en M y luego un contorno cerrado que encierre á M y que puede ser un círculo de radio infinitamente pequeño trazado desde M como centro, este contorno cortará en general á la curva en dos puntos m, m' y los radios Mm, Mm' harían ángulos infinitamente pequeños con las direcciones MT, MT$'$, por consiguiente el ángulo de estos radios diferirá infinitamente poco de dos ángulos rectos. Cuando estas dos circunstancias no se presentan simultáneamente, el punto M es singular.

Respecto á la enumeración de estos puntos, diremos que pueden ser: 1º *Puntos* de intersección con los ejes. 2º En los que la tangente es paralela á los ejes.

3º *Múltiples* cuando en ellos se cruzan varias ramas de curva siendo múltiples de primer género ó *nodos* cuando cada rama tiene su tangente propia (fig. 14), y del segundo género cuando hay una tangente común.

Entre los múltiples del primer género conviene señalar los puntos *salientes ó angulosos* (fig. 15). Entre los de segundo género hay que mencionar los de *retroceso* cuando en el punto se detienen dos ramas de curva, pudiendo ser el retroceso de primero ó segundo género, según que la tangente común separe á las dos ramas ó que ambas queden en una misma región (figs. 16 y 17), es decir, que se vuelvan sus convexidades ó sus concavidades.

Trazando un círculo con el punto múltiple como centro y un radio infinitamente pequeño cortará á la curva en general en más de dos puntos; para el caso particular del retroceso y de los puntos angulosos en dos. En los de retroceso los radios que pasan por los puntos de intersección hacen entre sí un ángulo infinitamente pequeño y en el caso de punto angular, los radios que pasan por los puntos de intersección hacen entre sí un ángulo que difiere de dos rectos ó de cero una cantidad finita.

4º *Aislados* ó *conjugados* cuando no están próximos á ningún otro punto de la curva, es decir, la curva es imaginaria antes y después de ellos, el círculo trazado como antes se hizo no corta á la curva (fig. 18).

5º *Puntos de inflexión.* En los que la curva de cóncava pasa á ser convexa respecto á un eje ó vice versa, el círculo mencionado cortará en dos puntos á la curva (fig. 2 bis, punto A).

6º *Puntos de detención.* Suelen presentarse estos puntos en los que una rama de curva se detiene en ellos bruscamente, el círculo trazado sólo corta á la curva en un punto (fig. 19).

200. 1º Si la ecuación de la curva es $f(x, y)=0$ suponiendo $x=0$, los valores de y deducidos de $f(0, y)=0$, darán los puntos en que la curva corta al eje yy' y los valores de x deducidos de $f(x, 0)=0$ darán los puntos en que la curva corta al eje xx'.

2º Para que la tangente sea paralela á xx' ó á yy', ya se ha visto que la condición que debe tenerse es: $\frac{dy}{dx}=0$ en el primer caso ó $\frac{dy}{dx}=\infty$, es decir, $\frac{dx}{dy}=0$ en el segundo, efectuando la investigación conocida (párrafo 191).

3º Respecto á los puntos múltiples, distinguiremos los dos casos ya señalados.

Primer género. Supondremos dos ramas que se cruzan, cada una con su tangente. De la ecuación $f(x, y)=0$ de la curva se deduce:

$$\frac{df}{dx}+\frac{df}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

y supuesto que en el punto múltiple, $\frac{dy}{dx}$ debe tener dos valores diversos (pues que hay dos tangentes) y que llamaremos a y a', se tendrá:

$$\frac{df}{dx}+\frac{df}{dy}a=0, \quad \frac{df}{dx}+\frac{df}{dy}a'=0$$

para el punto múltiple.

Restando estas ecuaciones resulta:

$$\frac{df}{dy}(a-a')=0$$

que para que se verifique se necesita la condición $\frac{df}{dy}=0$, puesto que el otro factor $(a-a')$ no puede ser nulo al ser distintos a y a'. Sustituído este valor en las dos ecuaciones establecidas, resulta en ambas $\frac{df}{dx}=0$ y sustituídas las dos condiciones en ecuación que determina á $\frac{dy}{dx}$ resulta $\frac{dy}{dx}=\frac{0}{0}$ que es la condición para la existencia de puntos múltiples del primer género.

Segundo género. Supondremos que dos ramas de la curva se reunen en el punto múltiple supuesto cuyas coordenadas son x_0, y_0 y en el que hay una tangente común; si incrementamos á la abscisa la cantidad h, la expresión general de la diferencia de ordenadas de un punto de una curva y uno de su tangente correspondiente á la misma abscisa, es en general:

$$D=F''x_0\frac{h^2}{1.2}+\cdots\cdots \text{ (párrafo 192) (1)}$$

Pero como en este caso hay dos ramas con la misma tangente, D que expresa la parte de ordenada que hay comprendida entre la tangente común y la curva, debe tener dos valores distintos; de consiguiente la serie que da el valor de D debe admitir dos valores diversos para uno solo del incremento h que se le dió á la abscisa.

Para llenar esta condición es preciso que en los términos que constituyen dicha serie haya alguno cuyo coeficiente tenga doble signo ó de algún modo admita dos valores distintos. Supongamos que este coeficiente sea $F^n(x_0)$ que entra en el término:

$$F^n(x_0)\frac{h^n}{1.2.3......n}$$

de la serie, siendo n un número entero positivo. Para darnos cuenta de cómo puede llenarse la condición expuesta, veamos cómo se origina $F^n(x_0)$ ó sea $\frac{d^ny}{dx^n}$ para lo cual diferenciando $n-1$ veces la expresión:

$$\frac{df}{dx}+\frac{df}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

(1) Expresión que directamente puede obtenerse observando que para la abscisa x_0+h, la ecuación de la curva $y=F(x)$ se cambia en:

$$F(x_0+h)=F(x_0)+F'(x_0)h+F''(x_0)\frac{h^2}{1.2}+\text{etc.}$$

y la de la tangente $y'=\phi(x)=ax+b$ se cambia en:

$$\phi(x_0+h)=(ax_0+b)+ah=\phi(x_0)+\phi'(x_0)h$$

de suerte que la diferencia es:

$$D=\left\{F(x_0)-\phi(x_0)+h\left[F'(x_0)-\phi'(x_0)\right]\right\}+F''(x_0)\frac{h^2}{1.2}+\text{etc.}$$

y como la tangente tiene con la curva contacto de primer orden, el paréntesis se nulifica y resultará como antes:

$$D=F''(x_0)\frac{h^2}{1.2}+\text{etc.}$$

Llegaremos á tener otra de la forma:

$$\frac{df}{dy}\cdot\frac{d^n y}{dx^n}+S=0 \quad \text{ó bien} \quad \frac{df}{dy}F^n(x_0)+S=0$$

en la que $\frac{df}{dy}$ tiene que seguir apareciendo como coeficiente que debe ser de las sucesivas derivadas de $\frac{dy}{dx}$ y en la que S representa los demás términos originados en la operación é independientes de $\frac{d^n y}{dx^n}$.

Sean a y a' los dos valores diversos que debe admitir $F^n(x_0)$ y se tendrá:

$$\frac{df}{dy}a+S=0, \quad \frac{df}{dy}a'+S=0$$

que combinándolas por substracción producen $\frac{df}{dy}(a-a')=0$.

En esta ecuación debe tenerse $\frac{df}{dy}=0$, puesto que no puede suponerse $a-a'=0$ por ser diversos a y a'.

Sustituída la condición $\frac{df}{dy}=0$ en las dos ecuaciones antes escritas, se obtendrá $S=0$, lo que conducirá á la nueva condición $F^n(x_0)=\frac{0}{0}$; para que esto haya sucedido $F^n(x_0)$ debe tener la forma:

$$\frac{fx(x-x_0)^m}{f_1 x(x-x_0)^n}$$

y los factores $(x-x_0)^m$, $(x-x_0)^n$ deben existir en la derivada anterior con un exponente una unidad mayor y de consiguiente llegaremos á concluir que existen en $\frac{dy}{dx}$ que para $x=x_0$ debe valer $\frac{dy}{dx}=\frac{0}{0}$; así pues, la condición final es la misma que para los puntos del primer género.

Siendo la condición final idéntica en los dos casos y siendo su carácter el de indeterminación, habrá que aplicarle los razonamientos del párrafo (187′) y según ellos si la indeterminación es aparente se llegará á una de las tres conclusiones siguientes:

$$\frac{dy}{dx}=0, \quad \frac{dy}{dx}=\infty, \quad \frac{dy}{dx}=R$$

siendo R cantidad finita y no nula, pudiendo suceder que se presentara cualquiera de ellas sin que y admitiera valores diversos á inmediaciones del punto x_0, y_0.

Para resolver la incertidumbre de si el punto es múltiple ó no, se incrementa á x_0 las cantidades h y $-h$ bastante pequeñas para ver si para y_0+k corresponden á inmediaciones de x_0, valores diversos para uno de h.

1º Si tanto x_0+h como x_0-h conducen á valores reales de y, entonces el punto es *múltiple*.

2º Si tanto x_0+h como x_0-h conducen á valores imaginarios de y, el punto es *conjugado*.

3º Si x_0+h conduce á valores reales de y y x_0-h á imaginarios ó vice versa, el punto es de retroceso [1].

La comparación de los signos de la ordenada y del segundo coeficiente diferencial ó el signo del producto de ambas cantidades (positivo si son de signos iguales ó negativo

[1] Puede llegarse directamente á deducir que $\frac{dy}{dx}$ toma la forma $\frac{0}{0}$ en los puntos conjugados, atendiendo á que debiendo ser imaginaria la curva antes y después de ellos, habrá entre los términos de la serie que expresa á D alguno cuyo coeficiente contenga un radical de grado par. Suponiendo que sea $F^n(x_0)$ y aplicando el razonamiento aplicado para los puntos múltiples del segundo género se llegará á la conclusión enunciada $\frac{dy}{dx}=\frac{0}{0}$.

si son de signos contrarios) dará luz sobre la concavidad ó convexidad de las ramas de la curva, al haber hallado la existencia de un retroceso y tratar de clasificarlo.

4º Los puntos de *inflexión* ya los analizamos en el párrafo 192.

5º Por último, respecto á los de *detención* que suelen presentarse algunas veces, nos limitamos á poner adelante un ejemplo que da una idea clara de ellos.

En las ideas generales que hemos expuesto se basa el método abstracto y general que se aplica para la discusión de los puntos singulares de las curvas; como la aplicación de dicho método á *cualquier caso* propuesto, requiere el conocimiento de teorías que constituyen la segunda parte de nuestra obra, como la composición de las ecuaciones, su resolución, etc.; al "Cálculo" corresponde esa generalización y es exclusivamente de su pertenencia.

Así pues, nuestra misión se limita para terminar estas nociones sobre la "Teoría de las curvas planas" á ceñirnos á algunos ejemplos numéricos que á la vez que esclarezcan las consideraciones expuestas, no demanden para su resolución sino los conocimientos hasta ahora adquiridos.

APLICACIONES.

201. I. Sea la ecuación $y^4-96a^2y^2+100a^2x^2-x^4=0$; como la curva que representa esta ecuación es en extremo notable, comenzaremos por entrar en investigaciones preliminares.

Resolviendo esta ecuación bicuadrada á semejanza de las de segundo grado, se tiene:

$$y=\pm\sqrt{48a^2\pm\sqrt{2304a^4-100a^2x^2+x^4}} \qquad (a)$$

y haciendo para simplificar:

$$2304a^4-100a^2x^2+x^4=N \qquad (b)$$

se obtendrán cuatro valores para y:

$$\left.\begin{array}{ll} y=\sqrt{48a^2+\sqrt{N}}\ (1), & y=\sqrt{48a^2-\sqrt{N}}\ (2) \\ y=-\sqrt{48a^2+\sqrt{N}}\ (3), & y=\sqrt{48a^2-\sqrt{N}}\ (4) \end{array}\right\} \qquad (c)$$

y se obtienen las consecuencias siguientes:

1ª Como (3) y (4) sólo difieren de (1) y (2) por el signo, el eje de las x será eje de simetría de la curva.

2ª Como N sólo contiene potencias pares de x, no cambiará al poner por x, $-x$ y el eje de las y será también eje de simetría. Estas dos conclusiones brotan inmediatamente de la forma de la ecuación de la curva.

3ª Los valores (1) y (2) no serán reales sino cuando N sea positivo y siendo N racional y entero, sólo puede mudar de signo pasando por cero; hay pues que averiguar los valores que x puede tener en la ecuación:

$$x^4-100a^2x^2+2304a^4=0$$

que resuelta da:

$$x=\pm\sqrt{50a^2\pm\sqrt{2500a^4-2304a^4}}=\pm\sqrt{50a^2\pm14a^2}=\left\{\begin{array}{c}+8a\\-8a\\+6a\\-6a\end{array}\right\} \qquad (d)$$

Como al suponer $x=8a$, $x=-8a$, $x=+6a$, $x=-6a$ debe nulificarse la ecuación, forzosamente debe contener los factores $x-8a$, $x+8a$, $x-6a$ y $x+6a$; así pues la ecuación propuesta podrá escribirse (1):

$$x^4-100a^2x^2+2304a^4=(x-8a)(x+8a)(x-6a)(x+6a)p$$

siendo p el factor constante cuyo valor vamos á averiguar. Desarrollando:

$$x^4-100a^2x^2+2304a^4=(x^2-64a^2)(x^2-36a^2)p=x^4p-100a^2x^2p+2304a^4p$$

que para que sean idénticas y los coeficientes de la incógnita sean iguales, p debe valer 1; así pues puede escribirse:

$$x^4-100a^2x^2+2304a^4=(x-8a)(x+8a)(x-6a)(x+6a)=0$$

Si á x se le dan valores $<6a$ y >0, N es positivo y los valores de y reales.

Si á x se le dan valores mayores que $6a$ y menores que $8a$, el resultado que se obtiene es negativo, esto conducirá á tener N con signo menos, los valores de y imaginarios, luego entre las abscisas $6a$ y $8a$ no habrá puntos de la curva.

De $x=8a$ en adelante, N será positivo y las ordenadas reales.

4ª Para los valores $x=0$, $x=6a$, $x=8a$, resultan:

$$y=\sqrt{96a^2},\quad y=\sqrt{48a^2},\quad y=\sqrt{48a^2}$$

Se habrá, pues, determinado: 1º, la parte DF (fig. 20) que se extiende del punto D, $(x=0,\ y=\sqrt{96a^2})$ al punto F, $(x=6a,\ y=\sqrt{48a^2})$; 2º, la parte HL que del punto H $(x=8a,\ y=\sqrt{48a^2})$ se extiende al infinito en el cuadrante de las coordenadas positivas.

5ª La ecuación (2) también dará valores imaginarios para y entre $x=6a$ y $x=8a$ y los supuestos $x=0$, $x=6a$, $x=8a$, producen:

$$y=0,\quad y=\sqrt{48a^2},\quad y=\sqrt{48a^2}$$

Se habrá, pues, determinado: 1º, la parte OF que se une con la DF en el punto F $(x=6a,\ y=\sqrt{48a^2})$ en que las coordenadas son iguales; 2º, la posición HK determinada por (2) que continúa la HL suministrada por (1) en el punto H cuyas coordenadas $(x=8a,\ y=\sqrt{48a^2})$ concuerdan; 3º, que en esta parte HK, y decrece hasta cero cuando $48a^2=\sqrt{N}$, lo que da el punto I situado sobre xx' y cuya abscisa se obtendrá bien suponiendo $y=0$ en la ecuación y determinando los valores que resulten para x, ó bien aprovechando la condición $48a^2=\sqrt{N}$, obteniendo de uno ú otro modo la ecuación $x^4-100a^2=0$ que da:

$$\begin{cases} x=0 \\ x=\pm 10, \end{cases}$$

valores que relacionados con la hipótesis $y=0$ que á ellos condujo, producen las condiciones:

$$\begin{cases} y=0 \\ x=0, \end{cases}\quad \begin{cases} y=0 \\ x=\pm 10a \end{cases}$$

(1) Todos estos artificios son inútiles conociendo los principios de la composición de las ecuaciones de los que se ocupa la segunda parte de esta obra, aplicando el que dice: *que una ecuación de cualquier grado es igual al producto de las diferencias entre la incógnita y sus raíces.*

la primera ya vimos que corresponde al punto 0, la segunda $y=0$, $x=+10a$ es la que determina el punto I, $(y=0,\ x=-10a$ determina á I$')$. 4º, que adelante de I como $\sqrt{N}>48a^2$ el valor (2) es siempre imaginario y la parte HK se une en I con la rama simétrica que queda abajo de xx'.

Los puntos O, D, I se podrían determinar haciendo en la ecuación $x=0$ para averiguar las ordenadas de los puntos en que corta la curva al eje yy' é $y=0$ para determinar las abscisas de los puntos en que corta la curva al eje xx'.

6ª Por la forma de la curva hay indicio de que admite asíntotas rectilíneas; para corroborarlo recurriremos á las expresiones:

$$X=x-y\frac{dx}{dy},\quad Y=y-x\frac{dy}{dx}$$

que hechas las sustituciones y reducciones se cambian en:

$$X=\frac{50a^2x^2-48a^2y^2}{x^3-50a^2x},\quad Y=\frac{48a^2y^2-50a^2x^2}{y^3-48a^2y}$$

La primera toma la forma:

$$X=\frac{50\dfrac{a^2}{x}-48a^2\dfrac{y^2}{x^3}}{1-50\dfrac{a^2}{x^2}}$$

Como hay que suponer $x=\infty$, $y=\infty$, hay que averiguar el valor de $\frac{y^2}{x^3}$ en este caso al presentarse bajo la forma $\frac{\infty}{\infty}$; para ello habrá que aplicar el análisis del párrafo 187$'$, pero es más fácil proceder así:

$$\frac{y^2}{x^3}=\frac{48a^2\pm\sqrt{2304a^4-100a^2x^2+x^4}}{x^3}=\frac{48a^2}{x^3}\pm\sqrt{\frac{2304a^4}{x^6}-100\frac{a^2}{x^4}+\frac{1}{x^2}}\underset{(x=\infty)}{=0}$$

de consiguiente:

$$\underset{(x=\infty,\ y=\infty)}{X=0}$$

Análogamente se tendría para el valor de Y:

$$Y=\frac{\dfrac{48a^2}{y}-50a^2\dfrac{x^2}{y^3}}{1-48\dfrac{a^2}{y^2}}$$

y hay que analizar á $\frac{x^2}{y^3}$, bien aplicando lo dicho en el párrafo 187$'$, bien de la manera siguiente que es bastante sencilla:

$$\frac{x^2}{y^3}=\frac{50a^2\pm\sqrt{2500a^4+y^4-96a^2y^2}}{y^3}=\frac{50a^2}{y^3}\pm\sqrt{\frac{2500a^4}{y^6}+\frac{1}{y^2}-\frac{96a^2}{y^4}}\underset{(y=\infty)}{=0}$$

en el que para más rapidez preferimos expresar el resultado en función de y.

Así pues, el valor de Y será:

$$\underset{(x=\infty,\ y=\infty)}{Y=0}$$

Como X é Y son nulos, hay asíntotas que pasan por el origen y sólo falta averiguar su dirección para lo cual hay que tomar el límite de $\frac{dy}{dx}$ operando así:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^3-50\,a^2x}{y^3-48\,a^2y}=\frac{1-50\,\dfrac{a^2}{x^2}}{\dfrac{y^3}{x^3}-48\,a^2\,\dfrac{y}{x^3}}$$

y habrá que aplicar el raciocinio del párrafo 187′ para analizar $\frac{y^3}{x^3}$, $\frac{y}{x^3}$ ó proceder de un modo análogo al ya aplicado, con lo que se obtendrá por valor límite ± 1. De consiguiente conocido el coeficiente angular ± 1 y el lineal $Y=0$, las ecuaciones de las asíntotas serán: $y=+x$, $y=-x$, de suerte que cruzándose en el origen harán respectivamente ángulos de 45° y 135° con el eje xx'.

Hechas estas investigaciones preliminares originadas por el interés de la curva, pasemos al estudio de sus puntos singulares aplicando las teorías generales expuestas y enumerando metódicamente las conclusiones que se vayan deduciendo.

I. El primer coeficiente diferencial hemos visto que vale:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^3-50\,a^2x}{y^3-48\,a^2y}$$

deducido de la expresión: $(y^3-48\,a^2y)\frac{dy}{dx}+(500\,a^2x-x^3)=0$, analizaremos dos casos: cuándo puede ser nulo y cuándo puede ser infinito; para lo primero debe tenerse:

$$x^3-50\,a^2x=0$$

que se puede descomponer así: $x(x^2-50\,a^2)=0$ que á su vez da dos condiciones:

$$x=0,\quad x^2-50\,a^2=0$$

y esta última conduce á los valores $x=5\,a\sqrt{2}$, $x=-5\,a\sqrt{2}$, sustituyendo en la ecuación se obtiene:

$$x=\begin{cases}y=0\\ y=\pm\sqrt{96\,a^2},\end{cases}\quad x=5\,a\sqrt{2}\left\{\,y\text{ imaginario},\quad x=-5\,a\sqrt{2}\right\{\,y\text{ imaginario}$$

1º Vamos á irlos estudiando separadamente.

Los primeros valores $x=0$, $y=0$ dan $\frac{dy}{dx}=\frac{0}{0}$ y habrá que obtener el siguiente coeficiente diferencial que da:

$$(y^3-48\,a^2y)\frac{d^2y}{dx^2}+(3\,y^2-48\,a^2)\frac{dy^2}{dx^2}+(500\,a^2-3\,x^2)=0$$

que en virtud de la hipótesis hecha se reduce á:

$$-48\,a^2\frac{dy^2}{dx^2}+500\,a^2=0\quad\text{de donde}\quad\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{\frac{50}{48}}$$

puesto que $\frac{dy}{dx}$ admite dos valores; el punto O podrá ser un punto múltiple; para corroborarlo hagamos $x=0+h$, $x=0-h$, y resultarán para y tanto en uno como en otro caso cuatro valores reales que corresponden á otros tantos puntos de las dos ramas que allí se cruzan; luego el punto O es realmente múltiple del primer género.

Las dos tangentes hacen con el eje xx' ángulos cuyas tangentes trigonométricas tienen por valores:

$$\sqrt{\tfrac{50}{48}}=\tfrac{5}{4}\sqrt{\tfrac{2}{3}}=1{,}020\quad\text{y}\quad-\sqrt{\tfrac{50}{48}}=-\tfrac{5}{4}\sqrt{\tfrac{2}{3}}=-1{,}020$$

correspondientes el primero á un ángulo algo mayor de $45^\circ\,34'$ y el segundo al suplementario $134^\circ\,26'$.

Para acabar de conocer la forma de la curva en este punto, se necesita comparar el signo de la ordenada y el de $\frac{d^2y}{dx^2}$ antes y después de él; pero á causa de la extremada complicación del segundo coeficiente diferencial procederemos á encontrar el valor de éste del modo siguiente. La ecuación en que entra el coeficiente diferencial de tercer orden es en virtud de la hipótesis $x=0$, $y=0$:

$$-144\,\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}=0\quad\text{que conduce á tener:}\quad\frac{d^2y}{dx^2}=0$$

pues $\frac{dy}{dx}$ no es nulo. Siendo nulo el segundo coeficiente diferencial, buscaremos el tercero efectuando la nueva diferenciación en que entra el coeficiente diferencial de cuarto orden, cuya expresión en virtud de tenerse $x=0$, $y=0$, $\frac{d^2y}{dx^2}=0$, se reduce á:

$$-192\,a^2\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^3y}{dx^3}+6\,\frac{dy^4}{dx^4}-6=0$$

que da el valor:

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{\dfrac{dy^4}{dx^4}-1}{32\,a^2\dfrac{dy}{dx}}=\frac{\left(\dfrac{50}{48}\right)^2-1}{\pm 32\,a^2\sqrt{\dfrac{50}{48}}}$$

y la distancia entre la curva y la tangente contada en la ordenada correspondiente á la abscisa $x+h$ será (párrafo 192):

$$D=\pm\frac{\left(\dfrac{50}{48}\right)^2-1}{32\,a^2\sqrt{\dfrac{50}{48}}}\cdot\frac{h^3}{1.2.3}+\cdots\cdots$$

Traduciendo esta fórmula se concluye que: la rama tocada por la tangente OT que corresponde al valor positivo de $\frac{dy}{dx}$, está arriba de dicha tangente en la región de las abscisas positivas y abajo de dicha tangente en la de las abscisas negativas y lo contrario para con la rama correspondiente á OT′, en una palabra, que el punto O es de *inflexión*.

2º Los siguientes valores son: $x=0$, $y=\sqrt{96}\,a^2=\pm 4\,a\sqrt{6}$, sustituídos en $\frac{dy}{dx}$, lo hacen nulo; luego en los puntos DD′ que tienen dichas coordenadas, la tangente es paralela al eje xx'. Se averiguaría si había máximo ó mínimo sustituyendo las hipótesis $x=0$, $y=\pm 4\,a\sqrt{6}$, $\frac{dy}{dx}=0$ en el segundo coeficiente diferencial (párrafo 191′) que daría signo $-$ ó significación de máximo para el punto D y signo $+$ ó significación de mínimo (máximo negativo) para el punto D′.

3º Los valores siguientes $x=\pm 5\,a\sqrt{2}$ ni los analizamos, pues dan valores imaginarios para y, lo que es claro, pues $5\,a\sqrt{2}>6\,a$.

II. Analizando el caso en que $\frac{dy}{dx}$ pueda ser nulo, nos ocuparemos ahora de las deducciones á que da lugar la hipótesis de suponerlo infinito.