+\cfrac{\cfrac{1}{b_1^2}}{\cfrac{1}{b_2}-\cfrac{1}{b_1}+\cfrac{\cfrac{1}{b_2^2}}{\cfrac{1}{b_3}-\cfrac{1}{b_2}+\cfrac{\cfrac{1}{b_3^2}}{\cfrac{1}{b_4}-\cfrac{1}{b_3}+\text{etc.}}}}}=\cfrac{b_1}{1+\cfrac{b_2}{b_1-b_2+\cfrac{b_1b_3}{b_2-b_3+\cfrac{b_2b_4}{b_3-b_4+\text{etc.}}}}} \tag{154}$$

III. Sea

$$C=\frac{1}{a}-\frac{1}{ab}+\frac{1}{abc}-\frac{1}{abcd}+\ldots\ldots$$

Haciendo en la fórmula (153):

$$a_1=a,\quad a_2=ab,\quad a_3=abc,\ \text{etc.}$$

se tendrá:

$$C=\cfrac{1}{a+\cfrac{a^2}{ab-a+\cfrac{a^2b^2}{abc-ab+\cfrac{a^2b^2c^2}{abcd-abc+\ldots\ldots}}}}=\cfrac{1}{a+\cfrac{a}{b-1+\cfrac{ab^2}{abc-ab+\cfrac{a^2b^2c^2}{abcd-abc+\ldots\ldots}}}}$$

$$=\cfrac{1}{a+\cfrac{a}{b-1+\cfrac{b}{c-1+\cfrac{abc^2}{abcd-abc+\ldots\ldots}}}}=\cfrac{1}{a+\cfrac{a}{b-1+\cfrac{b}{c-1+\cfrac{c}{d-1+\ldots\ldots}}}} \tag{155}$$

IV. Sea la serie $\frac{1}{e}$ que es ([1]):

$$\frac{1}{e}=\mathrm{D}=\frac{1}{1.2}-\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}-\frac{1}{1.2.3.4.5}+\cdots\cdots$$

Suponiendo en la fórmula (155):

$$a=1.2,\quad b=3,\quad c=4,\quad d=5,\ \text{etc.}$$

$$\frac{1}{e}=\mathrm{D}=\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{2+\cfrac{3}{3+\cfrac{4}{4+\cdots}}}}\qquad \text{ó bien:}\quad e=2+\cfrac{2}{2+\cfrac{3}{3+\cfrac{4}{4+\cfrac{5}{5+\cfrac{6}{6+\text{etc.}}}}}} \tag{156}$$

V. Sea

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots\cdots$$

comparándola con la (153) da:

$$\frac{\pi}{4}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+\cdots}}}}} \tag{157}$$

fórmula dada por la primera vez por Brouncker sin demostración.

Lord W. Brouncker, irlandés (1620–1684), halló esta serie trabajando en un problema que Wallis, gran amigo suyo, se había propuesto resolver pidiéndole ayuda; fué uno de los fundadores de la Sociedad Real de Londres; publicó en 1668 en las memorias de esta Sociedad (Philosophical Transactions, nº 34) otro descubrimiento referente al desarrollo en serie de la área de la hipérbola.

EJEMPLOS.

120. Calcular aproximadamente el valor de la cantidad

$$\frac{5+\sqrt{37}}{3}$$

en menos de media diezmilésima.

Desde luego, como media diezmilésima equivale á $\frac{1}{20000}$ y es 142 la raíz cuadrada por exceso de 20000, debe llegarse á una reducida cuyo denominador difiera poco de 142.

En este supuesto, siendo 6 el mayor número entero contenido en $\sqrt{37}$, vemos que

([1]) Esta serie es el desarrollo de $\left(1-\frac{1}{m}\right)^{m}_{(m=\infty)}$ ó bìen $\frac{1}{e}$ (véase Capítulo IV, párrafo 96″).

la cantidad propuesta es mayor que $\frac{11}{3}=3+\frac{2}{3}$ y menor que $\frac{12}{3}=4$; así pues, su valor será:

$$3+\frac{1}{x}\qquad (x>1)$$

luego:

$$\frac{5+\sqrt{37}}{3}=3+\frac{1}{x}$$

Deducimos de aquí:

$$x=\frac{3}{\sqrt{37}-4}=\frac{\sqrt{37}+4}{7}$$

Siendo 1 el mayor número entero comprendido en esta expresión:

$$x=1+\frac{1}{y}$$

de donde:

$$y=\frac{7}{\sqrt{37}-3}=\frac{\sqrt{37}+3}{4}$$

como el mayor número entero que entraña es 2:

$$y=2+\frac{1}{z}$$

lo que da:

$$z=\frac{\sqrt{37}+5}{3}$$

vemos que z es igual á la propuesta, de suerte que en la expresión de esta cantidad en fracción continua, los cocientes incompletos 3, 1, 2 se repetirán *periódicamente;* luego:

$$\frac{5+\sqrt{37}}{3}=3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cdots}}}}}$$

cuyas reducidas son:

$$\frac{3}{1},\ \frac{4}{1},\ \frac{11}{3},\ \frac{37}{10},\ \frac{48}{13},\ \frac{133}{36},\ \frac{447}{121}$$

Difiriendo poco de 142 el denominador de la última, el límite del error cometido será:

$$\frac{1}{121.157}=\frac{1}{18997}$$

La siguiente reducida $\frac{580}{157}$ resolverá el problema (véase el párrafo 114, etc.)

II. Sea $\frac{86400}{20929}$ que produce:

86400	20929	2684	2141	543	512	31	16	15	1	0
	4	7	1	3	1	16	1	1	15	

Reducidas:

$$\frac{4}{1},\ \frac{29}{7},\ \frac{33}{8},\ \frac{128}{31},\ \frac{161}{39},\ \frac{2704}{665},\ \frac{2865}{694},\ \frac{5569}{1349},\ \frac{86400}{120929}$$