140'. En resumen: *La derivada de la función compuesta* y *es la suma de sus derivadas parciales respecto á las variables de que depende; estando cada derivada parcial multiplicada por la derivada de la variable correspondiente respecto á* x.

Puede escribirse la fórmula así:

$$dy = \frac{dy}{du}du + \frac{dy}{dv}dv + \frac{dw}{dx}dw + \ldots\ldots \qquad (177')$$

Si sólo u fuese variable:

$$dy = \frac{dy}{du}du$$

En general según (177'), *la diferencial de una función compuesta es igual á la suma de las diferenciales parciales respecto á cada una de las variables que entran explícitamente.*

Entremos ahora al estudio detallado de los tipos de funciones simples que antes citamos.

141. **Diferencial de una suma.** Sea $y = u + v - t + \ldots\ldots$ en que u, v, t son funciones de x de diferenciales conocidas y en número finito, se tiene incrementándolas:

$$y + \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - t - \Delta t + \ldots\ldots$$

restando la primera ecuación de la segunda:

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v - \Delta t + \ldots\ldots \text{ dividiendo por } \Delta x\text{:} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\Delta t}{\Delta x} + \ldots\ldots$$

pasando al límite:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dt}{dx} + \ldots\ldots$$

multiplicando por dx:

$$dy = du + dv - dt + \ldots\ldots \qquad (178)$$

El primer grupo de funciones simples $y = a \pm x$, da pues a es constante: $dy = \pm dx$. Por el procedimiento directo se tendrá incrementando á x y restando el resultado de la ecuación propuesta: $\Delta y = \pm \Delta x$, luego como antes:

$$dy = \pm dx \qquad (178')$$

142. **Diferencial de un producto.** Sea $y = uv$ en que u y v son funciones de x, se tendrá:

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) = uv + v\Delta u + u\Delta v + \Delta u \Delta v \text{ luego } \Delta y = v\Delta u + u\Delta v + \Delta u \Delta v$$

dividiendo por Δx:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = v\frac{\Delta u}{\Delta x} + u\frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}\Delta x$$

pasando al límite:

$$\frac{dy}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}$$

pues el término tercero es nulo, supuesto que límite $\Delta x = 0$.

La expresión anterior puede escribirse:

$$dy = v\,du + u\,dv \qquad (179)$$

de la que es fácil deducir la regla.

La primera función del segundo grupo de funciones simples es $y = ax$, siendo a constante, se tendrá por lo que acaba de demostrarse:

$$dy = a\,dx \qquad (179')$$

143. Dividiendo los dos miembros de (179) por $y = uv$, se tiene:

$$\frac{dy}{y} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v}$$

La relación de la diferencial de una función á la función, se denomina *diferencial logarítmica* de la función. Así pues, *la diferencial logarítmica del producto de dos funciones es igual á la suma de las diferenciales logarítmicas de las funciones.*

Esta propiedad, análoga á la fundamental de los logaritmos, ha autorizado el título.

144. Sea $y = u_1 u_2 u_3 \ldots\ldots u_n$, el producto de un número finito de funciones de x. Considerando u_1 como un factor y $(u_2 u_3 \ldots\ldots u_n)$ como otro, se tiene (párrafo 143):

$$\frac{dy}{y} = \frac{du_1}{u_1} + \frac{d(u_2u_3u_4\ldots\ldots u_n)}{u_2u_3\ldots\ldots u_n} = \frac{du_1}{u_1} + \frac{du_2}{u_2} + \frac{d(u_3\ldots\ldots u_n)}{u_3\ldots\ldots u_n}$$
$$= \frac{du_1}{u_1} + \frac{du_2}{u_2} + \frac{du_3}{u_3} + \ldots\ldots + \frac{du_n}{u_n} \qquad (180)$$

Multiplicando los dos miembros por y y diviéndolos por dx, se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{u_1}\cdot\frac{du_1}{dx} + \frac{y}{u_2}\cdot\frac{du_2}{dx} + \frac{y}{u_3}\cdot\frac{du_3}{ax} + \ldots\ldots + \frac{y}{u_n}\cdot\frac{du_n}{dx}$$

ó bien:

$$dy = \frac{y}{u_1}du_1 + \frac{y}{u_2}du_2 + \ldots\ldots + \frac{y}{u_n}du_n + \ldots\ldots \qquad (181)$$

luego *la derivada ó la diferencial del producto de un número cualquiera* n *de funciones (siendo* n *finito) es igual á la suma de los productos que se obtienen multiplicando la derivada ó diferencial de cada función por el producto de las demás funciones.*

145. **Diferencial de un cociente.** Sea $y = \frac{u}{v}$ siendo u y v funciones de x, se deduce:

$$yv = u$$

Aplicando la regla anterior:

$$\frac{dy}{y} + \frac{dv}{v} = \frac{du}{u} \quad \text{ó} \quad \frac{dy}{y} = \frac{du}{u} - \frac{dv}{v} \qquad (182)$$

La diferencial logarítmica del cociente de dos cantidades es igual á la del dividendo menos la del divisor.

Despejando á dy de la anterior relación, se tiene:

$$dy = \frac{du}{v} - \frac{u\,dv}{v^2} = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2} \qquad (183)$$

de donde se deduce inmediatamente la regla.

Asimismo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2} \qquad (184)$$

La segunda función del segundo grupo es $y=\frac{a}{x}$.

Por la regla:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{a}{x^2} \text{ ó } dy=-\frac{a\,dx}{x^2} \qquad (185)$$

146. **Diferencial de una potencia.** *m entero positivo.* 1º Sea $y=z^m$ siendo z función de x; como hay m factores iguales á z, tomando las diferenciales logarítmas

$$\frac{dy}{y}=m\frac{dz}{z} \text{ de donde } dy=mz^{m-1}dz \qquad (186)$$

siendo m entero y positivo.

2º *m fraccionario positivo.* $y=z^{\frac{p}{q}}$, siendo $m=\frac{p}{q}$ y p y q enteros positivos, se tiene $y^q=z^p$ tomando las diferenciales logarítmicas y aplicando el primer caso:

$$q\frac{dy}{y}=p\frac{dz}{z} \text{ de donde } dy=\frac{p}{q}z^{\frac{p}{q}}\frac{dz}{z}=\frac{p}{q}z^{p-1}dz=mz^{m-1}dz$$

3º *m negativo* (entero ó fraccionario). Sea $m=-n$ siendo n positivo (entero ó fraccionario), resulta:

$$y=z^m=z^{-n}=\frac{1}{z^n} \text{ de donde } yz^n=1$$

Tomando las diferenciales logarítmicas:

$$\frac{dy}{y}+n\frac{dz}{z}=0 \text{ de donde } dy=-nz^{-n}\frac{dz}{z}=-nz^{-n-1}dz=mz^{m-1}dz$$

luego la fórmula es general. Si z es función de una variable x, también se tiene la fórmula general:

$$\frac{dy}{dx}=mz^{m-1}\frac{dz}{dx} \qquad (186')$$

Siguiendo el procedimiento directo, se hallaría con facilidad la diferencial de la función $y=z^m$.

147. **Diferencial de una raíz.** Sea $y=\sqrt[m]{z}$, se tendrá:

$$y=z^{\frac{1}{m}}, \quad dy=\frac{1}{m}z^{\frac{1-m}{m}}dz=\frac{dz}{m\sqrt[m]{z^{m-1}}} \qquad (187)$$

y si z es función de x:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dz}{dx}}{m\sqrt[m]{z^{m-1}}} \qquad (187')$$

Si $m=2$:

$$y=\sqrt{z}$$

$$dy=\frac{dz}{2\sqrt{z}} \qquad (187'')$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dz}{dx}}{2\sqrt{z}} \qquad (187''')$$

lo que da á conocer el valor de la diferencial de la raíz cuadrada de una función.

Estos resultados aplicados á las funciones simples:

$$y=x^m, \quad y=\sqrt{x}$$

producen:

$$dy=mx^{m-1}dx \qquad (188)$$

$$dy=\frac{dx}{2\sqrt{x}} \qquad (189)$$

148. El teorema de las funciones compuestas puede aplicarse con fruto para obtener estos resultados, por ejemplo para averiguar la diferencial de una suma:

$$y=z+v-r+\ldots\ldots$$

siendo z, v, r funciones de x, tendremos:

$$dy=\frac{dy}{dz}dz+\frac{dy}{dv}dv-\frac{dy}{dr}dr+\ldots\ldots$$

Como:

$$\frac{dy}{dz}=1, \quad \frac{dy}{dv}=1, \quad \frac{dy}{dz}=-1 \text{ resulta } dy=dz+dv-dz+\ldots\ldots$$

igualmente se aplicaría el teorema para encontrar la diferencial de un producto, de un cociente, etc.

APLICACIONES.

148'. 1ª Sea la función entera en x:

$$y=A_0x^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+\ldots\ldots+A_{m-1}x+A_m$$

que produce:

$$dy=[mA_0x^{m-1}+(m-1)A_1x^{m-2}+(m-2)A_2x^{m-3}+\ldots\ldots+A_{m-1}]dx$$

2ª Sea una función racional en x:

$$y=\frac{x^2-4x+3}{x^2-6x+5}=\frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x-5)} \text{ luego } dy=\frac{dx(x-5)-dx(x-3)}{(x-5)^2}=-\frac{2\,dx}{(x-5)^2}$$

3ª Sea la función compuesta:

$$y=\frac{x}{(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$dy=\frac{(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}dx+x^2(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx}{(a^2-x^2)}=\frac{(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}+\frac{x^2}{(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}}{(a^2-x^2)}dx=\frac{a^2dx}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

4ª Sea $y=(a+bx)^m$, resultará:

$$dy=m(a+bx)^{m-1}b\,dx$$

5ª Sea $y=p(a+bx^m)$ suponiendo que $a+bx^m=u$, se tiene:

$$mbx^{m-1}dx=du \text{ luego } y=pu \text{ y finalmente } dy=p\,du=pmbx^{m-1}dx$$

6ª Sea $y=(a+bx+cx^2)^3$ que da:

$$\frac{dy}{dx}=3(b+2cx)(a+bx+cx^2)^2$$

7ª Sea $y=(a+bx)^m(a'+b'x)^{m'}(a''+b''x)^{m''}$.
Haciendo $(a+bx)^m=u$, $(a'+b'x)^{m'}=u'$, $(a''+b''x)^{m''}=u''$, se tiene:

$$dy=\left(\frac{du}{u}+\frac{du'}{u'}+\frac{du''}{u''}\right)uu'u''$$

Pero se tiene:

$$du=mb(a+bx)^{m-1}dx,\quad du'=m'b'(a'+b'x)^{m'-1}dx,\quad du''=m''b''(a''+b''x)^{m''-1}dx$$

finalmente:

$$\frac{dy}{dx}=(a+bx)^m(a'+b'x)^{m'}(a''+b''x)^{m''}\left(\frac{mb}{a+bx}+\frac{m'b'}{a'+b'x}+\frac{m''b''}{a''+b''x}\right)$$

8ª Sea

$$y=(a+bx^m)^p,\quad dy=bpmx^{m-1}(a+bx^m)^{p-1}dx$$

9ª Sea

$$y=\frac{x^{m+1}}{m+1},\quad dy=\frac{(m+1)x^m\,dx}{m+1}=x^m\,dx$$

10ª Sea

$$y=\sqrt[n]{a^m-x^m},\quad dy=-\frac{m}{n}x^{m-1}(a^m-x^m)^{\frac{1}{n}-1}dx$$

149. **Funciones trascendentes.—Logarítmica y exponencial.** Sea la función logarítmica simple:

$$y=\log x \tag{190}$$

referida á una base cualquiera a:

$$y+\Delta y=\log(x+\Delta x)\quad\text{es decir}\quad \Delta y=\log\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$$

ó bien:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\log\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}=\log\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} \tag{191}$$

Hagamos $\frac{1}{\Delta x}=\frac{\alpha}{x}$ siendo α una nueva variable, pues si Δx tiende á 0:

$$\frac{\log\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}\quad\text{tiende á}\quad\frac{\log 1}{0}=\frac{0}{0}$$

y la anterior hipótesis evita esta indeterminación aparente produciendo:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\log\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{x}}=\frac{1}{x}\log\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha} \tag{192}$$

Pero el límite del factor $\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}$ cuando α crece indefinidamente, es e (párrafo 96'); luego:

$$\lim\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{x}\lim\log\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}=\frac{\log e}{x}$$

ó bien:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\log e}{x},\quad dy=\frac{\log e}{x}dx \tag{192'}$$

cualquiera que sea el sistema de logaritmos adoptado.

Generalmente los logaritmos *neperianos* se designan por L ó l y los *vulgares* por log siendo estos dos sistemas los usuales.

150. Si se adopta el de Briggs $a=10$ y el módulo vale:

$$M=\log e=\frac{\log 10}{L\,10}=\frac{1}{L\,10}=0'4342944819\ldots\ldots$$

en general:

$$\log e=\frac{1}{L\,a}\quad\text{ó bien}\quad\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x\,La},\quad dy=\frac{dx}{x\,La} \tag{192''}$$

y si $a=e$, entonces $La=Le=1$; luego:

$$DLx=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x},\quad dLx=dy=\frac{dx}{x}$$

la expresión $\frac{dx}{x}$ se llama diferencial logarítmica de x.

151. Si se tiene $y=\log u$, $u=\varphi(x)$, resultará:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\log e}{u}\cdot\frac{du}{dx},\quad dy=\frac{\log e}{u}du$$

Por ejemplo, sea $u=x^m$, resultará:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\log e}{x^m}mx^{m-1}=\frac{m\log e}{x},\quad dy=\frac{m\log e}{x}dx \tag{192'''}$$

152. **Función exponencial.** Sea

$$y=a^x \tag{193}$$

siendo a un número cualquiera positivo, tomando los logaritmos:

$$\log y=x\log a$$

diferenciando

$$\frac{\log e}{y}dy=dx\log a\quad\text{ó bien}\quad\frac{dy}{dx}=y\frac{\log a}{\log e}=a^x\frac{\log a}{\log e},\quad dy=a^x\frac{\log a}{\log e}dx \tag{193'}$$

cualquiera que sea el sistema de logaritmos.

153. Si se emplea el sistema vulgar:

$$\log a=1,\quad M_1=\frac{1}{\log e}=L\,10=2'3025850929\ldots\ldots$$

siendo M_1 el módulo relativo para pasar de los logaritmos vulgares á los neperianos.

Si se emplea el sistema neperiano:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=a^x\mathrm{l}a,\quad \mathrm{d}y=a^x\mathrm{l}a\,\mathrm{d}x$$

Si $a=e$, la función es $y=e^x$; luego:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=e^x,\quad \mathrm{d}y=e^x\,\mathrm{d}x$$

y como se ve, la función es igual á su derivada.

154. Si se tiene:

$$y=a^u,\quad u=\varphi(x)\ \text{quedará}\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=a^u\mathrm{l}a\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

tomando los logaritmos neperianos, ó bien $\mathrm{d}y=a^u\mathrm{l}a\,\mathrm{d}u$.

Inversamente de la diferencial de la función exponencial puede pasarse á la de la logarítmica.

155. Si se tiene:

$$y=u^v \tag{194}$$

siendo u y v funciones de x, resulta tomando los logaritmos neperianos:

$$\mathrm{l}y=v\mathrm{l}u\ \text{ diferenciando: }\ \frac{\mathrm{d}y}{y}=\mathrm{d}v\mathrm{l}u+v\frac{\mathrm{d}u}{u}\ \text{ ó }\ \mathrm{d}y=u^v\left(\mathrm{d}v\mathrm{l}u+v\frac{\mathrm{d}u}{u}\right)$$

En fin:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u^v\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\mathrm{l}u+\frac{v}{u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)$$

Si $u=v=x$, la función es $y=x^x$ y resulta:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x^x(1+\mathrm{l}x)\ \text{ ó }\ \mathrm{d}y=x^x(1+\mathrm{l}x)\,\mathrm{d}x \tag{194'}$$

Si se emplean los logaritmos vulgares, se reemplazarán $\mathrm{l}u$, $\mathrm{l}x$, por $\frac{\log u}{\log e}$, $\frac{\log x}{\log e}$.

APLICACIONES.

156. 1ª $y=a^{-x}=a^u$ suponiendo $-x=u$, se tendrá $-\mathrm{d}x=\mathrm{d}u$, luego:

$$\mathrm{d}y=a^u\mathrm{l}a\,\mathrm{d}u=-a^{-x}\mathrm{l}a\,\mathrm{d}x\ \text{ y si }\ a=e,\ \mathrm{d}y=-e^{-x}\mathrm{d}x$$

2ª $y=e^{e^{e^x}}=e^{e^v}=e^u$ luego $\mathrm{d}y=e^ue^ve^x\mathrm{d}x=e^{e^{e^x}}e^{e^x}e^x\mathrm{d}x$

3ª $y=\mathrm{l}(x+\sqrt{x^2-1})$, haciendo $x+\sqrt{x^2-1}=u$, $\mathrm{d}u=\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)\mathrm{d}x$

resulta:

$$\mathrm{d}y=\frac{\mathrm{d}u}{u}=\frac{\mathrm{d}x(x+\sqrt{x^2-1})}{\sqrt{x^2-1}(\sqrt{x^2-1}+x)}=\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}}$$

4ª $y=\log\frac{a+bx}{a-bx}$ luego $\mathrm{d}y=\frac{2ab\log e\,\mathrm{d}x}{a^2-b^2x^2}$

5ª $y=\log\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ luego $\mathrm{d}y=\frac{\log e}{x^2-1}\mathrm{d}x$

6ª $y=\log\log x=\log_2 x$, $\mathrm{d}y=\frac{\log e}{\log x}\cdot\frac{\log e}{x}\mathrm{d}x=\frac{(\log e)^2}{x\log x}\mathrm{d}x$

Si $y=\log\log\log x$,

$$\mathrm{d}y=\frac{\log e}{\log_2 x}\cdot\frac{(\log e)^2\mathrm{d}x}{x\log x}=\frac{(\log e)^3\mathrm{d}x}{x\log x\log_2 x}$$

y en general, si $y=\log_n x$, se tendrá:

$$\mathrm{d}y=\frac{(\log e)^n\mathrm{d}x}{x\log x\log_2 x\log_3 x\ldots\ldots\log_{n-1}x}$$

7ª Sea $y=\mathrm{l}[(x-a)^m(x-b)^n(x-c)^p\ldots\ldots]$, como se tiene entonces:

$$y=m\mathrm{l}(x-a)+n\mathrm{l}(x-b)+p\mathrm{l}(x-e)+\ldots\ldots$$

resultará:

$$\mathrm{d}y=m\frac{\mathrm{d}(x-a)}{x-a}+n\frac{\mathrm{d}(x-b)}{x-b}+p\frac{\mathrm{d}(x-c)}{x-c}+\ldots\ldots$$

$$\mathrm{d}y=\left[\frac{m}{x-a}+\frac{n}{x-b}+\frac{p}{x-c}+\ldots\ldots\right]\mathrm{d}x$$

8ª Sea

$$y=\mathrm{l}\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}},\qquad \mathrm{d}y=\frac{a^2\mathrm{d}x}{x(a^2+x^2)}$$

9ª Sea

$$y=\mathrm{l}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}},\qquad \mathrm{d}y=-\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-x^2}}$$

10ª Sea

$$y=e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}},\quad \mathrm{d}y=(e^{x\sqrt{-1}}-e^{-x\sqrt{-1}})\mathrm{d}x\sqrt{-1}$$

157. **Funciones circulares directas.** PRIMER GRUPO: SENO Y COSENO. Sea:

$$y=\operatorname{sen}x \tag{195}$$

luego:

$$y+\Delta y=\operatorname{sen}(x+\Delta x),\quad \Delta y=\operatorname{sen}(x+\Delta x)-\operatorname{sen}x,\quad \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\operatorname{sen}(x+\Delta x)-\operatorname{sen}x}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}=\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\operatorname{sen}\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

Pasando al límite, como (Trigonometría) el límite de la relación del seno al arco cuando éste tiende á cero es la unidad, se tiene:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\cos x,\quad \mathrm{d}y=\cos x\,\mathrm{d}x \tag{196}$$

Si

$$y=\cos x \tag{197}$$

tendremos:

$$y=\cos x=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$