Luego:

$$dy = d\cos x = d\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) d\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

es decir:

$$dy = -\mathrm{sen}\,x\,dx,\quad \frac{dy}{dx} = -\mathrm{sen}\,x \qquad (198)$$

158. SEGUNDO GRUPO: TANGENTE Y COTANGENTE. Sea

$$y = \mathrm{tang}\,x \qquad (199)$$

Como

$$\mathrm{tang}\,x = \frac{\mathrm{sen}\,x}{\cos x},\quad dy = \frac{\cos x\,d\,\mathrm{sen}\,x - \mathrm{sen}\,x\,d\cos x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \mathrm{sen}^2 x}{\cos^2 x}\,dx$$

$$dy = d\,\mathrm{tang}\,x = \frac{dx}{\cos^2 x} \qquad (200)$$

puede evidentemente obtenerse igual fórmula por el procedimiento general, dando á la variable x el incremento Δx, y á la función y el incremento Δy, etc.

Si

$$y = \mathrm{cotang}\,x \qquad (201)$$

Como

$$y = \cot x = \frac{1}{\mathrm{tang}\,x},\quad dy = d\cot x = -\frac{d\,\mathrm{tang}\,x}{\mathrm{tang}^2 x} = -\frac{dx}{\cos^2 x\,\mathrm{tang}^2 x} = -\frac{dx}{\mathrm{sen}^2 x} \qquad (202)$$

159. TERCER GRUPO: SECANTE Y COSECANTE. Sean

$$y = \sec x \qquad (203)$$

$$y = \mathrm{cosec}\,x \qquad (204)$$

Como:

$$y = \sec x = \frac{1}{\cos x},\quad y = \mathrm{cosec}\,x = \frac{1}{\mathrm{sen}\,x}$$

$$dy = d\sec x = \frac{\mathrm{sen}\,x}{\cos^2 x}\,dx = \sec x\,\mathrm{tang}\,x\,dx \qquad (205)$$

Igualmente:

$$dy = d\,\mathrm{cosec}\,x = -\frac{\cos x\,dx}{\mathrm{sen}^2 x} = -\mathrm{cosec}\,x\,\mathrm{cotang}\,x\,dx \qquad (206)$$

160. **Funciones circulares inversas.** Hay que advertir que dichas funciones que son:

$$\mathrm{arc}(\mathrm{sen}=x),\ \mathrm{arc}(\cos=x),\ \mathrm{arc}(\mathrm{tang}=x),\ \mathrm{arc}(\mathrm{cotang}=x),\ \mathrm{arc}(\sec=x),\ \mathrm{arc}(\mathrm{cosec}=x)$$

son indeterminadas, pues á una relación trigonométrica satisfacen muchos arcos.

161. PRIMER GRUPO: ARC $(\mathrm{SEN}=x)$ Y ARC $(\mathrm{COSENO}=x)$. Se tiene:

$$y = \mathrm{arc}(\mathrm{sen}=x) \qquad (207)$$

ó bien:

$$x = \mathrm{sen}\,y$$

resultará:

$$dx = \cos y\,dy,\quad dy = \frac{dx}{\cos y} = \frac{dx}{\pm\sqrt{1-\mathrm{sen}^2 y}} = \pm\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (208)$$

Hay doble signo, porque si y_0 designa uno de los arcos cuyo seno es x, los demás están comprendidos en las fórmulas:

$$y_0 + 2k\pi,\quad (2k+1)\pi - y_0$$

siendo k un número entero cualquiera positivo, negativo ó nulo.

Según la posición del punto en que remata el arco considerado, la diferencial será dy_0 ó $-dy_0$, pues las constantes desaparecen al diferenciar.

Pero si de antemano se fija el arco, como $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\mathrm{sen}^2 y} = \cos y$, y recibirá el signo de este coseno, positivo para los arcos de la primera serie que rematan en un punto del primer cuadrante y negativo para los que rematan en uno del segundo.

162. Sea

$$y = \mathrm{arc}\cos = x \qquad (209)$$

ó

$$x = \cos y,\quad dx = -\mathrm{sen}\,y\,dy,\quad dy = -\frac{dx}{\mathrm{sen}\,y} = -\frac{dx}{\pm\sqrt{1-\cos^2 y}}$$

$$dy = \mp\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (210)$$

El doble signo se justifica también.

Si y_0 es uno de los arcos cuyo coseno es x, los demás quedarán comprendidos en las fórmulas

$$2k\pi + y_0,\quad 2k\pi - y_0$$

dividiéndose estos arcos en dos series, la de los que rematan en el primero y la de los que rematan en el cuarto cuadrante.

Se verá, pues, á qué serie corresponde el arco dado; pero en la práctica como

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos^2 y} = \mathrm{sen}\,y$$

si el arco se conoce, el radical recibirá el signo de este seno, que es positivo para los arcos de la primera serie, negativo para los de la segunda.

163. SEGUNDO GRUPO: ARC (TANG), ARC (COTANG). Sea

$$y = \mathrm{arc}(\mathrm{tang}=x) \qquad (211)$$

de donde:

$$x = \mathrm{tang}\,y,\quad dx = \frac{dy}{\cos^2 y} = (1+\mathrm{tang}^2 y)\,dy \quad \text{luego:}\quad dy = \frac{dx}{1+\mathrm{tang}^2 y} = \frac{dx}{1+x^2} \qquad (212)$$

Si se designa por y_0 uno de los arcos cuya tangente es x, los demás quedan comprendidos en la fórmula

$$k\pi + y_0$$

Así pues, todos los arcos tienen por diferencial dy y sólo hay un signo.

Si

$$y = \mathrm{arc}(\mathrm{cotang}=x) \qquad (213)$$

$$dy = -\frac{dx}{1+x^2} \qquad (214)$$

Hay también un solo signo, pero como la tangente sufre variaciones en el sentido de las del arco y la cotangente en sentido contrario, el signo será negativo.

164. TEOREMA. *Para un mismo valor de* x, *las derivadas de las funciones* arc (tang x) *y* arc (cotang x) *son en general iguales y de signos contrarios.*

Se tiene por Trigonometría:

$$\text{arc}\,(\text{tang}=x)+\text{arc}\,(\text{cotang}=x)=\frac{\pi}{2}$$

Como la suma de *arco* (*tang* x) y *arco* (*cotang* x) es igual á una constante, sus derivadas serán necesariamente iguales y de signos contrarios.

165. Tercer grupo: arco (secante) y arco (cosecante). Sea la fución:

$$y=\text{arc}\,(\sec=x) \tag{215}$$

$$x=\sec y,\quad dx=\sec y\,\text{tang}\,y\,dy$$

$$dy=\frac{dx}{\sec y\,\text{tang}\,y}=\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} \tag{216}$$

A causa del radical $\sqrt{x^2-1}$ hay un doble signo; si en efecto y_0 designa uno de los arcos cuya secante es x, los demás están comprendidos en las fórmulas $2k\pi+y_0$ y $2k\pi-y_0$. Pero en las aplicaciones si el arco y se conoce, no hay ambigüedad, porque $\sqrt{x^2-1}=\sqrt{\sec^2 y-1}=\text{tang}\,y$, se toma el signo de esta tangente.

166. Finalmente:

$$y=\text{arc}\,(\text{cosec}=x) \tag{217}$$

$$x=\text{cosec}\,y,\quad dx=-\text{cosec}\,y\,\text{cotang}\,y\,dy,\quad dy=-\frac{dx}{\text{cosec}\,y\,\text{cotang}\,y}=-\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} \tag{218}$$

A causa del radical $\sqrt{x^2-1}$ hay un doble signo, pues si y_0 representa un arco de los que tienen x por cosecante, los demás quedarán comprendidos en las fórmulas $2k\pi+y_0$ y $(2k+1)\pi-y_0$. Pero si y_0 se conoce, no hay ambigüedad, pues

$$\sqrt{x^2-1}=\sqrt{\text{cosec}^2 y-1}=\text{cotang}\,y$$

y se toma el signo de esta cotangente.

En este caso la *derivada* ó la *diferencial* de arc (cosec $=x$) tienen signo contrario al de cot y.

APLICACIONES.

167. 1ª Calcular las diferenciales de:

$$y=\text{sen}\,mx,\quad y=\text{arc}\left(\text{sen}=\frac{x}{a}\right),\quad y=\text{sen}^4 x^2$$

la primera es:

$$dy=m\cos mx\,dx$$

la segunda:

$$dy=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\cdot\frac{dx}{a}=\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

la tercera:

$$dy=4\,\text{sen}^3 x^2\cos x^2\,2x\,dx=8x\,\text{sen}^3 x\cos^2 x\,dx$$

2ª Calcular las diferenciales de:

$$y=\log\text{sen}\,x,\quad y=\log\cos x,\quad y=\log\text{tang}\,\frac{x}{2},\quad dy=\frac{\log e}{\text{sen}\,x}\cos x\,dx=\log e\,\text{cotang}\,x\,dx$$

$$dy=-\log e\,\text{tang}\,x\,dx,\quad dy=\frac{\log e}{\text{sen}\,x}\,dx$$

3ª Calcular las diferenciales de las funciones:

(1) $$y=\log\text{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right),\quad dy=\frac{\log e}{\text{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}\cdot\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}\cdot\frac{dx}{2}$$

$$=\frac{\log e}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}\,dx$$

y finalmente:

$$dy=\frac{\log e}{\cos x}\,dx$$

(2) $$y=\log\text{arc}\,(\text{sen}=x),\quad dy=\frac{\log e}{\text{arc}\,(\text{sen}=x)}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

(3) $$y=e^{\text{arc}\,(\text{sen}=x)},\quad dy=e^{\text{arc}\,(\text{sen}=x)}\,\frac{\log e}{\log e}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{e^{\text{arc}\,(\text{sen}=x)}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

4ª Calcular las diferenciales de las expresiones:

(1) $$y=\text{sen}\,(x^m),\quad dy=mx^{m-1}\cos(x^m)\,dx$$

(2) $$y=\frac{1}{(a^2-b^2)^{\frac{1}{2}}}\,\text{arc}\left(\cos=\frac{b+a\cos x}{a+b\cos x}\right),\quad dy=\frac{dx}{a+b\cos x}$$

(3) $$y=x^{\text{sen}\,x},\quad dy=x^{\text{sen}\,x}\left(\cos x\log x+\frac{\text{sen}\,x}{x}\right)dx$$

(4) $$y=\log\left[x+\sqrt{x^2-a^2}\right]+\text{arc}\left(\sec=\frac{x}{a}\right),\quad dy=\frac{dx}{x}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^2$$

5ª Calcular las diferenciales de las funciones:

(1) $$y=\text{sen ver}\,(x)$$

Como

$$y=\text{sen ver}\,x=1-\cos x\quad\text{resulta}\quad dy=\text{sen}\,x\,dx$$

(2) $$y=\text{arc}\,(\text{sen ver}=x),\quad dy=\frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$$

6ª Sea

$$y=\text{arc}\left(\text{tang}=\frac{a+x}{1-ax}\right),\quad dy=\frac{dx}{1+x^2}$$

7ª Sea la función compuesta

$$y=\text{arc}\left(\text{tang}=\frac{u+v}{1-uv}\right)$$

siendo u y v funciones de x, se tendrá:

$$dy=\frac{du}{1+u^2}+\frac{dv}{1+v^2}$$

lo que debía esperarse, pues:

$$y=\text{arc}\left(\text{tang}=\frac{u+v}{1-uv}\right)=\text{arc}\,(\text{tang}\,u)+\text{arc}\,(\text{tang}\,v)$$

8ª Sea

$$y = \mathrm{arc}\,(\mathrm{sen} = 2x\sqrt{1-x^2})$$
$$\mathrm{d}y = \frac{2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Así pues, la diferencial es doble de la de arc $(\mathrm{sen} = x)$.

9ª Sea

$$y = \mathrm{arc}\left(\mathrm{tang} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right), \quad \mathrm{d}y = \frac{2\,\mathrm{d}x}{e^{2x} + e^{-2x}}$$

10ª Sea $y = \cos x^{\mathrm{sen}\,x}$, tomando los logaritmos, diferenciando y poniendo por y su valor, resulta:

$$\mathrm{d}y = \cos x^{\mathrm{sen}\,x}\left(\frac{\log\cos x}{\log e}\cos x - \frac{\mathrm{sen}^2 x}{\cos x}\right)\mathrm{d}x$$

11ª Diferenciar la anterior expresión valiéndose del teorema de las funciones compuestas.

168. **Diferenciales de diversos órdenes de las funciones explícitas.** Hemos visto que la función $f(x)$ admitía una derivada $f'(x)$ función también de x; ésta, pues, admitirá á su vez una derivada $f''(x)$ y así sucesivamente van obteniéndose derivadas en número infinito á menos que $f(x)$ sea entera y racional.

Obtenemos de la fórmula $y = f(x)$, la diferencial $\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x$; en esta fórmula $\mathrm{d}x$, crecimiento arbitrario de la variable independiente x, puede ser constante ó variable (aplicándose generalmente el primer caso).

Vamos á hallar la forma de las *diferenciales sucesivas* de la función propuesta, que así se denominan en ambos supuestos.

Supondremos primero $\mathrm{d}x$ constante, y entonces se tendrá:

$$y = f(x), \quad \mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x$$

Diferenciando esta ecuación:

$$\mathrm{d.d}y = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}f'(x) = \mathrm{d}x\,[f''(x)\,\mathrm{d}x] = f''(x)\,\mathrm{d}x^2 \tag{219}$$

el primer término $\mathrm{d.d}y$ es la segunda diferencial de y y se escribe $\mathrm{d}^2 y$, el cuadrado de $\mathrm{d}x$ se escribe $\mathrm{d}x^2$, de consiguiente:

$$\mathrm{d}^2 y = f''(x)\,\mathrm{d}x^2, \quad \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = f''(x) \tag{220}$$

Análogamente se irían obteniendo:

$$\mathrm{d}^3 y = f'''(x)\,\mathrm{d}x^3, \quad \frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3} = f'''(x)$$
$$\mathrm{d}^4 y = f^{\mathrm{IV}}(x)\,\mathrm{d}x^4, \quad \frac{\mathrm{d}^4 y}{\mathrm{d}x^4} = f^{\mathrm{IV}}(x)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\mathrm{d}^n y = f^n(x)\,\mathrm{d}x^n, \quad \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} = f^n(x)$$

las primeras fórmulas dan á conocer las diferenciales sucesivas de y, las segundas se llaman *derivadas sucesivas*.

169. En el segundo caso en que $\mathrm{d}x$ es variable, según las reglas para diferenciar un producto, obtendremos de las fórmulas:

$$y = f(x), \quad \mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x$$

la siguiente:

$$\mathrm{d}^2 y = \mathrm{d}\,[f'(x)\,\mathrm{d}x] = f''(x)\,\mathrm{d}x^2 + f'(x)\,\mathrm{d}^2 x, \text{ etc.} \tag{221}$$

repetimos que en general la primera hipótesis es la que se hace.

APLICACIONES.

170. I. Sea la función $y = x^m$, de donde:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = m x^{m-1}, \quad \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = m(m-1)x^{m-2}, \quad \frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3} = m(m-1)(m-2)x^{m-3}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} = m(m-1)(m-2)\ m-3)\ldots\ldots(m-n+1)x^{m-n}$$

Si m es entero, se llega á:

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} = m(m-1)(m-2)\ldots\ldots 3.2.1$$

La mª derivada es constante, las siguientes nulas.

II. Sea

$$y = a^x, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = a^x\,\mathrm{l}\,a, \quad \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = a^x(\mathrm{l}\,a)^2, \quad \frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3} = a^x(\mathrm{l}\,a)^3, \ldots\ldots, \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} = a^x(\mathrm{l}\,a)^n$$

Si

$$a = e, \quad \mathrm{l}\,a = \mathrm{l}\,e = 1, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3} = \cdots\cdots = \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} = e^x$$

III. Sea

$$y = \log x, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\log e}{x} = x^{-1}\log e, \quad \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = -1\,x^{-2}\log e, \quad \frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3} = 1.2\,x^{-3}\log e$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} = (-1)^{n-1}\,1.2.3\ldots\ldots(n-1)\,x^{-n}\log e$$

IV. Sea

$$\begin{array}{ll}
y = \mathrm{sen}\,x & y = \cos x \\
\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \cos x & \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\mathrm{sen}\,x \\
\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = -\mathrm{sen}\,x & \dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = -\cos x \\
\dfrac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3} = -\cos x & \dfrac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3} = \mathrm{sen}\,x \\
\dfrac{\mathrm{d}^4 y}{\mathrm{d}x^4} = \mathrm{sen}\,x & \dfrac{\mathrm{d}^4 y}{\mathrm{d}x^4} = \cos x \\
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots
\end{array}$$

V. Sea

$$y=\operatorname{tang}(x),\quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\operatorname{tang}^2(x)=1+y^2,\quad \frac{d^2y}{dx^2}=2y\frac{dy}{dx}=2y(1+y^2)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=2(1+y^2)(1+3y^2)$$

Haciendo $x=\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ en estas fórmulas, se obtienen las derivadas de la cotangente.

VI. Sea

$$y=\sec x,\quad \frac{dy}{dx}=\operatorname{tang} x \sec x=\sqrt{\sec^2 x-1}\,\sec x=y\sqrt{y^2-1},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=2y^3-y$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=y\sqrt{y^2-1}\,(6y^2-1)$$

Para la cosecante se hará $x=\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.

VII. Sea

$$y=\operatorname{arc}(\operatorname{sen}=x),\quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}},$$

$$\frac{d^3y}{dx^2}=(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}+3x^2(1-x^2)^{-\frac{5}{2}},\quad \frac{d^4y}{dx^4}=3x^2(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}+3.5x^3(1-x^2)^{-\frac{7}{2}},$$

$$\frac{d^5y}{dx^5}=3^2(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}+2.5.9\,x^2(1-x^2)^{-\frac{7}{2}}+3.5.7\,x^4(1-x^2)^{-\frac{9}{2}}$$

los del coseno se buscarán análogamente.

VIII. Sea

$$y=\operatorname{arc}(\operatorname{tang}=x),\quad \frac{dy}{dx}=(1+x^2)^{-1},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=-2x(1+x^2)^{-2},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=-2(1+x^2)^{-2}+2.4\,x^2(1+x^2)^{-3},\qquad \frac{d^4y}{dx^4}=2^3.3\,x(1+x^2)^{-3}-2^4.3\,x^3(1+x^2)^{-4}$$

$$\frac{d^5y}{dx^5}=2^3.3(1+x^2)^{-3}-2^3.3^2x^2(1+x^2)^{-4}+2^7.3\,x^4(1+x^2)^{-5}$$

....

Para la cotangente se hará $x=\frac{\pi}{2}-x$ y $dx=-dx$.

IX. Sea

$$y=\operatorname{arc}(\sec=x),\quad \frac{dy}{dx}=x^{-1}(x-1)^{-\frac{1}{2}},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=-x^{-2}(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}-(x^2-1)^{-\frac{3}{2}},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=2x^{-3}(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}+x^{-1}(x^2-1)^{-\frac{3}{2}}+3x(x^2-1)^{-\frac{5}{2}}$$

....

X. Sea $y=\operatorname{sen}(x+a)$ en que a es constante.

$$\frac{dy}{dx}=\cos(x+a)=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+x+a\right)=\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}+a\right)$$

Se obtiene la derivada añadiendo á a el cuadrante $\frac{\pi}{2}$.

En general:

$$\frac{d^n \operatorname{sen}(x+a)}{dx^n}=\operatorname{sen}\left(x+n\frac{\pi}{2}+a\right)$$

Si

$$a=0,\quad y=\operatorname{sen} x,\quad \frac{d^n \operatorname{sen} x}{dx^n}=\operatorname{sen}\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$$

Para

$$a=\frac{\pi}{2},\quad y=\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x,\quad \frac{d^n \cos x}{dx^n}=\operatorname{sen}\left(x+n\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$$

171. **Expresión de la enésima derivada de un producto.** Sea el producto uv de dos funciones u y v.

Tendremos:

$$d(uv)=v\,du+u\,dv$$

después

$$\begin{aligned} d^2(uv)&=d(v\,du)+d(u\,dv)=(v\,d^2u+du\,dv)+(u\,d^2v+du\,dv)\\ &=v\,d^2u+2\,du\,dv+u\,d^2v \end{aligned} \tag{222}$$

Diferenciando nuevamente:

$$\begin{aligned} d^3(uv)&=d(u\,d^2u)+d(2\,du\,dv)+d(u\,d^2v)\\ &=(v\,d^3u+dv\,d^2u)+(2\,dv\,d^2u+2\,du\,d^2v)+(u\,d^3v+du\,d^2v)\\ &=v\,d^3u+3\,dv\,d^2u+3\,du\,d^2v+u\,d^3v \end{aligned} \tag{223}$$

Atendiendo á la estructura de estas fórmulas y á su analogía con el desarrollo de la potencia de un binomio, se obtendrá en general:

$$\begin{aligned} d^m(uv)&=v\,d^mu+\frac{m}{1}\,dv\,d^{m-1}u+\frac{m(m-1)}{1.2}\,d^2v\,d^{m-2}u+\\ &\ldots\ldots+\frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots\ldots n}\,d^nv\,d^{m-n}u+\ldots\ldots+u\,d^mv \end{aligned} \tag{224}$$

Como se ha verificado para $m=1, 2, 3$, para demostrar que es general la fórmula, se probaría, según el método ya conocido de demostración, que si es cierta para el orden m lo es para el $m+1$.

La fórmula anterior puede escribirse *simbólicamente*

$$d^m(uv)=(du+dv)^m \tag{224'}$$

atendiendo á las consecuencias que entraña.

172. **Funciones implícitas.** Sea la ecuación:

$$f(x,y)=0 \tag{225}$$

Aunque y es desconocida, como es una función determinada de x, se puede considerar $f(x,y)$ como una función compuesta de x (párrafo 145, etc.).

Esta función es por hipótesis constantemente nula, es constante y su diferencial será *cero*.

Según el teorema de las funciones compuestas (párrafo 145, etc.) tendremos para expresión de la diferencial:

$$\frac{df}{dx}dx+\frac{df}{dy}dy=0 \tag{225'}$$