208. Antes de entrar en el detalle de los métodos que tratamos de exponer, vamos á demostrar algunos teoremas que pueden considerarse como fundamentales para las operaciones de transformación y descomposición.

I. *A voluntad puede hacerse salir un factor constante del signo* $\int$ *ó introducirlo bajo dicho signo.*

Puesto que todo factor constante no sufre variación en la diferenciación y dos funciones que tienen igual diferencial sólo pueden diferir por una constante *adicional*, se tiene evidentemente:

$$\int a f(x)\,\mathrm{d}x = a\int f(x)\,\mathrm{d}x \tag{341}$$

y en general:

$$\int_{x_0}^{x_1} a f(x)\,\mathrm{d}x = a\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{342}$$

II. *La integral de una suma algebraica de diferenciales es igual á la suma de las integrales de estas diferenciales.*

Siendo u, v, w, ..., funciones de x, se tiene:

$$\mathrm{d}(u+v-w+\ldots\ldots) = \mathrm{d}u + \mathrm{d}v - \mathrm{d}w + \ldots\ldots$$

luego:

$$\int \mathrm{d}(u+v-w+\ldots\ldots) = \int \mathrm{d}u + \int \mathrm{d}v - \int \mathrm{d}w + \ldots\ldots$$

pues los dos miembros de esta ecuación tienen la misma diferencial y cada integral indefinida entraña consigo una constante arbitraria *adicional.*

En general:

$$\int_{x_0}^{x_1} \mathrm{d}(u+v-w+\ldots\ldots) = \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{d}u + \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{d}v - \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{d}w + \ldots\ldots$$

209. El teorema I es muy fecundo en sus aplicaciones, pues á menudo basta efectuar la *multiplicación ó división* por un factor constante para dar á la cantidad afectada del signo $\int$ la forma de una diferencial conocida no teniendo ya sino que *dividir ó multiplicar* por dicho factor para que no haya alteración.

1º Por ejemplo sea:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int x^m\,\mathrm{d}x$$

la expresión $x^m\,\mathrm{d}x$ no es diferencial conocida, pero si la multiplicamos por $m+1$, el resultado $(m+1)x^m\,\mathrm{d}x$ es justamente la diferencial de x^{m+1}; así pues, multiplicando y dividiendo para que no haya alteración, tendremos:

$$\int x^m\,\mathrm{d}x = \int \frac{m+1}{m+1} x^m\,\mathrm{d}x = \frac{1}{m+1}\int (m+1)x^m\,\mathrm{d}x = \frac{x^{m+1}}{m+1} + \mathrm{C}$$

Hay, pues, que aumentar en una unidad el exponente m y dividir por el exponente así modificado, añadiendo luego la constante.

Hay, sin embargo, una restricción; si el exponente m vale -1, se tiene entonces:

$$\int x^m\,\mathrm{d}x = \int x^{-1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{1}{0} + \mathrm{C}$$

Siendo C una constante arbitraria, podemos restar $\frac{1}{m+1}$ de la forma general del segundo miembro de esta ecuación y escribir:

$$\int x^m\,\mathrm{d}x = \frac{x^{m+1}-1}{m+1} + \mathrm{C}$$

Para $m=-1$, la fracción del segundo miembro toma la forma $\frac{0}{0}$ y aplicándole la regla de l'Hôspital (párrafo 187′) considerando á m como variable, resulta:

$$\frac{x^{m+1}\,\mathrm{l}\,x}{1} = \mathrm{l}\,x \quad (m=-1)$$

Así pues:

$$\int x^m\,\mathrm{d}x = \int x^{-1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \mathrm{l}\,x + \mathrm{C}$$

conclusión evidente, pues evidentemente $\frac{\mathrm{d}x}{x}$ es la diferencial de $\mathrm{l}\,x + \mathrm{C}$ (párrafo 150).

2º De un modo análogo se tendrá sucesivamente en este segundo ejemplo:

$$\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{\log e}{\log a}\int \frac{\log a}{\log e} a^x\,\mathrm{d}x = \frac{\log e}{\log a} a^x + \mathrm{C}$$

Vemos que al multiplicar y dividir tanto por $\log e$ como por $\log a$, no ha habido alteración y á la vez hemos llegado á un tipo conocido de diferencial como es $\frac{\log a}{\log e} a^x\,\mathrm{d}x$ (párrafo 152).

3º Por último, aplicando el teorema I en combinación con el II y recordando lo dicho en el primer ejemplo, se tendrá:

$$\begin{aligned}\int (3x^3+5x^2-2x+2)\,\mathrm{d}x &= \int 3x^3\,\mathrm{d}x + \int 5x^2\,\mathrm{d}x - \int 2x\,\mathrm{d}x + \int 2\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{3x^4}{4} + \frac{5x^3}{3} - x^2 + 2x + \mathrm{C}\end{aligned}$$

Como ejercicio halle el lector la forma del resultado; en el caso de tenerse:

$$\int_{x_0}^{x_1} (3x^3+5x^2-2x+2)\,\mathrm{d}x$$

Integración inmediata.

210. Recordando las formas de las diferenciales de las diversas funciones y lo dicho en los párrafos 208, etc., evidentemente tendremos:

$$\int \pm\,\mathrm{d}x = \pm\int \mathrm{d}x = \pm x + \mathrm{C} \tag{343}$$

$$\int a\,\mathrm{d}x = ax + \mathrm{C} \tag{344}$$

$$\int \frac{-a\,\mathrm{d}x}{x^2} = \frac{a}{x} + \mathrm{C} \tag{345}$$

$$\int m x^{m-1}\,\mathrm{d}x = x^m + \mathrm{C} \tag{346}$$

$$\int x^m\,\mathrm{d}x = \frac{x^{m+1}}{m+1} + \mathrm{C} \tag{347}$$

(Excepto cuando $m=-1$.)

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{m\sqrt[m]{x^{m-1}}} = \sqrt[m]{x} + \mathrm{C} \qquad (348)$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[m]{x^{m-1}}} = m\sqrt[m]{x} + \mathrm{C} \qquad (349)$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \mathrm{C} \qquad (350)$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\log x}{\log e} + \mathrm{C} = \mathrm{l}\, x + \mathrm{C} \qquad (351)$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\,\mathrm{l}\,\frac{x-a}{x+a} + \mathrm{C} \qquad (352)$$

$$\int a^x \frac{\log a}{\log e}\,\mathrm{d}x = a^x + \mathrm{C} \qquad (353)$$

$$\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{\log e}{\log a}\,a^x + \mathrm{C} = \frac{a^x}{\mathrm{l}\,a} + \mathrm{C} \qquad (354)$$

$$\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + \mathrm{C} \qquad (355)$$

$$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \operatorname{sen} x + \mathrm{C} \qquad (356)$$

$$\int \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x = -\cos x + \mathrm{C} \qquad (357)$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \operatorname{tang} x + \mathrm{C} \qquad (358)$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{sen}^2 x} = -\cot x + \mathrm{C} \qquad (359)$$

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \operatorname{tang} x \sec x\,\mathrm{d}x = \sec x + \mathrm{C} \qquad (360)$$

$$\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \cot x \operatorname{cosec} x\,\mathrm{d}x = -\operatorname{cosec} x + \mathrm{C} \qquad (361)$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arc}\left(\operatorname{sen} = \frac{x}{a}\right) + \mathrm{C} \qquad (362)$$

$$\int -\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arc}\left(\cos = \frac{x}{a}\right) + \mathrm{C} \qquad (363)$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{x}{a}\right) + \mathrm{C} \qquad (364)$$

$$\int -\frac{\mathrm{d}x}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arc}\left(\cot = \frac{x}{a}\right) + \mathrm{C} \qquad (365)$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\operatorname{arc}\left(\sec = \frac{x}{a}\right) + \mathrm{C} \qquad (366)$$

$$\int -\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\operatorname{arc}\left(\operatorname{cosec} = \frac{x}{a}\right) + \mathrm{C} \qquad (367)$$

$$\int \cot x\,\mathrm{d}x = \mathrm{l}\operatorname{sen} x + \mathrm{C} \qquad (368)$$

$$\int -\operatorname{tang} x\,\mathrm{d}x = \mathrm{l}\cos x + \mathrm{C} \qquad (369)$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{sen} x \cos x} = \mathrm{l}\operatorname{tang} x + \mathrm{C} \qquad (370)$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{sen} x} = \mathrm{l}\operatorname{tang}\frac{x}{2} + \mathrm{C} \qquad (371)$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \mathrm{l}\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + \mathrm{C} \qquad (372)$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \mathrm{l}\,\frac{\sqrt{x^2 \pm a^2} + x}{a} + \mathrm{C} \qquad (373)$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \frac{1}{a}\,\mathrm{l}\,\frac{x}{\sqrt{a^2 \pm x^2} + a} + \mathrm{C} \qquad (374)$$

$$\int (\mathrm{d}u + \mathrm{d}v - \mathrm{d}w + \ldots\ldots) = \int \mathrm{d}u + \int \mathrm{d}v - \int \mathrm{d}w + \ldots\ldots \qquad (375)$$

211. Aplicando dichas fórmulas á algunos casos, se tendrá:

1º $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x} = \mathrm{l}\,b - \mathrm{l}\,a = \mathrm{l}\,\frac{b}{a}$

2º $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen} 0 = 1$

3º $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \operatorname{tang}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tang}\frac{\pi}{6} = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$

4º $\int_{-1}^{+1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc}(\operatorname{sen} = x) + \mathrm{C} = \operatorname{arc}(\operatorname{sen} = 1) - \operatorname{arc}(\operatorname{sen} = -1)$

Como á un mismo seno x, corresponden una infinidad de arcos comprendidos en las fórmulas:

$$2k\pi + x, \quad (2k+1)\pi - x$$

siendo k un número entero cualquiera, los términos $\operatorname{arc}(\operatorname{sen} = 1)$ y $\operatorname{arc}(\operatorname{sen} = -1)$ tomados separadamente son indeterminados, pero vamos á ver que su diferencia no lo es. Los dos arcos mencionados pueden corresponder á la primera ó á la segunda ó á las dos fórmulas que hemos citado; como el resultado es el mismo, supongamos que corresponden á la primera fórmula y tendremos:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc}(\operatorname{sen} = 1) - \operatorname{arc}(\operatorname{sen} = -1) = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - \left(2k\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

EJEMPLOS.

212. 1º $\int (5x^4 + 7x^3 - x^2 + x + 1)\,\mathrm{d}x = x^5 + 7\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + \mathrm{C}$

2º $\int \frac{\mathrm{d}x}{x+a} = \mathrm{l}(x+a) + \mathrm{C}$

3º $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\,\mathrm{l}\,x} = \mathrm{l}\,\mathrm{l}\,x + \mathrm{C}$

4º $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+a)^p} = \int (x+a)^{-p}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{(p-1)(x+a)^{p-1}} + \mathrm{C}$

5º $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2 + a^2} = \frac{1}{2}\int \frac{2x\,\mathrm{d}x}{x^2 + a^2} = \frac{1}{2}\,\mathrm{l}(x^2 + a^2) + \mathrm{C}$

6º $\int \frac{\mathrm{l}\,x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2\,\mathrm{l}\,x\,\mathrm{d}x}{x} = \frac{1}{2}(\mathrm{l}\,x)^2 + \mathrm{C}$

7º $\int \frac{x^2-2x+5}{x-1}\,\mathrm{d}x=\int\left(x^2+x-1+\frac{4}{x-1}\right)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x+4\,\mathrm{l}(x-1)+C$

8º $\int \mathrm{sen}^2 x\,\mathrm{d}x=\int\frac{1-\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x=\frac{x}{2}-\frac{\mathrm{sen}\,2x}{4}+C$

9º $\int\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{sen}^2 x\cos^2 x}=\int\frac{(\mathrm{sen}^2 x+\cos^2 x)\,\mathrm{d}x}{\mathrm{sen}^2 x\cos^2 x}=\mathrm{tang}\,x-\cot x+C$

10º $\int\frac{\mathrm{d}x}{a^2-b^2x^2}=\int\frac{\mathrm{d}x}{(a+bx)(a-bx)}=\frac{1}{2a}\int\frac{(a-bx)+(a+bx)}{(a-bx)(a+bx)}\,\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2a}\,\mathrm{l}\,\frac{a+bx}{a-bx}+C$$

11º $\int\frac{x^3\,\mathrm{d}x}{5}=\frac{x^4}{20}+C$

12º $\int-\frac{3a}{4x^3}=\frac{3a}{8x^2}+C$

13º $\int\frac{2m\,\mathrm{d}x}{a\sqrt{x}}=\frac{4m\sqrt{x}}{a}+C$

14º $-\frac{a}{b}\int x^{\frac{m}{n}-1}\,\mathrm{d}x=\frac{an}{bm}\sqrt[n]{x^m}+C$

15º Siendo $y^2=2px$ la ecuación de una parábola, integrar la expresión $\int_a^m y\,\mathrm{d}x$, superficie de un trapecio parabólico limitado por las ordenadas correspondientes á las abscisas m y a.

$$\int_a^m y\,\mathrm{d}x=\int_a^m\sqrt{2px}\,\mathrm{d}x=\tfrac{2}{3}\sqrt{2px^3}+C=\tfrac{2}{3}\sqrt{2p}\,(m\sqrt{m}-a\sqrt{a})$$

16º $y=\int-\frac{mx\,\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}=m\sqrt{a^2-x^2}+C$

si m tiene el valor particular $\pm\frac{b}{a}$, el resultado sería $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ ecuación de la elipse, lo que debía suceder por la forma de la ecuación inicial.

17º $\int_a^x\frac{mx-2nx^3}{\sqrt{mx^2-nx^4}}\,\mathrm{d}x=\sqrt{mx^2-nx^4}-\sqrt{ma^2-na^4}$

18º *Dada la recta* $\mathrm{y}=\mathrm{a}\mathrm{x}+\mathrm{b}$, *¿cuál es la expresión de la superficie comprendida entre ella, el eje de las abscisas y dos ordenadas* n *y* q *correspondientes á* $\mathrm{x}=\mathrm{m}$, $\mathrm{x}=\mathrm{p}$?

$$\int_p^m(ax+b)\,\mathrm{d}x=\tfrac{1}{2}a(m^2-p^2)+b(m-p)=[\tfrac{1}{2}a(m-p)+b](m-p)=\tfrac{1}{2}(m-p)(n+q)$$

expresión de la área de un trapècio.

19º $\int_a^{3cd}\frac{4bc^2\,\mathrm{d}x}{ad\sqrt{x}}=8bc^2\left(\frac{1}{a}\sqrt{\frac{3c}{d}}+\frac{1}{d}\cdot\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$

20º $\int_m^a\frac{5x^3-4x}{b}=\frac{1}{b}\left\{(a+m)(a-m)\left[\tfrac{5}{4}(a^2+m^2)-2\right)\right]\right\}$

21º *Hallar la ecuación diferencial de la recta y deducir de ella su ecuación general.*

Como $\frac{dy}{dx}$ es la expresión de la tangente trigonométrica que la tangente á una curva hace con el eje de las abscisas y los puntos de una recta guardan la misma dirección, $\frac{dy}{dx}$ es constante $=a$, luego $\frac{dy}{dx}=a$.

Así pues:

$$\mathrm{d}y=a\,\mathrm{d}x,\quad\int\mathrm{d}y=y=\int a\,\mathrm{d}x=ax+C$$

Supongamos que para $x=0$, y es igual con b, entonces $b=0+C$; luego $y=ax+b$.

22º $\int-\frac{ax\,\mathrm{d}x}{b(m^2-x^2)}=\frac{a}{2b}\,\mathrm{L}\,(m^2-x^2)+C$

23º $\int-\frac{a\,\mathrm{d}x}{b\cos^2 x}=-\frac{a}{b}\,\mathrm{tang}\,x+C$

24º $\int\frac{m\,\mathrm{sen}\,cx\,\mathrm{d}x}{a}=-\frac{m}{ac}\cos cx+C$

25º $\int\frac{a\,\mathrm{d}x}{\mathrm{sen}^2(b-x)}=a\,\mathrm{cotang}\,(b-x)+C$

26º $\int a\,\mathrm{sen}^m x\cos x\,\mathrm{d}x=a\int\mathrm{sen}^m x\,\mathrm{d}\,\mathrm{sen}\,x=\frac{a}{m+1}\,\mathrm{sen}^{m+1}x+C$

27º $\int a\cos^m x\,\mathrm{sen}\,x\,\mathrm{d}x=-a\int\cos^m x\,\mathrm{d}x\cos x=-\frac{a}{m+1}\cos x^{m+1}+C$

Si las anteriores integrales se nulifican con x, se tiene:

$$\int a\,\mathrm{sen}^m x\cos x\,\mathrm{d}x=\frac{a}{m+1}\,\mathrm{sen}^{m+1}x,\quad\int a\cos^m x\,\mathrm{sen}\,x\,\mathrm{d}x=-\frac{a}{m+1}\cos^{m+1}x+\frac{a}{m+1}$$

28º $\int\frac{a\,\mathrm{d}x}{\sqrt{b^2-c^2x^2}}=\frac{a}{c}\,\mathrm{arc}\left(\mathrm{sen}=\frac{cx}{b}\right)+C$

29º $\int\frac{a\,\mathrm{d}x}{b^2+c^2x^2}=\frac{a}{c}\,\mathrm{arc}\left(\mathrm{tang}=\frac{cx}{b}\right)+C$

30º $\int\frac{a\,\mathrm{d}x}{x\sqrt{c^2x^2-b^2}}=\frac{a}{c}\,\mathrm{arc}\left(\sec=\frac{cx}{b}\right)+C$

31. Integrar la expresión $-p\pi x^2\,\mathrm{d}z=2\pi rx\,\mathrm{d}x$, que da:

$$-\frac{p\,\mathrm{d}z}{2r}=\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

Integrando:

$$-\frac{pz}{2r}=\mathrm{L}x+C$$

Si para $x=x_0$ la integral es nula:

$$0=\mathrm{L}x_0+C\ \text{ de donde }\ C=-\mathrm{L}x_0,\qquad-\frac{pz}{2r}=\mathrm{L}\frac{x}{x_0}$$

Pasando á los números:

$$x=x_0e^{-\frac{pz}{2r}}$$

ecuación de una *logarítmica*.

* 32º Integrar:

$$t=\int\mathrm{d}t=\int-\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(b-x)x}}=-\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\,\mathrm{arc}\left(\mathrm{sen\ ver}=\frac{2x}{b}\right)+C$$

$$t=-\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\,\mathrm{arc}\left(\cos=1-\frac{2x}{b}\right)+C=-\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\,\mathrm{arc}\left(\cos=\frac{b-2x}{b}\right)+C$$

Si los límites son $x=b$ á $x=0$:

$$t=-\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\,\text{arc}\,(\cos=+1)+\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\,\text{arc}\,(\cos=-1)$$
$$=\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\,[\text{arc}\,(\cos=-1)-\text{arc}\,(\cos=+1)]$$
$$=\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\,[\pi-0]=\tfrac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Duplicando este valor:

$$2t=\mathrm{T}=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

fórmula usada en Mecánica y en Física para el movimiento del péndulo simple, siendo l la longitud del péndulo, g la intensidad de la pesantez, $\pi=180°$, T el tiempo de una oscilación, t el tiempo de media oscilación.

* 33º Integrar:

$$\mathrm{X}=\frac{\int_0^h pz\,\mathrm{d}z\left(\text{tang}\frac{\alpha-\varepsilon}{2}+\text{tang}\,\varepsilon\right)^2\cos\varepsilon\,\frac{h-z}{\cos\varepsilon}}{p\frac{h^2}{2}\left(\text{tang}\frac{\alpha-\varepsilon}{2}+\text{tang}\,\varepsilon\right)^2\cos\varepsilon}=\frac{\int_0^h\frac{pz\,\mathrm{d}z\,(h-z)}{\cos\varepsilon}}{p\frac{h^2}{2}}$$
$$=\frac{\int_0^h 2pz\,\mathrm{d}z\,(h-z)}{ph^2\cos\varepsilon}=\frac{\int_0^h 2z\,\mathrm{d}z\,(h-z)}{h^2\cos\varepsilon}=\frac{1}{h^2\cos\varepsilon}\left(h\int_0^h 2z\,\mathrm{d}z-\int_0^h 2z^2\,\mathrm{d}z\right)$$
$$=\frac{1}{h^2\cos\varepsilon}\left(\frac{2h^3}{2}-\frac{2h^3}{3}\right)=\frac{1}{h^2\cos\varepsilon}\left(\frac{3h^3-2h^3}{3}\right)=\frac{h^3}{3h^2\cos\varepsilon}=\frac{h}{3\cos\varepsilon}$$

fórmula usada en *Mecánica aplicada* para calcular la distancia (respecto á la base) donde se aplica la presión de un macizo de tierra en un muro en talud.

34º $y=\int[\text{cotang}\,(a+x)+\text{tang}\,x]\,\mathrm{d}x=\int\frac{\cos(a+x)\,\mathrm{d}x}{\text{sen}\,(a+x)}+\int\frac{\text{sen}\,x\,\mathrm{d}x}{\cos x}$

$y=\mathrm{L}\,\text{sen}\,(a+x)-\mathrm{L}\cos x+\mathrm{C}$

Suponiendo que la integral es nula con x:

$$0=\mathrm{L}\,\text{sen}\,a+\mathrm{C}\quad\text{de donde}\quad y=\mathrm{L}\,\text{sen}\,(a+x)-\mathrm{L}\cos x-\mathrm{L}\,\text{sen}\,a,\quad y=\mathrm{L}\frac{\text{sen}\,(a+x)}{\text{sen}\,a\cos x}$$

35º $y=\int\text{sen}^m x\cos^n x\,\mathrm{d}x$, puede resolverse suponiendo:

$$u=\cos x,\quad \text{sen}\,x=\sqrt{1-u^2},\quad \mathrm{d}u=-\text{sen}\,x\,\mathrm{d}x=-\sqrt{1-u^2}\,\mathrm{d}x$$

Sustituyendo en dy:

$$\mathrm{d}y=-u^n(1-u^2)^{\frac{1}{2}(m-1)}\,\mathrm{d}u$$

Si m es impar, $\frac{1}{2}(m-1)$ es entero y la integración será fácil.

Si m es par, como es fraccionario el exponente del binomio, es sencillo proceder así directamente sobre la función primera:

$$\mathrm{d}y=(1-\cos^2 x)^{\frac{1}{2}m}\cos^n x\,\mathrm{d}x$$

Como $\frac{1}{2}m$ es entero, el desarrollo de las operaciones da términos de la forma $\cos^k x\,\mathrm{d}x$ que sabemos integrar.

36º $\int\frac{m\,\mathrm{d}x}{a\sqrt{2rx-x^2}}=\frac{m}{a}\,\text{arc}\left(\text{sen ver}=\frac{x}{r}\right)$

Integración por sustitución.

213. Este método de frecuente y á menudo ventajosa aplicación, estriba en sustituir por la incógnita otra función de una nueva incógnita que reduzca á una forma inmediatamente integrable la forma primitiva que sin esta transformación no sería integrable tan fácilmente.

Supongamos que la expresión diferencial $f(x)\,\mathrm{d}x$ no sea inmediatamente integrable y que x se exprese en función de una nueva variable u, se tendrá:

$$x=\varphi(u)\quad\text{y de consiguiente}\quad \mathrm{d}x=\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$$

Sustituyendo:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}u=\int f[\varphi(u)]\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u=\int\mathrm{F}(u)\,\mathrm{d}u$$

y si la integral definitiva puede resolverse inmediatamente apelando á uno de los tipos conocidos, ó si cuando menos es de más fácil resolución que la primera, habrá ventaja, como se comprende, en emplear este método de *sustitución*, no restando ya sino expresar en el valor que se obtenga para la última integral á u en función de x.

Si la primera integral debe tomarse entre los límites x_0 y x_1, la segunda se tomará entre los correspondientes t_0 y t_1.

APLICACIONES.

214. 1ª Sea

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

Supongamos que
~~Como~~ no es tipo conocido esta integral, pondremos:

$$x=au,\quad \mathrm{d}x=a\,\mathrm{d}u$$

y se tendrá:

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int\frac{a\,\mathrm{d}u}{\sqrt{a^2(1-u^2)}}=\int\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}=\text{arc}\,(\text{sen}=u)+\mathrm{C}=\text{arc}\left(\text{sen}=\frac{x}{a}\right)+\mathrm{C}$$

Como vemos, valiéndonos del método de integración por sustitución, hemos podido resolver con facilidad la integral propuesta.

2ª Sea

$$y=\int a\,\text{tang}^2 x\,\text{sen}\,x\,\mathrm{d}x=a\int\frac{\text{sen}^3 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=a\int-\frac{(1-u^2)^{\frac{3}{2}}}{u^2(1-u^2)^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}u=-a\int\frac{1-u^2}{u^2}\,\mathrm{d}u$$
$$=\frac{a}{u}+au+\mathrm{C}=\frac{a(1+\cos^2 x)}{\cos x}+\mathrm{C}$$

poniendo $\cos x=u$.