De donde:

$$dy=-\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}}\,dx,\quad y\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}} \qquad (225'')$$

APLICACIONES.

173. 1ª Sea

$$f(x,y)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

(ecuación de una elipse referida á sus dos ejes $2a$ y $2b$.)

Tendremos:

$$\frac{df}{dx}=\frac{2x}{a^2},\quad \frac{df}{dy}=\frac{2y}{b^2}$$

luego:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{2x}{a^2}}{\frac{2y}{b^2}}=-\frac{b^2x}{a^2y}$$

Comprobación. De la ecuación fundamental resulta:

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{b}{a}\cdot\frac{2x}{2\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{b^2x}{a^2y}$$

resultado idéntico al anterior.

2ª Sea

$$f(x,y)=x^my^{m'}=0,\quad \frac{df}{dx}=mx^{m-1}y^{m'},\quad \frac{df}{dy}=m'x^my^{m'-1}$$

luego:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{mx^{m-1}y^{m'}}{m'x^my^{m'-1}}=\frac{my}{m'x}$$

174. **Caso de varias funciones.** Sean y y z dos funciones implícitas de x, ligadas á la variable por las dos ecuaciones:

$$f(x,y,z)=0,\quad \varphi(x,y,z)=0 \qquad (226)$$

Como y y z son funciones determinadas de x, pueden considerarse las funciones f y φ como funciones compuestas de x y aplicarles el raciocinio del párrafo 172; se tendrá, pues:

$$\frac{df}{dx}dx+\frac{df}{dy}dy+\frac{df}{dz}dz=0 \qquad (227)$$

$$\frac{d\varphi}{dx}dx+\frac{d\varphi}{dy}dy+\frac{d\varphi}{dz}dz=0 \qquad (228)$$

que son dos ecuaciones de primer grado en dy y en dz que harán conocer estas diferenciales en función de dx, x, y, z.

Pueden escribirse los anteriores resultados bajo la forma:

$$\frac{dx}{\frac{d\varphi}{dy}\cdot\frac{df}{dz}-\frac{d\varphi}{dz}\cdot\frac{df}{dy}}=\frac{dy}{\frac{d\varphi}{dz}\cdot\frac{df}{dx}-\frac{d\varphi}{dx}\cdot\frac{df}{dz}}=\frac{dz}{\frac{d\varphi}{dx}\cdot\frac{df}{dy}-\frac{d\varphi}{dy}\cdot\frac{df}{dx}} \qquad (229)$$

de donde se obtendrán dy y dz ó las derivadas $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{dz}{dx}$.

Fácilmente se generaliza el raciocinio para $m-1$ ecuaciones entre m variables.

175. **Diferenciales de diversos órdenes de las funciones implícitas.** Sea

$$f(x,y)=0 \qquad (230)$$

igualando á cero la derivada del primer miembro de esta ecuación, se ha encontrado:

$$\frac{df}{dx}+\frac{df}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=0 \qquad (231)$$

ecuación que determina á $\frac{dy}{dx}$ (de consiguiente á dy) en función de x y de y ó en función de x solamente si se puede eliminar y entre las ecuaciones (230) y (231).

Combinando las (230) y (231) ó conservando la (231), se obtiene una ecuación de la forma:

$$\varphi\left(x,y,\frac{dy}{dx}\right)=0 \qquad (232)$$

Su primer miembro, por ser siempre nulo, tiene una diferencial siempre nula, y resulta:

$$\frac{d\varphi}{dx}dx+\frac{d\varphi}{dy}dy+\frac{d\varphi}{d\frac{dy}{dx}}\,d\frac{dy}{dx}=0$$

Dividiendo por dx:

$$\frac{d\varphi}{dx}+\frac{d\varphi}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{d\varphi}{d\frac{dy}{dx}}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}=0 \qquad (233)$$

Esta ecuación hace conocer á $\frac{d^2y}{dx^2}$ (y de consiguiente á d^2y) en función de x, y y $\frac{dy}{dx}$ ó en función sólo de x si se logra eliminar y y $\frac{dy}{dx}$ entre (231), (232) y (233).

Análogamente se proseguiría el razonamiento.

APLICACIÓN.

176. Sea

$$y^3-3xy+x^3=0$$

la ecuación de una función implícita cuya segunda diferencial se pide.

Recurriendo á la fórmula (231) se obtiene después de reducir el factor común 3:

$$x^2-y+(y^2-x)\frac{dy}{dx}=0 \qquad (a)$$

Esta ecuación suministra el valor de $\frac{dy}{dx}$ en función de x y de y, siendo dicho valor:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y-x^2}{y^2-x}$$

La ecuación (a) es de la forma:

$$\varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)=0$$

Aplicándole la fórmula (233) del párrafo anterior, resultará:

$$\left(2x-\frac{dy}{dx}\right)+\left[\left(2y\frac{dy}{dx}-1\right)\frac{dy}{dx}\right]+\left[(y^2-x)\frac{d^2y}{dx^2}\right]=0$$

ó bien:

$$2x-2\frac{dy}{dx}+2y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(y^2-x)\frac{d^2y}{dx^2}=0 \qquad \text{(b)}$$

en función de x, y, y $\frac{dy}{dx}$.

Reemplazando $\frac{dy}{dx}$ por su valor y reduciendo:

$$2xy\frac{y^3-3xy+x^3+1}{(y^2-x)^2}+(y^2-x)\frac{d^2y}{dx^2}=0 \qquad \text{(c)}$$

que se reduce en virtud de la ecuación propuesta á:

$$\frac{2xy}{(y^2-x)^2}+(y^2-x)\frac{d^2y}{dx^2}=0$$

luego:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{2xy}{(y^2-x)^3}, \quad d^2y=-\frac{2xy\,dx^2}{(y^2-x)^3}$$

De la ecuación propuesta, recurriendo á fórmulas que demostraremos á su tiempo, puede conocerse á y en función de x, y sustituyendo en las *últimas fórmulas halladas* $\frac{d^2y}{dx^2}$ ó d^2y estarán expresados sólo en función de x.

177. Diferenciales totales de diversos órdenes de una función de varias variables independientes.—Funciones explícitas. Hemos definido lo que se entiende por diferenciales y derivadas parciales.

Si se tiene una función $u=F(x, y, z, w......)$ de varias variables independientes, se podrán hallar:

$$\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}, ..., \frac{d^2u}{dx^2}, \frac{d^2u}{dy^2}, \frac{d^2u}{dz^2}, ..., \frac{d^3u}{dx^3}, \frac{d^3u}{dy^3}, \frac{d^3u}{dz^3}, ...,$$
$$\frac{d^nu}{dx^n}, \frac{d^nu}{dy^n}, \frac{d^nu}{dz^n}, ...$$

Si las expresiones de las primeras derivadas parciales se diferencian nuevamente, pero respecto á otra variable diversa de la que antes fungió de independiente, se obtendrán un sinnúmero de combinaciones:

$$\frac{d^2u}{dx\,dy}, \frac{d^2u}{dx\,dz}, \frac{d^2u}{dx\,dw}, ..., \frac{d^2u}{dy\,dx}, \frac{d^2u}{dy\,dz}, ..., \frac{d^3u}{dx^2\,dy}, \frac{d^3u}{dx^2\,dz}, ...,$$
$$\frac{d^3u}{dy^2\,dx}, \frac{d^3u}{dy^2\,dz}, ..., \frac{d^4u}{dx^3\,dy}, ..., \frac{d^4u}{dz^3\,dy}, ...$$

marcando siempre el índice de la diferencial de la función u el número de diferenciaciones, y conociéndose por el denominador respectivo de la derivada, el orden que han

seguido las diferenciaciones parciales y el número de veces que se ha tomado una misma variable como independiente.

En la fórmula:

$$du=\frac{du}{dx}dx+\frac{du}{dy}dy \qquad (234)$$

deducida de la función $u=f(x, y)$ el primer miembro du es la diferencial total de la función propuesta, y las derivadas $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, son las derivadas parciales de u respecto á x y á y, así como $\frac{du}{dx}dx$, $\frac{du}{dy}dy$, son las diferenciales parciales.

Para evitar confusiones podría escribirse así dicha fórmula:

$$du=d_xu+d_yu \qquad (234')$$

Hay pues que notar cuidadosamente que el du del primer miembro y los du del segundo de la fórmula (234) no significan lo mismo; el primero es diferencial total, los segundos diferenciales parciales. Esto se generaliza al caso de varias variables independientes.

Recordados los dos puntos anteriores, pasemos á determinar las diferenciales totales de diversas órdenes de una función de varias variables independientes, y tomemos por lo pronto la función $u=f(x, y)$ que sólo encierra dos.

Tendremos:

$$du=\frac{du}{dx}dx+\frac{du}{dy}dy \qquad (235)$$

La diferencial total subsecuente d^2u es igual á la suma de las diferenciales totales de cada término del segundo miembro.

Tenemos para el primer término del segundo miembro:

$$\left.\begin{aligned} d\frac{du}{dx}dx&=\frac{d\frac{du}{dx}dx}{dx}dx+\frac{d\frac{du}{dx}dx}{dy}dy \\ \text{y para el segundo:}\qquad & \\ d\frac{du}{dy}dy&=\frac{d\frac{du}{dy}dy}{dx}dx+\frac{d\frac{du}{dy}dy}{dy}dy \end{aligned}\right\} \qquad (236)$$

Ambas ecuaciones, según se sabe, toman evidentemente la forma:

$$\left.\begin{aligned} d\frac{du}{dx}dx&=\frac{d^2u}{dx^2}dx^2+\frac{d^2u}{dx\,dy}dx\,dy \\ d\frac{du}{dy}dy&=\frac{d^2u}{dy^2}dy^2+\frac{d^2u}{dx\,dy}dx\,dy \end{aligned}\right\}(^1) \qquad (237)$$

De consiguiente la diferencial total buscada será:

$$d^2u=\frac{d^2u}{dx^2}d^2x+2\frac{d^2u}{dx\,dy}dx\,dy+\frac{d^2u}{dy^2}dy^2 \qquad (238)$$

(1) Por las mismas condiciones de la función $u=f(x, y)$ es claro que $\frac{d^2u}{dx\,dy}=\frac{d^2u}{dy\,dx}$ y en general:

$$\frac{d^{n+m}u}{dx^n\,dy^m}=\frac{d^{m+n}u}{dy^m\,dx^n}$$

de esta fórmula obtendríamos sencillamente la tercera diferencial, no olvidando que las diferenciales dx, dy son constantes, dicha diferencial sería:

$$d^3u = \frac{d^3u}{dx^3}dx^3 + 3\frac{d^3u}{dx^2dy}dx^2dy + 3\frac{d^3u}{dx\,dy^2}dx\,dy^2 + \frac{d^3u}{dy^3}dy^3 \tag{239}$$

Y llegaríamos á obtener la fórmula:

$$d^nu = \frac{d^nu}{dx^n}dx^n + \frac{n}{1}\cdot\frac{d^nu}{dx^{n-1}dy}dx^{n-1}dy + \frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{d^nu}{dx^{n-2}dy^2}dx^{n-2}dy^2 + \dots\dots \tag{240}$$

que *simbólicamente* podría quedar expresada así:

$$d^nu = \left(\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy\right)^n = (d_xu + d_yu)^n \tag{241}$$

no perdiendo de vista las convenciones que entraña.

Así pues, en el término de rango t la cantidad diferencial sería:

$$\frac{d^nu}{dx^{n-t+1}dy^{t-1}}dx^{n-t+1}dy^{t-1}$$

y el coeficiente el del desarrollo del binomio.

178. Lo explicado para dos variables independientes es fácil hacerlo extensivo á tres ó más.

Teniendo, por ejemplo, la función $u = f(x, y, z)$, su segunda diferencial sería:

$$d^2u = \frac{d^2u}{dx^2}dx^2 + \frac{d^2u}{dy^2}dy^2 + \frac{d^2u}{dz^2}dz^2 + 2\frac{d^2u}{dx\,dy}dx\,dy + 2\frac{d^2u}{dx\,dz}dx\,dz + $$
$$+ 2\frac{d^2u}{dy\,dz}dy\,dz \tag{242}$$

y como antes, tendríamos por fórmula *simbólica:*

$$d^mu = \left(\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz\right)^m = (d_xu + d_yu + d_zu)^m, \text{ etc.} \tag{243}$$

179. Hasta aquí hemos visto á dx, dy, dz, ... como constantes, pero pueden ser variables, en cuyo caso dan lugar á nuevas fórmulas.

Sea $u = f(x, y)$, de donde sale:

$$du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy$$

Para hallar d^2u, tendremos:

$$d^2u = d\left(\frac{du}{dx}\right)dx + \frac{du}{dx}d^2x + d\left(\frac{du}{dy}\right)dy + \frac{du}{dy}d^2y \tag{244}$$

y puesto que $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$ son funciones de x é y, se tendrá:

$$\left.\begin{aligned} d\left(\frac{du}{dx}\right) &= \frac{d^2u}{dx^2}dx + \frac{d^2u}{dx\,dy}dy \\ d\left(\frac{du}{dy}\right) &= \frac{d^2u}{dy^2}dy + \frac{d^2u}{dy\,dx}dx \end{aligned}\right\} \tag{245}$$

Sustituyendo resultará:

$$d^2u = \frac{d^2u}{dx^2}dx^2 + 2\frac{d^2u}{dx\,dy}dx\,dy + \frac{d^2u}{dy^2}dy^2 + \frac{du}{dx}d^2x + \frac{du}{dy}d^2y \tag{246}$$

y empleando la fórmula simbólica para los tres primeros términos:

$$d^2u = \left(\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy\right)^2 + \frac{du}{dx}d^2x + \frac{du}{dy}d^2y \tag{247}$$

se seguiría el mismo procedimiento para calcular d^3u, d^4u, ... etc., y de d^3u en adelante los resultados son extremadamente complicados según crece el orden de la diferenciación y se aplican poco en la práctica.

180. **Funciones implícitas.** Cuando se trata de funciones implícitas varían las fórmulas. Sea

$$f(x, y) = 0$$

las sucesivas diferenciales serán nulas, y considerando á dx como constante, sus sucesivas diferenciales también serán nulas.

Ya hemos encontrado para valor de la primera diferencial:

$$\frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy = 0 \tag{248}$$

que da á conocer á dy.

Diferenciando nuevamente:

$$\frac{d^2f}{dx^2}dx^2 + 2\frac{d^2f}{dx\,dy}dx\,dy + \frac{d^2f}{dy^2}dy^2 + \frac{df}{dy}d^2y = 1 \tag{249}$$

que da á conocer á d^2y.

Para valor de la tercera diferencial se hallaría:

$$\frac{d^3f}{dx^3}dx^3 + 3\frac{d^3f}{dx^2dy}dx^2dy + 3\frac{d^3f}{dx\,dy^2}dx\,dy^2 + \frac{d^3f}{dy^3}dy^3 +$$
$$+ 3\left(\frac{d^3f}{dx\,dy}dx + \frac{d^2f}{dy^2}dy\right)d^2y + \frac{df}{dy}d^3y = 0 \tag{250}$$

que da á conocer á d^3y, etc.

181. Si la ecuación contiene tres variables:

$$f(x, y, z) = 0$$

en la que x é y son las independientes, dx, dy constantes y z es función implícita de dichas variables, se obtendría para valor de la primera diferencial:

$$\frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy + \frac{df}{dz}dz = 0 \tag{251}$$

y para valor de la segunda:

$$\frac{d^2f}{dx^2}dx^2 + \frac{d^2f}{dy^2}dy^2 + \frac{d^2f}{dz^2}dz^2 + 2\frac{d^2f}{dx\,dy}dx\,dy + 2\frac{d^2f}{dx\,dz}dx\,dz +$$
$$+ 2\frac{d^2f}{dy\,dz}dy\,dz + \frac{df}{dz}d^2z = 0 \tag{252}$$

Que *simbólicamente* sería:

$$\left(\frac{df}{dx}dx+\frac{df}{dy}dy+\frac{df}{dz}dz\right)^2+\frac{df}{dz}d^2z=0 \qquad (253)$$

que dará á conocer á d^2z en función de x, y, z, dx, dy, puesto que dz se conoce.

Creemos inútil proseguir el razonamiento.

APLICACIONES.

182. 1ª ¿Cuál es la diferencial de primer orden de la función $u=\mathrm{l}\tang\frac{x}{y}$?

Se tiene:

$$du=\frac{du}{dx}dx+\frac{du}{dy}dy \quad \text{es decir:} \quad du=\frac{2}{y\operatorname{sen}\frac{2x}{y}}-\frac{2x}{y^2\operatorname{sen}\frac{2x}{y}}=\frac{2(y\,dx-x\,dy)}{y^2\operatorname{sen}\frac{2x}{y}}$$

2ª Hallar la diferencial total de tercer orden de la función $u=x^2+y^2+z^2$.

Se tiene:

$$\frac{du}{dx}=2x,\quad \frac{d^2u}{dx^2}=2,\quad \frac{du}{dy}=2y,\quad \frac{d^2u}{dy^2}=2,$$

$$\frac{du}{dz}=2z,\quad \frac{d^2u}{dz^2}=2,\quad \frac{d^2u}{dx\,dy}=\frac{d^2u}{dx\,dz}=\frac{d^2u}{dy\,dz}=0,\quad du=2(x\,dx+y\,dy+z\,dz)$$

Aplicando la fórmula:

$$d^2u=\left(\frac{du}{dx}dx+\frac{du}{dy}dy+\frac{du}{dz}dz\right)^2=2(dx^2+dy^2+dz^2)$$

Como son constantes dx, dy, dz, de d^3u en adelante las diferenciales son nulas.

3ª Dada la función $u=x^m y^n$, averiguar los valores:

$$\frac{du}{dx},\ \frac{du}{dy},\ \frac{d^2u}{dx\,dy}$$

se tendrá:

$$\frac{du}{dx}=mx^{m-1}y^n,\quad \frac{du}{dy}=nx^m y^{n-1},\quad \frac{d^2u}{dx\,dy}=mnx^{m-1}y^{n-1}=\frac{d^2u}{dy\,dx}$$

4ª Propuesta la función $y=x^m z^p+x^2z^q-x^r$, hallar:

$$\frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \frac{d^3y}{dx^2\,dz}$$

se tendrá:

$$\frac{dy}{dx}=mx^{m-1}z^p+2xz^q-rx^{r-1},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=m(m-1)x^{m-2}z^p+2z^q-r(r-1)x^{r-2},$$

$$\frac{d^3y}{dx^2\,dz}=pm(m-1)x^{m-2}z^{p-1}+2qz^{q-1}$$

5ª Dada la expresión $u=e^{xyz}$, hallar:

$$\frac{d^3u}{dx\,dy\,dz}$$

se tendrá:

$$\frac{du}{dx}=yze^{xyz},\quad \frac{d^2u}{dx\,dy}=ze^{xyz}+xyz^2e^{xyz},$$

$$\frac{d^3u}{dx\,dy\,dz}=e^{xyz}+xyze^{xyz}+2xyze^{xyz}+x^2y^2z^2e^{xyz}=e^{xyz}(1+3xyz+x\ y^2z^2)$$

183. **Fórmulas de Taylor y de Mac-Laurin.—Aplicaciones.** I. Sea

$$y=f(x)$$

de donde sale incrementando á y:

$$y+\Delta y=f(x+\Delta x)$$

la función y se cambió en $y+\Delta y$ á causa de que x se cambió en $x+\Delta x$; así pues, el desarrollo $f(x+\Delta x)$ debe ser tal que se reduzca á $f(x)$ cuando Δx sea nulo; debe de consiguiente tener la forma:

$$f(x+\Delta x)=f(x)+A\Delta x+A'\Delta x^2+A''\Delta x^3+\ldots\ldots \qquad (254)$$

siendo A, A′, A″, ... funciones de x, no pudiendo contener dicho desarrollo potencias negativas de Δx, pues al hacer $\Delta x=0$, los términos que contuvieran dichas potencias serían infinitos y no resultaría $f(x)$ como debe ser.

En funciones tales como $f(x+\Delta x)$ que depende de la suma algebraica de dos variables ó bien se supone x variable y Δx constante ó vice versa para efectuar la diferenciación.

El coeficiente diferencial será en general:

$$\frac{df(x+\Delta x)}{d(x+\Delta x)}=\varphi(x+\Delta x)$$

si se adopta la primera hipótesis se cambiará en:

$$\frac{df(x+\Delta x)}{d(x+\Delta x)}=\frac{df(x+\Delta x)}{dx}=\varphi(x+\Delta x)$$

si la segunda en:

$$\frac{df(x+\Delta x)}{d(x+\Delta x)}=\frac{df(x+\Delta x)}{d\Delta x}=\varphi(x+\Delta x)$$

En consecuencia:

$$\frac{df(x+\Delta x)}{dx}=\frac{df(x+\Delta x)}{d\Delta x}$$

los primeros coeficientes diferenciales son, pues, idénticos.

El mismo razonamiento conduciría á obtener:

$$\frac{d^2f(x+\Delta x)}{dx^2}=\frac{d^2f(x+\Delta x)}{d\Delta x^2},\ \text{etc.}$$

luego los coeficientes diferenciales son idénticos.