Para que sea infinito debe ser igual á cero el denominador de la fracción que lo expresa, es decir, debe tenerse:

$$y^3-48\,a^2\,y=0 \quad \text{que da} \quad \begin{cases} y=0 \\ y=\pm\sqrt{48\,a^2}=\pm 4\,a\sqrt{3} \end{cases}$$

el primer valor $y=0$ da para x los siguientes:

$$\begin{cases} x=0 \\ x=\pm 10\,a \end{cases}$$

el segundo $y=+4\,a\sqrt{3}$ da los valores:

$$\begin{cases} x=+8\,a \\ x=+6\,a \\ x=-6\,a \\ x=-8\,a \end{cases}$$

el tercero $y=-4\,a\sqrt{3}$ da los valores:

$$\begin{cases} x=+6\,a \\ x=+8\,a \\ x=-8\,a \\ x=-6\,a \end{cases}$$

ordenando estos resultados se tiene la tabla:

$$y=0\begin{cases} x=0 \\ x=\pm 10\,a, \end{cases} \quad y=+4\,a\sqrt{3}\begin{cases} x=+8\,a \\ x=+6\,a \\ x=-8\,a \\ x=-6\,a, \end{cases} \quad y=-4\,a\sqrt{3}\begin{cases} x=+8\,a \\ x=-8\,a \\ x=+6\,a \\ x=-6\,a \end{cases}$$

1º Los dos primeros valores indican aún el punto múltiple O.

2º Los valores $y=0$, $x=\pm 10\,a$ dan los puntos I, I′ en que la curva encuentra de nuevo al eje xx', sustituídos en $\frac{dy}{dx}$ lo reducen al ∞; luego en los puntos I, I′ hay una tangente vertical. Es conveniente que el lector haga la aplicación de lo expuesto en el párrafo 191′, considerando los puntos I, I′ como *máximos* respecto al eje yy'.

3º Los siguientes valores determinan los puntos H, F y análogos.

4º Los últimos, los análogos á los anteriores, pero que quedan abajo de xx'.

Estos dos últimos casos conducen á puntos mínimos respecto al eje yy' y en ellos la tangente es vertical; es conveniente que el lector ejecute la investigación del párrafo 191′.

II. Sea la ecuación $y=e^{\frac{1}{x}}$ que presenta un caso de punto de detención (fig. 21).

1º Si x crece de 0 á $+\infty$ y decrece de $+\infty$ á 1, lo que da la rama AB que tiene por asíntotas el eje de las y y una paralela al xx' cuya ecuación es $y=+1$.

Es conveniente que aplique el lector los métodos de investigación referentes al asintotismo (párrafo 196).

2º Si x decrece de 0 á $-\infty$, y crece de 0 á $+1$ y se obtiene la rama CD que se detiene bruscamente en el origen.

3º Si x varía de $-h$ á h, siendo h infinitamente pequeña, la función es discontinua, pasa bruscamente de un valor infinitamente pequeño 0 á uno infinitamente grande $+\infty$, para el valor $x=0$.

III. Analizar la ecuación:

$$y=2\pm\tfrac{1}{2}(x-1)\sqrt{9-(x-1)^2}$$

que representa el *lemniscato.*

IV. Estudiar la ecuación:

$$y^4-8\,y^2+x^4-10\,x^2+16=0$$

V. Discutir las ecuaciones:

$$y=\operatorname{sen} x, \quad y=\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} 2\,x$$

202. **Coordenadas polares.** Cuando en vez de emplear coordenadas cartesianas se emplean polares, varían las fórmulas. Sea (fig. 22) O el polo, $OM=r_0$ el radio vector inicial, $ON=r'$ otro cualquiera, r la expresión general de un radio vector variable, θ el ángulo NOM, μ' el OMN, μ el ángulo que la tangente á la curva en M forma con OM. Trazando con el centro O y el radio $r_0=OM$ el arco de círculo MA y después la tangente MA′ en M, el triángulo A′MN conduce á las relaciones:

$$\frac{A'M}{A'N}=\frac{\operatorname{sen} A'NM}{\operatorname{sen} A'MN} \quad \text{que se cambian en:} \quad \frac{r_0 \operatorname{tang}\theta}{A'N}=\frac{\operatorname{sen}(\mu'+\theta)}{\cos\mu'}$$

si para pasar al límite suponemos que N se vaya acercando á M tendiendo á confundirse con él, por r_0 puede en general ponerse r; tang θ se podrá sustituir por el arco $d\theta$, A′N vendrá á ser dr, sen $(\mu'+\theta)$ valdrá sen μ' ó bien sen μ, puesto que la secante MN ha venido á ser tangente, $\cos\mu'=\cos\mu$, de consiguiente la anterior expresión se cambiaría en:

$$\frac{r\,d\theta}{dr}=\operatorname{tang}\mu \quad \text{á la que puede darse la forma:} \quad \operatorname{tang}\mu=\frac{r}{\frac{dr}{d\theta}} \tag{316}$$

fórmulas que determinan el valor de la tangente del ángulo que la tangente á la curva forma con el radio vector en función de la derivada de la función que representa la curva en los dos casos de ser la variable independiente r ó θ.

Trazando por el polo una perpendicular al radio vector correspondiente á un punto elegido R, las partes de esta perpendicular comprendidas entre el origen y los puntos en que encuentra á la tangente y á la normal, son la subtangente y la subnormal.

De la fig. 23 se deduce:

$$S.T=r\operatorname{tang}\mu, \quad S.N=r\cot\mu \quad \text{ó bien} \quad S.T=\frac{r^2\,d\theta}{dr}, \quad S.N=\frac{dr}{d\theta} \tag{317}$$

y las longitudes de la tangente y de la normal serán:

$$T=\sqrt{r^2+S.T^2}=r\sqrt{1+r^2\frac{d\theta^2}{dr^2}}, \quad N=\sqrt{r^2+S.N^2}=\sqrt{r^2+\frac{dr^2}{d\theta^2}} \tag{318}$$

Referida una curva á coordenadas cartesianas, puede pasarse á las polares estando el polo en el origen, por medio de las ecuaciones:

$$x=r\cos\theta, \quad y=r\operatorname{sen}\theta \tag{319}$$

Aplicando á la expresión diferencial de un arco de curva estas fórmulas, resulta:

$$\mathrm{d}s=\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}=\sqrt{[\mathrm{d}r\cos\theta-r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{d}\theta]^2+[\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{d}r+r\cos\theta\,\mathrm{d}\theta]^2}$$

y reduciendo:

$$\mathrm{d}s=\sqrt{\mathrm{d}r^2+r^2\,\mathrm{d}\theta^2} \qquad (320)$$

las expresiones de T y de N pueden expresarse en función de $\mathrm{d}s$, y se tendrá:

$$\mathrm{T}=r\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r},\quad \mathrm{N}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta} \qquad (320')$$

El radio de curvatura tiene por expresión general:

$$\mathrm{R}=\frac{\left(1+\dfrac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}}=\frac{\dfrac{(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2)^{\frac{3}{2}}}{\mathrm{d}x^3}}{\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}}$$

Si consideramos á x como variable independiente (1) y á y como función de x, se tendrá llamando y', y'', etc., las derivadas de y en esta hipótesis:

$$\mathrm{d}y=y'\,\mathrm{d}x,\quad \mathrm{d}y'=y''\,\mathrm{d}x,\ \text{etc.} \qquad (321)$$

La primera de estas ecuaciones da: $y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ y aplicando á esta ecuación la regla de la diferenciación de un cociente sin considerar ya á $\mathrm{d}x$ como constante, es decir, como si y y x fuesen funciones de otra variable cualquiera, resulta:

$$\mathrm{d}y'=\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}^2y-\mathrm{d}y\,\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}x^2}$$

Pero en virtud de la segunda de las ecuaciones (321), se tendrá:

$$y''=\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}^2y-\mathrm{d}y\,\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}x^3} \qquad (321')$$

Finalmente:

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}^2y-\mathrm{d}y\,\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}x^3} \qquad (322)$$

(1) El resultado que va á deducirse, inmediatamente se podría escribir basándose en la teoría del "*Cambio de variables independientes*" que el "Cálculo" explica detalladamente.

El problema que da origen á la solución mencionada, supone la existencia de varias variables que dependen de una de ellas; puede elegirse por independiente ó de diferencial constante la que convenga, pero puede suceder que se reconozca más ventajoso elegir otra de las variables por independiente; en ese caso el problema por resolver es el siguiente: *Siendo* x *la variable que se ha elegido como independiente é* y *una de las otras variables que se consideran, expresar las derivadas*

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2},\ \frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3},\ \text{etc.},$$

*obtenidas en la hipótesis de d*x *constante en función de las diferenciales de* x *é* y, *consideradas como funciones de una misma variable independiente cualquiera.* Por el procedimiento que explicamos en el párrafo que ha originado esta nota se resuelve fácilmente este problema y se conocen las fórmulas finales. El "*Cambio de variable independiente*" conduce al "*Cambio total de variables*" y ambas teorías son fecundas en sus aplicaciones prácticas.

Sustituyendo en R y reduciendo queda:

$$\mathrm{R}=\frac{(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2)^{\frac{3}{2}}}{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}^2y-\mathrm{d}y\,\mathrm{d}^2x} \qquad (322')$$

en la que como se ve el objeto de la transformación ha sido expresar á $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ en función de las diferenciales de x y de y consideradas como funciones de una misma variable independiente cualquiera.

Por otra parte, de las fórmulas $x=r\cos\theta$, $y=r\,\mathrm{sen}\,\theta$, se deduce:

$$\mathrm{d}x=\mathrm{d}r\cos\theta-r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{d}\theta,\quad \mathrm{d}y=\mathrm{d}r\,\mathrm{sen}\,\theta+r\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$$

Diferenciando de nuevo y considerando á $\mathrm{d}\theta$ como constante:

$$\mathrm{d}^2x=\mathrm{d}^2r\cos\theta-2\,\mathrm{d}r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{d}\theta-r\cos\theta\,\mathrm{d}\theta^2$$
$$\mathrm{d}^2y=\mathrm{d}^2r\,\mathrm{sen}\,\theta+2\,\mathrm{d}r\cos\theta\,\mathrm{d}\theta-r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{d}\theta^2$$

Sustituyendo:

$$\mathrm{R}=\frac{(\mathrm{d}r^2+r^2\,\mathrm{d}\theta^2)^{\frac{3}{2}}}{-r\,\mathrm{d}^2r\,\mathrm{d}\theta+2\,\mathrm{d}r^2\,\mathrm{d}\theta+r^2\,\mathrm{d}\theta^3}=\frac{\left(r^2-\dfrac{\mathrm{d}r^2}{\mathrm{d}\theta^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{r^2+2\dfrac{\mathrm{d}r^2}{\mathrm{d}\theta^2}-r\dfrac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}\theta^2}} \qquad (323)$$

expresión de R en coordenadas polares.

Es á veces ventajoso expresar la fórmula mejor en función de las derivadas de $\frac{1}{r}$ que en función de las de r, entonces se tiene:

$$r=\frac{1}{\left(\frac{1}{r}\right)},\quad \mathrm{d}r=-\frac{\mathrm{d}\frac{1}{r}}{\left(\frac{1}{r}\right)^2},\quad \mathrm{d}^2r=-\frac{\mathrm{d}^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\left(\frac{1}{r}\right)^2}+\frac{2\left(\mathrm{d}\frac{1}{r}\right)^2}{\left(\frac{1}{r}\right)^3} \qquad (324)$$

resultará:

$$\mathrm{R}=\frac{\left[\dfrac{1}{r^2}+\left(\dfrac{\mathrm{d}\frac{1}{r}}{\mathrm{d}\theta}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{1}{r^3}\left(\dfrac{1}{r}+\dfrac{\mathrm{d}^2\frac{1}{r}}{\mathrm{d}\theta^2}\right)} \qquad (325)$$

APLICACIONES.

203. I. Aplicaremos los anteriores conceptos á la *espiral* que imaginó *Conon de Siracusa* y cuyas propiedades principales descubiertas por *Arquímedes* han hecho que se le denominase con el nombre de este geómetra. Su ecuación es $r=a\theta$.

Diferenciándola resulta: $\mathrm{d}r=a\,\mathrm{d}\theta$, luego se tendrá:

$$\mathrm{S.T}=\frac{r^2}{a}=r\theta,\quad \mathrm{S.N}=a,\quad \mathrm{T}=\frac{r}{a}\sqrt{r^2+a^2},\quad \mathrm{N}=\sqrt{r^2+a^2},\quad \mathrm{tang}\,\mu=\theta,\quad \mathrm{d}s=\mathrm{d}\theta\sqrt{a^2+r^2} \qquad (326)$$

II. La *espiral hiperbólica* cuya ecuación es: $r=\frac{a}{\theta}$ conducirá á las ecuaciones:

$$\mathrm{d}r=-\frac{a\,\mathrm{d}\theta}{r^2},\ \mathrm{S.T}=a,\ \mathrm{S.N}=-\frac{a}{\theta^2},\ \mathrm{T}=\frac{a}{\theta}\sqrt{1+\theta^2},\ \mathrm{N}=\frac{1}{\theta^2}\sqrt{1+\theta^2},\ \mathrm{tang}\,\mu=-\theta,\quad \mathrm{d}s=\frac{a}{\theta^2}\,\mathrm{d}\theta(1+\theta^2)^2 \qquad (327)$$

FUNCIONES PRIMITIVAS.

NOCIONES ELEMENTALES SOBRE LAS INTEGRALES.

204. Ya en el párrafo 132 hemos hecho observar que los orígenes del Cálculo Integral remontan hasta el gran geómetra de la antigüedad aunque vagos é indecisos, que este nuevo método quedó apenas á medio germinar y que sólo hasta después del advenimiento del memorable siglo XVI tomó en manos de J. Bernoulli (1667–1748) y de su insigne discípulo Euler (1707–1783) formas explícitas.

Los predecesores más inmediatos de estos dos matemáticos sólo se preocuparon de los problemas de cuadraturas, ya tomando por guía el método analítico de Descartes ó las investigaciones de Pascal, Fermat y Wallis, ya las raras veces que Newton se preocupó del problema, ó las más raras aún que Leibnitz le concedió atención. Entre los que siguieron el ejemplo de Bernoulli cabe mencionar á Mac-Laurin, Cotes, Fontaine, etc.; finalmente, la notable memoria de Euler "*Investigatio functionum ex data differentialium conditione*" publicada en 1762 en las Actas de la Academia de San Petersburgo, le ha valido el título de inventor del "Cálculo Integral."

El "*Cálculo Integral*" es inverso del "*Diferencial;*" éste, en su operación de análisis, deduce de la entidad el valor del elemento; aquél sintetiza los elementos para reconstituir la entidad, en otras palabras, de la diferencial propuesta averigua la forma de la función primitiva que la ha originado. Las nociones que á continuación pasamos á exponer sobre las *integrales* completan lo que hemos dicho sobre las funciones derivadas y sólo nos ocuparemos de las funciones de una variable.

Teoremas fundamentales.

205. Refiriéndonos á la figura 9 hemos hallado para expresión de la diferencial de la área de una curva plana y suponiendo ejes rectangulares:

$$\mathrm{d}u = y\,\mathrm{d}x \text{ ó bien } \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = y$$

desde luego concluimos que en general *la derivada de la área de una curva plana* (1) *es igual á la ordenada de la curva.*

Pasemos, pues, á valuar la área total comprendida entre el arco EM′, las ordenadas EQ, M′N′ y el eje OX, para lo cual dividiremos QN′ en n partes iguales ó desiguales; pero que sean infinitamente pequeñas cuando n es infinitamente grande, construiremos rectángulos análogos á los LDNN′, MM′NN′ y la área total cuya expresión se busca es en el límite la suma de un número infinito de partes infinitamente pequeñas tales como LM′NN′ y cuyo valor es $y\,\mathrm{d}x$; de consiguiente la área pedida tendrá por expresión:

$$\text{área } EM'QN' = u = \lim \sum_{x=OQ}^{x=ON'} y\,\Delta x \qquad (328)$$

(1) No debe olvidarse: 1º, que la área es la formada por el arco de la curva LM′, las ordenadas LN, M′N′ y el eje OX; 2º, que los ejes los suponemos rectangulares.

expresando la característica Σ la suma de elementos análogos al producto $y\,\Delta x$ contenidos en el intervalo comprendido entre los valores extremos de x que son OQ y ON′.

Como siempre se puede dividir la área por valuar en partes en las cuales la ordenada varíe siempre en el mismo sentido, el anterior razonamiento es general.

Si n crece sin fin, por la significación misma de las cantidades que entran en (328) resultará:

$$u = \mathop{\mathrm{S}}_{x=OQ}^{x=ON'} y\,\mathrm{d}x \qquad (329)$$

Siendo el signo S representativo de *suma integral* ó *integral* de los elementos diferenciales de la área u, Leibnitz lo ha transformado en el signo $\int$ que se lee *integral*, significando siempre, como su nombre lo expresa, *una suma, una integración, una síntesis* de elementos y se escribirá:

$$u = \int_{x=OQ}^{x=ON'} y\,\mathrm{d}x \text{ (1)} \qquad (330)$$

Como la curva tiene por ecuación $y = f(x)$, designando por x_0, x_1 las abscisas OQ, ON′, resultará:

$$u = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,\mathrm{d}x \qquad (331)$$

Esta integral comprendida entre los *límites* inferior $x_0 = OQ$ y superior $x_1 = ON'$ se llama *definida* por oposición á la *integral indefinida* cuya forma sería:

$$u = \int f(x)\,\mathrm{d}x \qquad (332)$$

Cuando sólo se fija el límite inferior, como por ejemplo:

$$u = \int_{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x \qquad (333)$$

se dice *integral tomada desde* x_0.

206. 1º Supuesta x continua entre x_0 y x_1, siempre hay una función cuya diferencial sea $f(x)\,\mathrm{d}x$ ó cuya derivada sea $f(x)$ siendo $f(x)$ función real de la variable independiente x, construyendo la curva $y = f(x)$; si se trazan las coordenadas correspondientes á las abscisas $x = OQ$ y otra abscisa variable x comprendida entre x_0 y x_1 (fig. 9) la área EQLN será una función F(x) cuya diferencial será $f(x)\,\mathrm{d}x$ ó su derivada $f(x)$ entre los límites tomados, de consiguiente: *el límite de la suma* $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,\mathrm{d}x$ *es una función de la variable x cuya diferencial es* $f(x)\,\mathrm{d}x$ *ó su derivada* $f(x)$ y podrá escribirse:

$$\mathrm{d}\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \mathrm{D}\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,\mathrm{d}x = f(x)$$

que también conduce á deducir que *los signos* d *y* S *superpuestos se destruyen.*

2º *Dada una función, su diferencial ó su derivada quedan determinadas completamente.*

El problema inverso admite una infinidad de soluciones, es decir, la *integral de una diferencial* $f(x)\,\mathrm{d}x$ *admite una infinidad de valores.*

En efecto, si varias expresiones tienen la misma parte variable y diversas constantes

(1) La notación de *Euler* es: $\int y\,\mathrm{d}x \left[\begin{matrix} x = OQ \\ x = ON' \end{matrix}\right]$, la de *Fourier* es: $\int_{OQ}^{ON'} y\,\mathrm{d}x$ que es la que se usa comunmente.

ligadas por suma ó resta, producen idéntica diferencial; hay, pues, que agregar en general una constante y se tendrá:

$$u=\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = F(x)+C \qquad (334)$$

y hasta ahora la integral es *indefinida;* para que sea *definida* determinaremos el valor de dicha constante y para esto procederemos de la manera siguiente:

Por lo común el mismo problema da á conocer el valor que adquiere $F(x)+C$ y que llamaremos X_0 para cierto valor x_0 de x; así pues, se tendrá:

$$X_0 = F(x_0)+C$$

de donde resulta:

$$C = X_0 - F(x_0)$$

y sustituyendo en (334):

$$u=\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = F(x)+X_0-F(x_0) \qquad (335)$$

Comunmente dicho valor X_0 es 0, es decir, que se adopta la condición de que para el valor de la variable igual al límite inferior, la integral es nula y entonces:

$$u=\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = F(x)-F(x_0) \qquad (336)$$

que será expresión de una área EQMN contada desde una abscisa fija $x_0 = OQ$ hasta una abscisa variable $x = ON$; si se da á esto el valor determinado $x_1 = ON'$, resultará:

$$u = F(x_1) - F(x_0)$$

valor de la área EQM'N' perfectamente definida.

En este segundo supuesto el orden como se efectúan las operaciones prácticamente es el que sigue:

La ecuación propuesta es:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = F(x)+C$$

Como para el límite inferior la integral es nula, se tiene:

$$0 = F(x_0)+C \quad \text{ó bien} \quad C = -F(x_0)$$

Sustituyendo:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = F(x)-F(x_0)$$

y poniendo por x el límite superior x_1, quedará finalmente:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = F(x_1)-F(x_0) \qquad (337)$$

Así pues: *la integral definida de la diferencial* $f(x)\,dx$ *tomada desde* x_0 *hasta* x_1 *es el límite hacia el cual tiende la suma de los valores de la diferencial* $f(x)\,\Delta x$ *ó* $f(x)\,dx$ *cuando* x *varía de una manera continua, es decir, tomando incrementos infinitamente pequeños en el intervalo considerado y la forma final de dicha integral definida equivale á sustituir en la integral indefinida* $F(x)$ *por* x *los dos límites* (x_0, x_1) *y restar el resultado correspondiente á* x_0, $F(x_0)$ *del correspondiente á* x_1, $F(x)$ *lo que dará:* $F(x_1)-F(x_0)$.

3º Como se tiene:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = F(x_1)-F(x_0) = -[F(x_0)-F(x_1)] = -\int_{x_1}^{x_0} f(x)\,dx \qquad (337')$$

se deduce: *que la inversión en el orden de los límites equivale á un cambio de signo en el valor final de la integral definida.*

4º Puede la curva afectar la forma ABCDE (fig. 24) teniendo dos partes positivas AQB y DEP y una negativa BCD, la área total desde $OQ = x_0$ hasta $OP = x_1$ valdrá $ABQ - BCD + DEP$ y siempre estará representada por:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = F(x_1)-F(x_0)$$

pudiendo ser nula si BCD iguala en valor absoluto á $ABQ + DEP$ y vemos *que una integral puede presentar elementos negativos.*

5º *Quedando finita y continua la derivada* $f(x)$ *de* $F(x)$ *cuando* x *varíe de* x_0 *á* x_1, *de* x_1 *á* x_2, ..., *de* x_{n-1} *á* x_n *se tendrá:*

$$F(x_n)-F(x_0) = [F(x_1)-F(x_0)]+[F(x_2)-F(x_1)]+\ldots\ldots+[F(x_n)-F(x_{n-1})]$$

es decir:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \ldots\ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx \qquad (338)$$

que subsiste aun cuando los límites no están colocados en orden de magnitud.

6º *Si* $f(x)$ *y* $\varphi(x)$ *son funciones continuas para valores de* x *comprendidos entre* x_0 *y* $x_1 > x_0$, *teniéndose siempre en este intervalo* $f(x) > \varphi(x)$, *resultará:*

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx > \int_{x_0}^{x_1} \varphi(x)\,dx \qquad (339)$$

Las dos integrales definidas son límites de sumas, y como cada elemento diferencial de la primera suma es mayor por hipótesis que el elemento diferencial correspondiente de la segunda, la anterior desigualdad es evidente.

Si pues $f(x)$ permanece comprendida entre otras dos funciones $\psi(x)$ y $\varphi(x)$ en el intervalo (x_0, x_1) siendo continuas estas funciones en dicho intervalo, resultará:

$$\int_{x_0}^{x_1} \psi(x)\,dx > \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx > \int_{x_0}^{x_1} \varphi(x)\,dx \qquad (340)$$

y si no se sabe integrar $f(x)\,dx$ y sí se puede hacerlo con las otras dos funciones, se tendrán así dos límites para la integral desconocida. (Comberousse.)

Procedimientos de integración.

207. Comprendidas las nociones que acaban de explicarse, vamos ahora á exponer algunos métodos elementales de integración que son de uso frecuente y cuyos fundamentos no requieren para su inteligencia sino los conocimientos hasta ahora aprendidos, y para seguir un plan lógico comenzaremos por analizar ciertos tipos de integración que inmediatamente resultan, recordando las formas de las diferenciales de las diversas especies de funciones.