CAPÍTULO VII.

FUNCIONES DERIVADAS Y FUNCIONES PRIMITIVAS.

132. La teoría que vamos á exponer es de todo punto indispensable para la mejor inteligencia de gran parte de las teorías subsecuentes; sólo daremos de ella una ligera idea, pues el ramo de la ciencia matemática que se ciñe á estudiarla en toda su extensión y generalidad es el llamado "Cálculo Infinitésimal," "Análisis Trascendente" y otras denominaciones análogas.

A la primera *escuela de Alejandría* se deben los trabajos más notables que basaron la Geometría, puesto que Euclides, Arquímedes y Apolonio de Perga la caracterizan y sus trabajos constituyeron los verdaderos fundamentos de dicha ciencia.

De los tres sabios mencionados, al segundo cabe la gloria de haber sido el primero en iniciar marcadamente las ideas especialísimas del Cálculo y se le considera como el verdadero autor del "*Método de los límites*," y según d'Alembert: "*la teoría de los límites es la base de la verdadera metafísica del Cálculo;*" además de esto, el método seguido por Arquímedes sigue en su marcha los mismos principios que el Análisis Infinitesimal (1).

Por último, este gran geómetra cuadrando la parábola, buscando la relación de la esfera al cilindro, etc., sin darse cuenta, inventaba el "Cálculo Integral" que más tarde habían otros de constituir partiendo de aquel primer germen.

Aunque después la ciencia continuó sus progresos, hasta el siglo XVI las nuevas ideas se iluminaron por completo. De los trabajos de Cavalieri (1598–1647), Descartes (1596–1650), Pascal (1623–1662), Fermat (1601–1665), Wallis (1616–1703), Barrow (1630–1677), etc., se desprenden más ó menos lúcidas esas nuevas ideas; pero Leibnitz (1646–1716) y Newton (1642–1727) fueron los que al fin metodizaron los principios esparcidos y dieron forma á los dos sistemas hasta el día usados: "*El Cálculo Diferencial* (Infinitesimal) y "*El Cálculo de los límites*" llamado por su inventor "*Método de las fluxiones.*" La Historia relata el memorable á la vez que apasionado debate que presenció el mundo científico con motivo de los encontrados fallos que concedían ya á uno, ya al otro, la prioridad de la invención.

(1) Carnot. "Reflexiones sobre la metafísica del Cálculo Infinitesimal."

Más tarde entre los sabios que por orden cronológico ampliaron el dominio de la ciencia, citaremos: los Bernoulli, Rolle, Parent, Ricati, Cotes, Mac-Laurin, Euler, Lambert, D'Alembert, Nicole, Cramer, Clairaut, Bezout, Condorcet, etc. Entre ellos hay que mencionar especialmente á Euler, que siguiendo las tendencias de su maestro Juan Bernoulli dió formas explícitas al Cálculo Integral. En fin, entre esta misma pléyade es necesario recordar al insigne Lagrange (1736–1813), que también patrocina otro tercer método característico para resolver los problemas del Cálculo y que se ha dado en llamar "Método de las Derivadas."

De todo lo anterior se saca como consecuencia que tres son los sistemas principales que deben citarse: "el de las Infinitesimales," "el de los Límites" y "el de las Derivadas;" á ellos habría que añadir otros dos recientes que no son sino otros dos modos de tratar la cuestión: "el de las Auxiliares Trigonométricas" y "el de las Nulidades," debidos ambos á dos notables y distinguidos matemáticos mexicanos, el señor Ingeniero Francisco Díaz Covarrubias y el señor Ingeniero Manuel Gargollo y Parra.

Las anteriores líneas sirvan para encarecer, no obstante su brevedad, el interés de este ramo de las Matemáticas, ya que la concisión de esta obra no permite entrar aquí en detalles más amplios sobre las ventajas é inconvenientes de dichos métodos. En las nociones que adelante vamos á explicar procuraremos ser concretos y sólo tocar los puntos que puedan tener inmediata aplicación.

133. Las cantidades que se consideran en matemáticas, ó tienen un valor determinado ó son susceptibles de tomar varios valores diversos; las primeras se llaman *constantes* y las segundas *variables*.

Entre las variables hay que considerar las *independientes*, á las que se les atribuyen valores arbitrarios, y las *ligadas, dependientes* ó *funciones de las primeras* que toman entonces valores determinados.

Una función se representa así:

$$y=f(x) \tag{161}$$

y es *explícita*, ó bien:

$$f(x, y)=0 \tag{161'}$$

y es *implícita*, referidas ambas á dos variables, de las cuales una es independiente x, y otra ligada y (1).

Una función es *algebraica* cuando la ecuación por la que está ligada á las variables independientes puede formarse sólo ejecutando las operaciones del Álgebra: 1º, suma y resta; 2º, multiplicación; 3º, división; 4º, elevación á potencias enteras (positivas); 5º, extracción de raíces de índices enteros (positivos); en caso contrario, la función es *trascendente*.

Pueden ser las funciones *explícitas* cuando la ecuación que liga á una función con las variables independientes está resuelta respecto á la función; en caso contrario son *implícitas*, según se ve en los tipos arriba escritos.

Las funciones algebraicas explícitas que no contienen radicales afectando variables, son *racionales*, y en caso contrario, *irracionales*.

Las funciones racionales pueden ser *enteras*, tales son los polinomios, ó bien *fraccionarias*, el cociente de dos polinomios.

Según esto, el cuadro siguiente no requiere explicación:

(1) En el Capítulo V, párrafos 83, 84, etc., hemos explicado sucintamente el método de los límites, y hemos usado las notaciones anteriores.

FUNCIONES SIMPLES.

FUNCIONES ALGEBRAICAS.

Primer grupo. { Suma.............. $y=a+x$
{ Resta.............. $y=a-x$

Segundo grupo. { Producto............ $y=ax$
{ Cociente............ $y=\frac{a}{x}$

Tercer grupo. { Potencia.......... $y=x^m$
{ Raíz.................. $y=\sqrt[m]{x}$ (m entero y positivo)

FUNCIONES TRASCENDENTES.

Primer grupo. { Exponencial............................ $y=a^x$ $y=e^x$
{ Logarítmica.............................. $y=\log_a x$ $y=\mathrm{Log}\, x$ (a número positivo)

Segundo grupo. { Circular directa.......................... $y=\mathrm{sen}\, x$, etc.
{ „ inversa.......................... $y=\mathrm{arco}\,(\mathrm{sen}=x)$, etc.

134. NOTAS. 1ª Reemplazando en cada función simple, salvo en las dos primeras, x por una función simple, se obtienen *funciones de funciones.*

Sea $y=ax;$ si por x ponemos $x=\mathrm{L}.x$, queda $y=a.\mathrm{L}x$, *función de función*, y todavía si por x ponemos $x=\mathrm{sen}\, x$, queda $y=a.\mathrm{L.sen}\, x$ *función de funciones.*

2ª Una función que depende de otras es una *función compuesta.*

135. Sea la función

$$y=f(x) \tag{162}$$

si le damos á la variable independiente x el incremento Δx, la función y tendrá un incremento Δy, y resultará:

$$y+\Delta y=f(x+\Delta x) \tag{163}$$

Restando (162) de (163), queda $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$, y dividiendo por Δx:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \tag{164}$$

Si Δx tiende á cero indefinidamente, el segundo miembro tenderá al límite de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$; dicho segundo miembro que representa *la relación entre el crecimiento de la función y el de la variable en caso de límite, se llama la primera derivada de la función* y se representa con el símbolo $f'(x)$; luego se tendrá:

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)$$

El límite de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ se escribe $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ y Leibnitz lo llama primer coeficiente diferencial de de la función propuesta, siendo $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}x$ cantidades infinitamente pequeñas que se denominan diferenciales de la función y y de la variable $x;$ la notación $f'(x)$ es de Lagrange, ambos símbolos, pues, se equivalen y se tendrá:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(x)$$

luego para determinar la diferencial de una función, se tendrá:

$$\mathrm{d}y=f'(x)\,\mathrm{d}x \tag{165}$$

Hay que observar que antes de llegar al límite que conduce á la derivada, antes de suponer Δx infinitamente pequeño, se tendrá designando por α una cantidad función de x y Δx que tiende á 0 con Δx:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\alpha$$

ó bien:

$$\Delta y=f'(x)\,\Delta x+\alpha\,\Delta x \tag{165'}$$

relación de gran interés.

136. **Teoremas sobre las derivadas.** Cuando el crecimiento de las variables se verifica por agregación de partes finitas y reales, iguales ó desiguales, es *discontinuo;* pero si para pasar de un valor á otro tiene que haber pasado por todos los intermedios, de tal modo que no pueden concebirse dos por cercanos que sean sin que entre ellos haya otro ú otros por donde haya debido pasar, el crecimiento es *continuo.*

Vamos á demostrar algunos teoremas sobre las derivadas de las funciones, teniendo en cuenta lo que acabamos de decir y después pasaremos á la explicación de teorías generales que sirven de fundamento á la investigación de las diferenciales de cada una de las funciones simples que hemos mencionado antes.

Como teoremas fundamentales citaremos los siguientes:

TEOREMA I. *Si la función* $\mathrm{f}(\mathrm{x})$ *admite una derivada* $\mathrm{f}'(\mathrm{x})$ *para todos los valores de* x *comprendidos en un intervalo* (a, b), *y dicha función se anula para* $\mathrm{x}=\mathrm{a}$, $\mathrm{x}=\mathrm{b}$; *la derivada* $\mathrm{f}'(\mathrm{x})$ *se anula* a fortiori *para un cierto valor* x_1 *de* x *comprendido entre* a *y* b.

La demostración directa de este teorema no es difícil, y en rigor deberíamos darla, pero como en último análisis este teorema es el de *Rolle*, nos conformamos con enviar al lector á la segunda parte de esta obra.

TEOREMA II. *Teniendo la función* $\mathrm{f}(\mathrm{x})$ *un valor finito y determinado para* $\mathrm{x}=\mathrm{a}$, $\mathrm{x}=\mathrm{b}$ *y los valores intermedios entre* a *y* b, *si admite una derivada finita y determinada para cada valor de* x *comprendido entre* a *y* b, *se tiene:*

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$$

siendo c *un número comprendido entre* a *y* b.

Por hipótesis, $f(a)$, $f(b)$ y $b-a$ son determinados, y como $b-a$ es diversa de cero, la fracción:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\mathrm{P}$$

siendo P un valor finito y determinado, de donde sale:

$$f(b)-f(a)=\mathrm{P}(b-a) \quad \text{ó} \quad f(b)-f(a)-\mathrm{P}(b-a)=0 \tag{165''}$$

Así pues, la función $f(b)-f(x)-\mathrm{P}(b-x)$ es finita y determinada para todo valor de x comprendido entre a y b. Además esta función es nula para $x=a$, en virtud de la condición (165″), se anula también para $x=b$, y en fin, para cualquier valor de x comprendido entre a y b admite una derivada justa y determinada: $-f'(x)+\mathrm{P}$; luego según el teorema anterior, esta derivada es nula á lo menos para un valor de x comprendido entre a y b que llamaremos $c;$ luego:

$$-f'(c)+\mathrm{P}=0 \quad \text{ó bien} \quad \mathrm{P}=f'(c) \quad \text{es decir} \quad \frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

lo que demuestra el teorema.

Poniendo $b-a=h$, puede escribirse $c=a+\theta h$, siendo θ incógnita pero >0 y <1; luego: $f(a+h)-f(a)=hf'(a+\theta h)$ que es la fórmula de los *incrementos finitos* (Ossian Bonnet).

N. B.—Esta demostración notable no exige que $f'(x)$ sea continua, sólo supone que la derivada $f'(x)$ existe y es finita en el intervalo (a, b).

Teorema III. *Sean* $\mathrm{f}(\mathrm{x})$, $\varphi(x)$ *dos funciones finitas y continuas en el intervalo* (a, b), *admitiendo en este intervalo cada una una derivada finita y bien determinada. Además, supongamos que* $\mathrm{f}(\mathrm{a})$, $\mathrm{f}(\mathrm{b})$, $\varphi(\mathrm{a})$, $\varphi(b)$ *sean números determinados, que la diferencia* $\varphi(b)-\varphi(\mathrm{a})$ *no sea nula, y en fin, que* $\mathrm{f}'(\mathrm{x})$ *y* $\varphi'(\mathrm{x})$ *no puedan ser nulas para un mismo valor de* x *comprendido entre* a *y* b, *llenadas estas condiciones y siendo* c *un número comprendido entre a y* b, *debe tenerse:*

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$$

En efecto, puede escribirse:

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\mathrm{P}\text{ número determinado.} \qquad (165''')$$

La función:

$$f(b)-f(x)-\mathrm{P}[\varphi(b)-\varphi(x)]$$

es nula para $x=a$ por la ecuación (165'''), también para $x=b$ y su derivada es:

$$-f'(x)+\mathrm{P}\varphi'(x)$$

finita y determinada para todo valor de x comprendido entre a y b, luego:

$$-f'(c)+\mathrm{P}\varphi'(c)=0$$

no puede ser $\varphi'(c)=0$, porque se tendría $f'(c)=0$ contrario á la hipótesis; luego:

$$\mathrm{P}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)} \quad \text{ó} \quad \frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$$

y como puede suponerse $b=a+h$ y designar por θ un número >0 y <1,

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{\varphi(a+h)-\varphi(a)}=\frac{f'(a+\theta h)}{\varphi'(a+\theta h)}$$

N. B.—Generalmente se aplica el teorema en un intervalo (a, b) en el que cada una de las derivadas $f'(x)$, $\varphi'(x)$ es diversa de cero.

Teorema IV. *Si una función* $\mathrm{F}(\mathrm{x})=\mathrm{c}$ *es constante, su derivada es nula.*

Tenemos por definición:

$$\mathrm{F}'(x)=\lim\frac{\mathrm{F}(x+h)-\mathrm{F}(x)}{h}; \text{ pero } \mathrm{F}(x+h)=c,\ \ \mathrm{F}(x)=c$$

Así pues:

$$\mathrm{F}(x+h)-\mathrm{F}(x)=0, \text{ de suerte que } \mathrm{F}'(x)=0$$

Recíprocamente, como se tiene siempre:

$$\mathrm{F}'(x)=0,\ \mathrm{F}'(x+\theta h)=0, \text{ y como } \mathrm{F}(x+h)-\mathrm{F}(x)=h\mathrm{F}'(x+\theta h),\ (0<\theta<1),$$
$$\text{resultará } \mathrm{F}(x+h)-\mathrm{F}(x)=0, \text{ ó bien } \mathrm{F}(x+h)=\mathrm{F}(x)$$

luego $\mathrm{F}(x)$ es constante.

Teorema V. *Si la diferencia entre dos funciones es constante, las derivadas son iguales.*

Si las funciones son $\mathrm{F}(x)$ y $f(x)$, supongamos $\mathrm{F}(x)-f(x)=\varphi(x)=\mathrm{C}$, $\varphi'(x)=0$; luego $\mathrm{F}'(x)=f'(x)$.

Recíprocamente, si $\mathrm{F}'(x)=f'(x)$, se tendrá: $\varphi'(x)=0$, $\varphi(x)=\mathrm{C}$; luego:

$$\mathrm{F}(x)-f(x)=\mathrm{C}$$

137. **Funciones inversas.** Sea $y=f(x)$; resolviendo esta función respecto á x, supongamos que resulta $x=\varphi(y)$: las dos funciones anteriores son inversas y conducen á un importante teorema.

De la primera se obtiene:

$$f'(x)=\lim\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}=\frac{1}{\lim\frac{\Delta x}{\Delta y}}=\frac{1}{\varphi'(y)}=\frac{1}{\varphi'[f(x)]}$$

luego *cuando dos funciones son inversas algebraicamente, sus derivadas lo son aritméticamente.*

138. **Funciones de funciones.** Sea $y=\mathrm{F}(u)$, $u=f(v)$, $v=\varphi(x)$.

Eliminando v y u, se obtendrá:

$$y=\mathrm{F}\{f[\varphi(x)]\} \qquad (166)$$

pero es fácil evitar esta sustitución dando á x un incremento Δx, que producirá incrementos correspondientes Δv, Δu y Δy.

Se tendrá idénticamente:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta v}\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x} \qquad (167)$$

Tendiendo Δx indefinidamente hacia cero, si el número de funciones superpuestas en y es finito, el límite del primer miembro será igual al producto de los límites del segundo, y por definición se obtendrá (párrafo 84, etc.) (1):

$$\mathrm{D}_x y=\mathrm{F}'(u)f'(v)\varphi'(x) \qquad (168)$$

luego *la derivada de una función de funciones es igual al producto de las derivadas de las funciones sucesivas, cada una de estas derivadas debiendo tomarse con relación á la variable de la que depende la función considerada inmediatamente.*

Para pasar á la diferencial

$$\mathrm{d}y=\mathrm{F}'(u)f'(v)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$$

Puede aún escribirse así la relación:

$$\mathrm{d}y=\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\right)\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\right)\mathrm{d}v$$

ó sencillamente:

$$\mathrm{d}y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\cdot\mathrm{d}v \qquad (169)$$

(1) Cuando hay más de dos variables y se trata de indicar que la derivada de la función se toma especialmente con respecto á x, por ejemplo, se adopta la notación $\mathrm{D}_x y$.

Nota.—Hay que notar bien que dy, dv son las diferenciales de y y v respecto á x, que $\frac{dy}{du}$ y $\frac{du}{dv}$ son las derivadas de y respecto á u y u respecto á v, que en $\frac{dy}{du}$, u es la variable independiente y en $\frac{du}{dv}$ es la función.

139. **Funciones de muchas variables.** En una función de varias variables independientes si cada una varía separada y sucesivamente, se irán obteniendo tantas expresiones por valor de la diferencial como variables haya de esta especie; estas diferenciales se denominan *parciales* y la diferencial que resulta haciendo á la vez variar á todas, se llama *total.* Si en la función $u = F(x, y, z)$ consideramos á x como única variable y hacemos constantes á las otras dos, obtendremos una primera derivada parcial $\frac{du}{dx}$, si y es la que consideramos como variable, el resultado será $\frac{du}{dy}$ y $\frac{du}{dz}$, si z es la considerada como variable.

Estos resultados se escriben también con otras notaciones:

$$\frac{du}{dx} = \frac{dF(x, y, z)}{dx} = F'_x(x, y, z), \quad \frac{du}{dy} = \frac{dF(x, y, z)}{dy} = F'_y(x, y, z), \text{ etc.}$$

Expuesto lo anterior, sea:

$$y = f(u, v) \tag{170}$$

una función de dos variables independientes.

Dando á u y v incrementos infinitamente pequeños Δu, Δv independientes ó no uno de otro, según lo sean ó no entre sí u y v, y recibirá el incremento Δy; luego:

$$y + \Delta y = f(u + \Delta u, v + \Delta v), \quad \Delta y = f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v) \tag{171}$$

Agregando y quitando al segundo miembro $f(u + \Delta u, v)$, se puede escribir:

$$\Delta y = f(u + \Delta u, v) - f(u, v) + f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u + \Delta u, v) \tag{172}$$

Designemos por un momento por $f'_u(u, v)$ la *derivada parcial* de $f(u, v)$ ó de y respecto de u, es decir, la derivada de la función tomada considerando u como variable independiente y v como constante. Cuando se da á u solamente el incremento Δu, siendo el de la función $f(u + \Delta u, v) - f(u, v)$, podremos escribir (párrafo 135):

$$f(u + \Delta u, v) - f(u, v) = [f'_u(u, v) + \alpha]\, \Delta u \tag{173}$$

siendo α una cantidad que se anula con Δu.

Asimismo sea $f'_v(u + \Delta u, v)$ la *derivada parcial* de la función $f(u + \Delta u, v)$ respecto á v, siendo v variable independiente y $u + \Delta u$ constante.

El incremento de la función $f(u + \Delta u, v)$ correspondiente al Δv que se da á v, es:

$$f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u + \Delta u, v)$$

Podremos escribir:

$$f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u + \Delta u, v) = [f'_v(u + \Delta u, v) + \beta]\, \Delta v$$

Anulándose β con Δv.

Por otra parte, si $f'_v(u, v)$ es la *derivada parcial* de $f(u, v)$ ó de y respecto á v, sólo puede diferir de $f'_v(u + \Delta u, v)$ por una cantidad infinitamente pequeña γ que se anule con Δu.

Suponiendo $\beta + \gamma = \alpha'$, la expresión precedente será:

$$f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u + \Delta u, v) = [f'_v(u, v) + \alpha']\, \Delta v \tag{174}$$

Agregando miembro á miembro las ecuaciones (172), (173) y (174), y simplificando:

$$\Delta y = [f'_u(u, v) + \alpha]\, \Delta u + [f'_v(u, v) + \alpha']\, \Delta v$$

Las cantidades $\alpha \Delta u$, $\alpha' \Delta v$ son infinitamente pequeñas respecto á la primera y á la segunda parte del valor de Δy. Si ω representa una cantidad infinitamente pequeña respecto á Δy, puede escribirse:

$$\omega = \alpha \Delta u + \alpha' \Delta v \quad \text{luego} \quad \Delta y = f'_u(u, v)\, \Delta u + f'_v(u, v)\, \Delta v + \omega$$

que es la expresión deseada; adoptando las notaciones explicadas, resultará:

$$\Delta y = \frac{dy}{du}\, \Delta u + \frac{dy}{dv}\, \Delta v + \omega \tag{175}$$

Nota.—ω se compone de dos partes, de $\alpha \Delta u$ que dividida por Δu es nula aun para $\Delta u = 0$, y de $\alpha' \Delta v = (\beta + \gamma)\, \Delta v$ que después dividida por Δv contiene términos que se anulan, unos para $\Delta u = 0$ y otros para $\Delta v = 0$.

140. **Funciones compuestas.** Los resultados anteriores van á servirnos inmediatamente. Sea

$$y = f(u, v, w \ldots\ldots) \tag{176}$$

y

$$u = F(x), \quad v = \varphi(x), \quad w = \psi(x), \ldots\ldots$$

y es una *función compuesta* de x.

Por lo antes demostrado:

$$\Delta y = \frac{dy}{du}\, \Delta u + \frac{dy}{dv}\, \Delta v + \frac{dy}{dw}\, \Delta w + \ldots\ldots + \omega$$

siendo ω infinitamente pequeño relativamente á Δy.

Dividiendo ambos miembros por Δx

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{dy}{dv} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{dy}{d\omega} \cdot \frac{\Delta \omega}{\Delta x} + \ldots\ldots + \frac{\omega}{\Delta x}$$

pasando al límite (siendo finito el número de variables) como $\frac{\omega}{\Delta x}$ es nulo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} + \frac{dy}{dw} \cdot \frac{dw}{dx} + \ldots\ldots \tag{177}$$

Nota.—$\frac{dy}{du}$, $\frac{dy}{dv}$, $\frac{dy}{dw}$...... son las *derivadas parciales* de la función y respecto á las diversas variables u, v, w, ... Las expresiones:

$$\frac{du}{dx}, \ \frac{dv}{dx}, \ \frac{dw}{dx}, \ldots\ldots$$

son las *derivadas* de las variables ó de las funciones u, v, w, ... respecto á x.

El primer miembro expresa la *derivada completa* de la función y en la que se hacen variar todas las cantidades dependientes de x.

Si $u = x$, $\frac{dy}{du}$ sería $\frac{dy}{dx}$, ó bien la derivada parcial de la función respecto á x solamente, y el primer miembro representaría siempre su derivada completa.