Y pasando al límite:

$$\text{lím}\,\frac{\Delta s}{c}=\frac{\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}}{\sqrt{1+\dfrac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}}}=\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}}=1$$

luego *la relación de un arco de curva infinitamente pequeño á su cuerda, tiene por límite la unidad.*

Si se trata de ejes oblicuos haciendo un ángulo $\theta$, el anterior principio sirve para hallar la diferencial de un arco de curva.

La expresión de la cuerda es:

$$c=\sqrt{\Delta x^2+2\,\Delta x\,\Delta y\cos\theta+\Delta y^2}$$

y proponiéndonos hallar el límite de la relación $\frac{\Delta s}{\Delta x}$ puede sustituirse $c$ á $\Delta s$ basados en el principio demostrado y se tendrá:

$$\text{lím}\,\frac{\Delta s}{\Delta x}=\text{lím}\sqrt{1+2\frac{\Delta y}{\Delta x}\cos\theta+\frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}}$$

ó bien:

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}=\sqrt{1+2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\cos\theta+\frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}},\quad \mathrm{d}s=\sqrt{\mathrm{d}x^2+2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\cos\theta+\mathrm{d}y^2}\qquad(311)$$

Para hallar la diferencial de la área de una curva plana, sea (fig. 9):

$$u=\text{área EQNM},\ \ \mathrm{MN}=y,\ \ \mathrm{M'N'}=y+\Delta y,\ \ \mathrm{ON}=x,\ \ \mathrm{ON'}=x+\Delta x$$

siendo $\Delta x$ bastante pequeña para que la ordenada continuamente crezca ó mengüe de M á M'. Si los ejes hacen un ángulo $\theta$, el crecimiento $\mathrm{MDM'L}=\Delta u$, de la área $u$ estará comprendido entre los áreas ~~MDNN'~~ MNN'M' $=y\,\Delta x\operatorname{sen}\theta$, $\mathrm{LNN'M'}=(y+\Delta y)\,\Delta x\operatorname{sen}\theta$ y se tendrá:

$$\Delta u=y\,\Delta x\operatorname{sen}\theta+\Delta y\,\Delta x\operatorname{sen}\theta$$

pero como $\Delta y\,\Delta x\operatorname{sen}\theta$ es infinitamente pequeña, designando por $\varepsilon$ una cantidad que se anule con $\Delta x$, se tendrá:

$$\Delta u=y\,\Delta x\operatorname{sen}\theta+\varepsilon\,\Delta x\ \text{ de donde resulta }\ \frac{\Delta u}{\Delta x}=y\operatorname{sen}\theta+\varepsilon$$

y pasando al límite:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=y\operatorname{sen}\theta,\quad \mathrm{d}u=y\operatorname{sen}\theta\,\mathrm{d}x\qquad(312)$$

para ejes oblicuos y $\mathrm{d}u=y\,\mathrm{d}x$ para rectangulares.

196. Asíntotas. Para que una recta pueda considerarse como asíntota es preciso que al suponer infinitas las coordenadas de su punto de contacto con la curva, resultan finitas las distancias OE y OR (fig. 10) del origen á los puntos en que corte á los ejes.

Si siendo finita una de estas dos distancias la otra es infinita, la asíntota será paralela al eje sobre el que se halla esta última; no pueden las dos ser infinitas, pues no podrá asignarse la posición de una recta que encontrase á la curva y á los ejes á una distancia infinita del origen, la curva entonces no tiene asíntotas.



Designando por $x$ é $y$ las coordenadas de M y OT, OD por X é Y, se tendrá:

$$\mathrm{X}=x-\mathrm{PT}=x-y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y},\quad \mathrm{Y}=-\mathrm{X}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y-x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\qquad(313)$$

Así pues, según lo ya establecido cuando al suponer $x$ é $y$ infinitas resulten finitas X é Y la curva tendrá asíntotas, si resultan infinitas no habrá, y si una resulta finita y la otra infinita, la asíntota será paralela al eje correspondiente á esta última.

Teniendo en cuenta la relación $\mathrm{Y}=-\mathrm{X}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ que conduce á la ecuación $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{X}}$ se ve que X é Y pueden á la vez ser nulas excepto cuando $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ sea nulo ó infinito.

Si las dos son nulas, la asíntota pasa por el origen, pero como no basta un punto para averiguar la dirección de la asíntota, es preciso buscar el límite de la expresión $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ que representa la tangente del ángulo MTP y se hallará la tangente del SRX.

Se ve pues que puede construirse la asíntota por los dos métodos ya conocidos: conociendo X é Y para tener los puntos de intersección con los ejes ó conociendo la ordenada del origen Y y el coeficiente angular que es el límite de $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

*196'. Puesto que no sólo se construye una recta conociendo las distancias X é Y en que corta á los ejes, sino también conociendo Y ordenada del origen y el coeficiente angular que á la recta corresponde, se ve claramente que esta segunda consideración originaría un segundo procedimiento.

La ecuación de la asíntota rectilínea no paralela á los ejes es en general:

$$\mathrm{Y'}=\alpha\mathrm{X'}+\mathrm{Y}\qquad(a)$$

y la ecuación de la tangente á la curva es (fórmula 304):

$$\mathrm{Y'}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\mathrm{X'}+\left(y-x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\qquad(b)$$

habrá que determinar á $\alpha$ y á Y.

La distancia del punto $(x, y)$ de la curva á la asíntota es en ejes oblicuos:

$$\frac{(y-\alpha x-\mathrm{Y})\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{1+2\alpha\cos\theta+\alpha^2}}$$

expresión que debe tender á 0 con $\frac{1}{x}$ y designando por $\varepsilon$ una cantidad que tienda á 0 con $\frac{1}{x}$, puede escribirse:

$$y-\alpha x-\mathrm{Y}=\varepsilon\ \text{ ó }\ y=\alpha x+\mathrm{Y}+\varepsilon\ \text{ ó aun }\ \frac{y}{x}=\alpha+\frac{\mathrm{Y}+\varepsilon}{x}$$

que para $x=\infty$ conduce á:

$$\text{lím}\,\frac{y}{x}=\alpha\qquad(c)$$

Además:

$$\mathrm{Y}=(y-\alpha x)-\varepsilon=\text{lím}\,(y-\alpha x)\qquad(d)$$

y las ecuaciones (c), (d) determinan á $\alpha$ é Y. Hay pues que atender á las condiciones (c) y (d).

La primera da (párrafo 187'):

$$\alpha=\text{lím}\,\frac{y}{x}=\text{lím}\,\frac{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}{1}=\underset{(x=\infty)}{\text{lím}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}\qquad(e)$$

La segunda:

$$\mathrm{Y}=\lim\,(y-ax)=\lim\frac{a-\frac{y}{x}}{-\frac{1}{x}}=\lim\frac{\dfrac{\left(y-x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^{(1)}}{x^2}}{\left(\frac{1}{x^2}\right)}=\lim\left(y-x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) \qquad \text{(f)}$$

Así pues, las condiciones de investigación del asintotismo quedan cifradas en las ecuaciones (que ya habíamos demostrado por el primer procedimiento):

$$a=\lim\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\quad \mathrm{Y}=\lim\left(y-x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$$

De consiguiente la tangente representada por la fórmula (b) tiene por límite la asíntota (a) cuando el punto $(x, y)$ se aleja al infinito permaneciendo siempre sobre la rama de la curva que se considera. De acuerdo con el párrafo (190) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ é $y-x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ deben conservar valores determinados cualquiera que sea $x$, de lo contrario la asíntota no será el límite de las tangentes.

197. Osculación, radio de curvatura, evolutas é involutas. Sean $y=\mathrm{F}(x)$, $y=f(x)$ las ecuaciones de dos curvas IMZ, HMZ′ (fig. 10) que tienen un punto común M, $(x, y)$. Para este punto $\mathrm{F}(x)=f(x)$ ya sea que en él se corten las curvas ó se toquen.

En el primer caso sólo se verifica la condición establecida; en el segundo, además se tendrá $\mathrm{F}'(x)=f'(x)$, puesto que hay en él una tangente común; en este caso se dice que las curvas son *osculatrices* con un contacto de primer orden.

Incrementando la abscisa $x$ que corresponde á M, se tendrán para las ordenadas de las dos curvas correspondientes á la nueva abscisa $x+h$:

$$\mathrm{F}(x+h)=\mathrm{F}(x)+\mathrm{F}'(x)\,h+\mathrm{F}''(x)\,\frac{h^2}{1.2}+\cdots\cdots$$

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)\,h+f''(x)\,\frac{h^2}{1.2}+\cdots\cdots$$

La diferencia entre estos resultados da á conocer la distancia entre dos puntos de las curvas correspondientes á la misma abscisa $x+h$. Conforme aumente el número de términos iguales entre sí en los anteriores resultados, menguará la diferencia antedicha y habrá contacto más íntimo; si todos los términos se igualaran las curvas se confundirían.

En general se dice que el contacto es de grado $n$ cuando hay igualdad entre las ecuaciones de las curvas y las $n$ primeras derivadas, teniéndose, de consiguiente, $n+1$ ecuaciones de condición.

Así pues, *simbólicamente* las condiciones de este contacto quedarían cifradas así:

$$\mathop{\mathrm{F}^n}_{n=0}^{n=n}(x)=\mathop{f^n}_{n=0}^{n=n}(x)$$

Admitiendo que $\mathrm{F}^0(x), \mathrm{F}^1(x), \mathrm{F}^2(x), \ldots\ldots, f^0(x), f^1(x), f^2(x), \ldots\ldots$, fuesen símbolos de las ecuaciones y sus derivadas.

(1) Pues los dos términos de la fracción $\dfrac{a-\frac{y}{x}}{-\frac{1}{x}}$ se anulan para $x=\infty$ y hay que atender al párrafo 187′.



Así pues, si hay $n+1$ constantes: $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots$, indeterminadas en la ecuación $y=\mathrm{F}(x)$ de la curva, para que esta curva sea osculatriz de $n$.º orden de otra curva $y=f(x)$, hay que establecer el mismo número de ecuaciones de condición entre las ecuaciones de las curvas y sus $n$ derivadas sucesivas con el fin de determinar las constantes.

De esto se sigue que el contacto de una curva con su tangente rectilínea es de primer orden.

En efecto, la ecuación de la curva es $y=f(x)$ y la de la recta $y=ax+b$ que tiene *dos* constantes.

Habrá, pues, que establecer *dos* ecuaciones de condición para determinar á $a$ y á $b$ y el contacto será de primer orden.

Si el punto de contacto es $(x', y')$, las condiciones son:

$$ax'+b=y',\quad a=\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x'}.$$

en que los segundos miembros son la ordenada y la primera derivada de la curva correspondientes al punto de contacto.

Sustituyendo el valor de $a$ en la primera ecuación, resulta:

$$b=y'-\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x'}\,x'$$

Así pues, la ecuación de la recta será:

$$y=\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x'}\,x+y'-\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x'}\,x' \quad \text{ó bien} \quad y-y'=\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x'}\,(x-x')$$

ecuación ya demostrada que corresponde á la tangente.

*Radio de curvatura.* Vemos que en las inmediaciones del punto común el contacto de dos curvas osculatrices es tan íntimo que se confunden sensiblemente y puede admitirse igualdad de curvatura en dicho punto valuando recíprocamente la curvatura de una por la de la otra. Si una de las dos curvas es una circunferencia que es la que mejor se presta para servir de unidad de valuación, su curvatura será la que corresponda á la otra curva en los puntos en que se vayan considerando círculos osculadores, pero como á la vez la curvatura del círculo osculador se traduce por el radio que le corresponde, éste será el que dé cuenta de la que corresponde á la curva dada; por esto dicho radio se ha llamado *radio de curvatura* (1).

Para hallar su expresión analítica, sea $y=f(x)$ la ecuación de la curva y

$$(x-p)^2+(y-q)^2=\mathrm{R}^2$$

la ecuación general de un círculo que al contener tres constantes demanda tres ecuaciones de condición, siendo de consiguiente el contacto de segundo orden.

Las tres ecuaciones condicionales son:

$$y=q\pm\sqrt{\mathrm{R}^2-(x-p)^2},\quad -\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x-p}{y-q},\quad -\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{1+\frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}}{y-q}$$

(1) La Geometría Elemental demuestra que las curvaturas de dos círculos son recíprocamente proporcionales á sus radios, es decir, que si éstos son R y $r$ y designamos por A y $a$ magnitudes angulares correspondientes á una misma extensión lineal tomado en las circunferencias, se tiene la ecuación $\mathrm{A\,R}=ar$ que cifra el principio enunciado.

Eliminando á $y-y$ en las dos últimas, se obtiene:

$$y-q=-\frac{1+\frac{dy^2}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \quad x-p=\frac{1+\frac{dy^2}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}\cdot\frac{dy}{dx}$$

Sustituyendo en la primera:

$$R^2=\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^2}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}+\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^2}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}\cdot\frac{dy^2}{dx^2}=\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^3}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}$$

Y finalmente:

$$R=\pm\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

expresión del radio de curvatura en función de las derivadas de la ecuación de la curva considerada.

Depende el doble signo del sentido de la curvatura de la línea, si lo consideramos como positivo cuando la curva es cóncava hacia el eje $xx'$, en cuyo caso (párrafo 192) la ordenada es positiva y el segundo coeficiente diferencial negativo, podemos escribir por expresión general:

$$R=-\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \tag{314}$$

Combinando esta fórmula con la de la normal (fórmula 308) resultará:

$$R=-\frac{N^3}{y^3\frac{d^2y}{dx^2}} \tag{315}$$

De la segunda ecuación condicional de las que condujeron á la expresión del radio de curvatura, se deduce:

$$y-q=-\frac{dx}{dy}(x-p)$$

Esta ecuación es la que hallamos (párrafo 195) para la normal á la curva y como determina el valor relativo de las coordenadas $p$, $q$ del centro del círculo osculador en función de $x$, $y$, así como de $\frac{dx}{dy}$ que pertenece á la vez á la curva y al círculo osculador, se deduce *que el centro del círculo osculador está sobre la normal á la curva que pasa por el punto de contacto.*

Este principio va á servirnos inmediatamente.

*Evolutas é involutas.* Si suponemos una curva ABCD...... (fig. 11) y por sus diversos puntos se trazan normales (que no son sino sus radios de curvatura), las intersecciones de estas normales dos á dos van dando los centros de los círculos osculadores respectivos, el lugar geométrico de estos centros que será una línea poligonal (ó una curva si los puntos elegidos en la curva primera están separados por distancias infinitamente pequeñas) se denomina *evoluta* de la curva ABCD...... y á su vez esta curva ABCD...... es la *involuta* de A'B'C'D'......



Conforme á estas consideraciones, concibiendo un hilo arrollado en la dirección de la curva A'B'C'D', ......, si se desarrolla de manera que vaya teniendo las posiciones B'B, C'C, ......, tangentes á la curva A'B'C'D', ...... (y que deben ser normales á la involuta por formar) las posiciones A, B, C, ......, del extremo del hilo serán los puntos sucesivos de la *involuta*. De esta generación resulta que los radios de curvatura B'B, C'C, ...... tendrán la misma longitud que los arcos AB', AC', ......

Si pues se da la ecuación de una curva y se pide la de su evoluta, como las coordenadas del círculo osculador $p$, $q$ son comunes á la evoluta, sólo habrá que combinar la ecuación de la curva con los valores de $x-p$ é $y-q$ hallados al tratar del radio de curvatura; de esta manera se eliminarán $x$ é $y$ y se obtendrá una relación final entre $p$, $q$, y las constantes de la curva propuesta.

## APLICACIONES.

198. I. Dada la ecuación de la elipse $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$, debe obtenerse:

Ecuación de la tangente: $a^2yy'+b^2xx'=a^2b^2$

„ „ normal: $b^2x'(y-y')-a^2y'(x-x')=0$

$$T=\frac{y}{b^2x}\sqrt{a^4y^2+b^4x^2}, \quad N=\frac{1}{a^2}\sqrt{a^4y^2+b^4x^2}, \quad S.T=-\frac{a^2-x^2}{x}$$

$$S.N=-\frac{b^2x}{a^2}, \quad ds=\frac{dx}{a}\sqrt{\frac{a^4-x^2(a^2-b^2)}{a^2-x^2}}$$

para la hipérbola bastaría hacer negativo á $b^2$.

II. La ecuación de la cicloide es:

$$x=\text{arc}\,(\text{sen ver}=y)-\sqrt{2ry-y^2}$$

siendo $r$ el radio del círculo generador, demostrar que la normal de esta curva es media proporcional entre la ordenada y el diámetro del círculo generador.

III. La ecuación general de las curvas de segundo grado referidas á sus vértices como origen es:

$$y^2=2px+qx^2$$

Debe encontrarse:

$$T=\frac{\sqrt{(2px+qx^2)p^2+(1+q)(2px+qx^2)^2}}{p+qx}, \quad N=\sqrt{p^2+(1+q)(2px+qx^2)}$$

$$S.T=\frac{2px+qx^2}{p+qx}, \quad S.N=p+qx, \quad N'=\frac{x\sqrt{p^2+(1+q)(2px+qx^2)}}{p+qx}$$

Para la elipse se supondrá: $p=\frac{b^2}{a}$, $q=-\frac{b^2}{a^2}$

„ „ hipérbola „ „ $p=\frac{b^2}{a}$, $q=\frac{b^2}{a^2}$

„ „ parábola „ „ $q=0$

IV. Sea la ecuación general de las curvas de segundo grado:

$$y^2=2px+qx^2$$

y se trata de aplicarle la investigación del asintotismo.

La fórmula por aplicar es (fórmula 313):

$$X=x-y\frac{dx}{dy}=x-\frac{y^2}{p+qx}=-\frac{px}{p+qx}=-\frac{p}{\frac{p}{x}+q}$$

Como $x$ sólo puede ser infinito en la hipérbola y en la parábola, desde luego hay que excluir á la elipse y quedan dos casos.

*Primer caso.* Hipérbola, $x=-\frac{p}{q}=-a$; luego tiene asíntotas que pasan por su centro.

*Segundo caso.* Parábola, $x=-\frac{p}{0}=-\infty$; las asíntotas serían paralelas al eje $xx'$ y á una distancia infinita, es decir, no hay asíntotas rectilíneas. Averiguada la existencia de las asíntotas en la hipérbola para conocer su dirección según explicamos, hay que recurrir á la fórmula (313) $\frac{dy}{dx}=-\frac{Y}{X}$ que en este caso será:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{p+qx}{\sqrt{2px+qx^2}}=\frac{\frac{p}{x}+q}{\sqrt{\frac{2p}{x}+q}}=\sqrt{q}=\pm\frac{b}{a}\ (x=\infty)$$

resultado fácil de interpretar.

Si se tratan de determinar las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola referida á su centro, como se conoce el coeficiente angular $\pm\frac{b}{a}$, sólo falta conocer á Y para lo cual se tiene que poner por $x$, $a+x$ en la fórmula (313) lo que dará:

$$Y=y-(a+x)\frac{p+qx}{y}=\pm(p-aq)=0$$

Así pues, las ecuaciones pedidas son como debía esperarse:

$$y=\pm\frac{b}{a}x \quad \text{ó sea} \quad y=\frac{b}{a}x,\quad y=-\frac{b}{a}x$$

V. Sea la ecuación del *folium de Descartes:* $y^3+x^3-3axy=0$ (fig. 12); se tendrá:

$$X=-\frac{axy}{ay-x^2}=-\frac{a}{\frac{a}{x}-\frac{x}{y}},\quad Y=-\frac{axy}{ax-y^2}=-\frac{a}{\frac{a}{y}-\frac{y}{x}}$$

En esta curva si $x$ es infinita positiva, $y$ es infinita negativa y vice versa; luego

$$-\frac{y}{x}=+1,\quad -\frac{x}{y}=+1 \quad \text{de consiguiente} \quad X=-a,\quad Y=-a$$

Como son finitos estos valores, hay una asíntota que corta á los ejes en la región de las coordenadas negativas á la distancia $a$, y puesto que $\frac{dy}{dx}=-1$, su dirección hará un ángulo de 135° con el eje OX. Conocido el coeficiente angular $-1$ y la ordenada del origen $-a$, la ecuación de la asíntota es:

$$y=-x-a$$

VI. La ecuación $y^2=2px+qx^2$, conduce á un radio de curvatura que tiene por expresión general: $R=\frac{N^3}{p^2}$ eligiendo la fórmula (315); vemos que es igual al cubo de la normal en el punto considerado dividido por el cuadrado del semiparámetro.



Como en la parábola la normal vale $N=\sqrt{p^2+2px}$, se tendrá sustituyendo en la fórmula anterior:

$$R=\frac{\sqrt{(p^2+2px)^3}}{p^2}$$

que puede rectificarse obteniéndola por el método directo.

VII. Determinar la ecuación de la evoluta de la elipse expresada por la ecuación:

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$$

Diferenciando dos veces resulta:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{b^4}{a^2y^3}$$

y habría que combinar estos resultados con los valores (párrafo 197) de $y-q$ y $x-p$, y se tendrá:

$$y-q=\frac{(a^4y^2+b^4x^2)y}{a^2b^4}=y+\frac{c^2y^3}{b^4},\quad x-p=\frac{x(a^4y^2+b^4x^2)}{a^4b^2}=x-\frac{c^2x^3}{a^4}$$

recordando la ecuación de la curva y la relación $a^2-b^2=c^2$.

De estas ecuaciones resulta:

$$x^2=\frac{a^{\frac{8}{3}}p^{\frac{2}{3}}}{c^{\frac{4}{3}}},\quad y^2=\frac{b^{\frac{8}{3}}q^{\frac{2}{3}}}{c^{\frac{4}{3}}}$$

Sustituyendo en la ecuación de la elipse y diviéndola por $a^2b^2$, finalmente resultará:

$$b^{\frac{2}{3}}q^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{2}{3}}p^{\frac{2}{3}}=c^{\frac{4}{3}}=(a^2-b^2)^{\frac{2}{3}}$$

Para la hipérbola se tendría:

$$b^{\frac{2}{3}}q^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{2}{3}}p^{\frac{2}{3}}=(b^2-a^2)^{\frac{2}{3}}$$

Para la parábola:

$$q-p'=\tfrac{3}{2}p'^{\frac{1}{3}}p^{\frac{2}{3}}$$

partiendo de la ecuación $x^2=2p'y$.

199. Puntos singulares de las curvas. Toda relación entre dos variables representa una curva plana $y=f(x)$ y como $\frac{dy}{dx}$ representa la tangente del ángulo que la tangente á la curva en el punto elegido hace con el eje $xx'$, evidentemente según los valores que vaya tomando esta derivada finitos, infinitos, de forma indeterminada, etc., se presentarán diversas inclinaciones para la tangente y esto hará conocer las diferentes variaciones notables de dirección que vaya tomando la curva.

Como también la comunidad ó diferencia de signo de la ordenada y de $\frac{d^2y}{dx^2}$ señala convexidad ó concavidad de la curva respecto al eje $xx'$, en general es importante para llegar al conocimiento geométrico de la curva dada, averiguar las circunstancias de valor y signo de los coeficientes diferenciales deducidos de su ecuación; la parte de la "Teoría de las curvas" que se ocupa de este estudio, se llama *discusión* y los procedimientos que adopta se cifran en las condiciones esenciales que se requieren para la existencia de los puntos de la curva llamados *singulares* por ser notable en ellos el cambio de dirección.

Si se considera un punto M (fig. 13) de una curva plana, se traza la tangente TT′