Nota. El teorema es aplicable cuando $f(x)$ es infinito para $x=x_0$, pues basta efectuar una permutación de límites. (Serret.)

## EJEMPLOS.

221. 1º Sea

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{en la que} \quad f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (1-x)^{\frac{1}{2}}f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

valor $<1$, pues $x$ es positivo; luego la integral tendrá un valor finito. Esta conclusión debía esperarse, pues dicha integral tiene por valor arc (sen $=x$) cuando $x=1$, es decir, su valor es $\frac{\pi}{2}$.

2º Sea

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2} \quad \text{en la que se tiene} \quad f(x)=\frac{1}{1-x^2} \quad \text{y} \quad (1-x)f(x)=\frac{1}{1+x}$$

valor $>\frac{1}{2}$ para valores de $x$ comprendidos entre 0 y 1; luego la integral propuesta es infinita.

Ya sabíamos (párrafo 210, fórmula 352) que:

$$\int_0^x \frac{dx}{1-x^2}=1\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

de modo que la propuesta es el valor de esta última para $x=1$, que en efecto vemos que es el $\infty$.

222. La función colocada bajo el signo $\int$ es infinita entre los límites de la integración. Cuando la función $f(x)$ es infinita para un valor X de $x$ comprendido entre $x_0$ y $x_1>x_0$, la integral

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx$$

debe verse como el límite al que tiende la suma

$$\int_{x_0}^{X-\varepsilon} f(x)\,dx+\int_{X+\eta}^{x_1} f(x)\,dx \qquad (380')$$

cuando $\varepsilon$ y $\eta$ infinitamente pequeños sin ninguna correlación tienden á cero, dicha integral puede ser finita y determinada ó infinita ó indeterminada.

Sea por ejemplo la integral:

$$\int_{-x_0}^{+x_1} \frac{dx}{x^n}$$

siendo $x_0$ y $x_1$ números positivos, y $n$ un exponente comprendido entre 0 y 1 y de la forma $\frac{2\mu+1}{2\nu+1}$ siendo $\mu$ y $\nu$ números enteros, se tendrá:

$$\int_{-x_0}^{+x_1} \frac{dx}{x^n}=\text{lím}\left(\int_{-x_0}^{0-\varepsilon} \frac{dx}{x^n}+\int_{0+\eta}^{+x_1} \frac{dx}{x^n}\right)=\text{lím}\left(\frac{\varepsilon^{1-n}-x_0^{1-n}+x_1^{1-n}-\eta^{1-n}}{1-n}\right)$$
$$=\frac{x_1^{1-n}-x_0^{1-n}}{1-n}$$

pues $\varepsilon^{1-n}$ y $\eta^{1-n}$ se anulan en el límite; así pues, la integral admite el valor *finito* y *determinado* que acaba de obtenerse. Si $n$ es de la forma $\frac{2\mu}{2\nu+1}$ siendo $\mu$ y $\nu$ enteros y se le supone $>1$, resultará:

$$\int_{-x_0}^{0-\varepsilon} \frac{dx}{x^n}+\int_{0+\eta}^{+x_1} \frac{dx}{x^n}=\frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{\varepsilon^{n-1}}+\frac{1}{\eta^{n-1}}\right)-\frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{x_0^{n-1}}+\frac{1}{x_1^{n-1}}\right)$$



esta suma crece más allá de todo límite cuando $\varepsilon$ y $\eta$ tienden á cero; luego la integral propuesta es infinita.

Sea finalmente $\eta=1$ y se tendrá:

$$\int_{-x_0}^{+x_1} \frac{dx}{x}=\text{lím}\left(\int_{-x_0}^{0-\varepsilon} \frac{dx}{x}+\int_{0+\eta}^{+x_1} \frac{dx}{x}\right)=1\frac{0-\varepsilon}{-x_0}+1\frac{x_1}{0+\eta}=1\frac{\varepsilon}{x_0}+1\frac{x_1}{\eta}=1\frac{\varepsilon x_1}{x_0\eta}$$
$$=1\frac{x_1}{x_0}+1\frac{\varepsilon}{\eta}$$

Como el límite de la relación $\frac{\varepsilon}{\eta}$ es *indeterminado* siendo arbitrarios estos respectivamente pequeños, luego también la integral será *indeterminada*.

223. Si se supone $\varepsilon=\eta$ en la fórmula (380′) resultará:

$$\int_{x_0}^{X-\varepsilon} f(x)\,dx+\int_{X+\varepsilon}^{x_1} f(x)\,dx \qquad (381)$$

y el límite al que tiende esta expresión cuando $\varepsilon$ tiende á 0 es, según la denominación de *Cauchy*, el *valor principal* de la integral definida $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx$.

En el ejemplo anterior el valor principal de la integral

$$\int_{-x_0}^{x_1} f(x)\,dx$$

y que llamaremos V, es:

$$V=\text{lím}\left(\int_{x_0}^{0+\varepsilon} \frac{dx}{x}+\int_{0+\varepsilon}^{x_1} \frac{dx}{x}\right)=1\frac{x_1}{x_0}+1\frac{\varepsilon}{\varepsilon}=1\frac{x_1}{x_0}$$

224. Si la integral $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx$ tiene un valor finito y determinado, este valor será evidentemente el límite al que tienda la suma

$$\int_{x_0}^{X-\mu\varepsilon} f(x)\,dx+\int_{X+\nu\varepsilon}^{x_1} f(x)\,dx \qquad (382)$$

cuando $\varepsilon$ tienda á 0 cualesquiera que sean los números positivos $\mu$ y $\nu$, luego la diferencia de las sumas (381) y (382) que la llamaremos D y es:

$$D=\int_{X-\varepsilon}^{X-\mu\varepsilon} f(x)\,dx+\int_{X+\varepsilon}^{X+\nu\varepsilon} f(x)\,dx \qquad (382')$$

debe tender á cero con $\varepsilon$ cualesquiera que sean $\mu$ y $\nu$, si se averigua que no es así se concluirá que la integral propuesta no tiene un valor finito y determinado.

Las dos integrales que constituyen el segundo miembro de (382′) en las que $\varepsilon$ es un infinitamente pequeño, han sido llamados por *Cauchy*, *integrales definidas singulares*.

En general si $f(x)$ es infinita para los valores $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_i$ comprendidos entre $x_0$ y $x_1$, la integral $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx$ debe verse como el límite al que tiende la suma:

$$\int_{x_0}^{X_1-\varepsilon_1} f(x)\,dx+\int_{X_1+\eta_1}^{X_2-\varepsilon_2} f(x)\,dx+\ldots\ldots+\int_{X_{i-1}+\eta_{i-1}}^{X_i-\varepsilon_i} f(x)+\int_{X_i+\eta_i}^{X} f(x)\,dx$$

Cuando $\varepsilon$ y $\eta$ tienden á cero, este caso se reduce al anterior fraccionando el intervalo de $x_0$ á $x_1$ en otros varios.

### Nueva demostración de la serie de Taylor.

225. Las propiedades de las integrales definidas juntamente con el método de integración por partes conducen á una breve y elegante demostración de la serie de Taylor (párrafo 183).

Sean $x$ y $h$ dos cantidades dadas, $t$ una variable y $f(x+h-t)$ una función continua así como sus $n$ primeras derivadas para valores de $t$ comprendidos entre 0 y $h$, lo que equivale á decir que $f(x)$ y sus $n$ primeras derivadas son continuas en el intervalo $(x, x+h)$.

Representando por $f'(x+h-t)$, $f''(x+h-t)$, ........, las derivadas sucesivas de $f(x+h-t)$ tomadas con respecto á $x+h-t$, se tendrá:

$$\left.\begin{array}{l}
\int_0^t f'(x+h-t)\,dt = tf'(x+h-t) + \int_0^t f''(x+h-t)\,t\,dt \\
\int_0^t f''(x+h-t)\,t\,dt = \frac{t^2}{2} f''(x+h-t) + \int_0^t f'''(x+h-t)\frac{t^2}{2}\,dt \\
\int_0^t f'''(x+h-t)\frac{t^2}{2}\,dt = \frac{t^3}{2.3} f'''(x+h-t) + \int f^{\mathrm{IV}}(x+h-t)\frac{t^3}{2.3}\,dt \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\int_0^t f^{(n-1)}(x+h-t)\frac{f^{n-2}}{2.3....(n-2)}\,dt = \frac{t^{n-1}}{2.3....(n-1)} f^{n-1}(x+h-t) \\
\qquad + \int_0^t f^{(n)}(x+h-t)\frac{f^{n-1}}{2.3....(n-1)}\,dt
\end{array}\right\} \quad (383)$$

Como además se tiene:

$$\int_0^h f'(x+h-t)\,dt = f(x+h) - f(x) \qquad (384)$$

Sumando todas las ecuaciones (383), haciendo en seguida $t=h$ y tomando en cuenta la relación (384) resultará:

$$\begin{array}{l}
f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1}f'(x) + \frac{h^2}{1.2}f''(x) + .... + \frac{h^{n-1}}{1.2....(n-1)}f^{(n-1)}(x) \\
\qquad + \frac{1}{1.2.3....(n-1)}\int_0^h f^{(n)}(x+h-t)\,t^{n-1}\,dt
\end{array} \qquad (385)$$

Para que esta fórmula coincida con la de Taylor es necesario y suficiente que las condiciones relativas á la continuidad estén satisfechas y que el resto R ó sea el último término del segundo miembro de (385) tienda á 0 á medida que $n$ aumenta.

Si llamamos M y $m$ el mayor y menor respectivamente de los valores que toma la derivada continua $f^{(n)}(x+h-t)$ cuando $t$ varía de 0 á $h$, necesariamente se tiene:

$$\mathrm{R} < \frac{1}{1.2.3....(n-1)}\int_0^h \mathrm{M}t^{n-1}\,dt < \frac{\mathrm{M}h^n}{1.2.3....n}$$

$$\mathrm{R} > \frac{1}{1.2.3....(n-1)}\int_0^h m t^{n-1}\,dt > \frac{mh^n}{1.2.3....n}$$

el verdadero valor de R corresponderá, pues, á un valor de $f^{(n)}(x+h-t)$ tal que $t$ esté comprendido entre 0 y $h$ y sea igual, por consiguiente, á $(1-\theta)h$, designando por $\theta$ una cierta fracción positiva.



Así pues, se tendrá para la forma del resto:

$$\mathrm{R} = \frac{h^n}{1.2.3......n} f^{(n)}(x+\theta h)$$

y la fórmula se cambiará en:

$$\begin{array}{l}
f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1}f'(x) + \frac{h^2}{1.2}f''(x) + ...... + \frac{h^{n-1}}{1.2......(n-1)}f^{(n-1)}(x) \\
\qquad + \frac{h^n}{1.2......n}f^{(n)}(x+\theta h)
\end{array}$$

que es la fórmula de Taylor.

La anterior forma del resto es debida á *Lagrange* y fué la que mencionamos en el párrafo 184.

### Integración por series.

226. Teorema fundamental. *Si una serie*

$$u_0 + u_1 + u_2 + ...... + u_{n-1} + \mathrm{R}_n \qquad (386)$$

*cuyos términos son funciones continuas de* x *es convergente para los valores de* x *comprendidos en el intervalo* $(\mathrm{x}_0, \mathrm{x}_1)$ *y si* f(x) *representa su límite, la serie:*

$$\int_{x_0}^{x_1} u_0\,dx + \int_{x_0}^{x_1} u_1\,dx + \int_{x_0}^{x_1} u_2\,dx + ...... + \int_{x_0}^{x_1} u_{n-1}\,dx + \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{R}_n\,dx$$

*es también convergente en el mismo intervalo y tiene por límite la integral definida* $\int_{\mathrm{x}_0}^{\mathrm{x}_1} \mathrm{f}(\mathrm{x})\,d\mathrm{x}$.

En efecto, pues por las condiciones establecidas se tiene para todos los valores de $x$ comprendidos en el intervalo $(x_0, x_1)$ y tendiendo $\mathrm{R}_n$ á cero cuando crece $n$:

$$f(x) = u_0 + u_1 + u_2 + ...... + u_{n-1} + \mathrm{R}_n \qquad (387)$$

Multiplicando por $dx$ é integrando entre los límites $x_0$ y $x_1$, se tendrá:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} u_0\,dx + \int_{x_0}^{x_1} u_1\,dx + ...... + \int_{x_0}^{x_1} u_{n-1}\,dx + \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{R}_n\,dx \qquad (388)$$

Si se representa por $\varepsilon$ un infinitamente pequeño, se puede poner por hipótesis y siendo $n$ bastante grande:

$$\mathrm{R}_n < \varepsilon \quad \text{luego} \quad \int_{x_0}^{x_1} \varepsilon\,dx < \varepsilon(x_1 - x_0)$$

El último término del segundo miembro de la relación (387) es, pues, nulo para $n=\infty$ y se tiene rigurosamente:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} u_0\,dx + \int_{x_0}^{x_1} u_1\,dx + \int_{x_0}^{x_1} u_2\,dx + ...... \qquad (389)$$

(Comberousse.)

227. Nota. Si la serie (387) convergente para los valores de $x$ comprendidos entre $x_0$ y $x_1$ es divergente para $x=x_1$ la fórmula (389) será aún cierta para $x=x_1-\varepsilon$ suponiendo $x_1 > x_0$ y designando $\varepsilon$ un infinitamente pequeño positivo.

Si $\varepsilon$ tiende á cero, la fórmula (389) subsistirá siempre, permaneciendo convergente la (388).

En efecto, sus dos miembros representan funciones continuas de $x$ que constantemente tienen el mismo valor; sus límites para $\varepsilon=0$ ó $x=x_1$ serían iguales.

228. Si la fórmula de Mac-Laurin da para $f(x)$ una serie convergente:

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\frac{x^2}{1.2}f''(0)+\ldots\ldots \tag{390}$$

resulta del teorema fundamental, que multiplicando sus dos miembros por $dx$ é integrando:

$$\int f(x)\,dx=C+\frac{x}{1}f(0)+\frac{x^2}{1.2}f'(0)+\frac{x^3}{1.2.3}f''(0)+\ldots\ldots$$

y si se tiene $C=0$, resultará:

$$\int f(x)\,dx=\frac{x}{1}f(0)+\frac{x^2}{1.2}f'(0)+\frac{x^3}{1.2.3}f''(0)+\ldots\ldots \tag{391}$$

## EJEMPLOS.

229. 1º Sea

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots\ldots\pm x^n\mp\frac{x^{n+1}}{1+x}.$$

convergente si $x<1$ en valor absoluto.

Multiplicando por $dx$ é integrando:

$$\int\frac{dx}{1+x}=L(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots\ldots\pm\frac{x^{n+1}}{n+1}\mp\int\frac{x^{n+1}\,dx}{1+x}$$

Así pues, en tanto que $x$ queda comprendida entre $-1$ y $+1$, resulta:

$$L(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots\ldots$$

2º Sea

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\ldots\ldots\pm x^{2n}\mp\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}$$

convergente para valores de $x$ entre $-1$ y $+1$.

Multiplicando por $dx$, integrando y tomando para arc (tang $=x$) el menor arco positivo cuya tangente es $x$:

$$\int\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arc}(\operatorname{tang}=x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots\ldots\pm\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\mp\int\frac{x^{2n+2}\,dx}{1+x^2}$$

y para valores comprendidos entre $-1$ y $+1$:

$$\operatorname{arc}(\operatorname{tang}=x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{7}+\ldots\ldots$$

bastante convergente cuando la tangente no es muy grande.



Como tang $30°=\frac{1}{\sqrt{3}}$, adoptando este valor la fórmula de arc (tang $=x$) da:

$$\pi=\tfrac{6}{\sqrt{3}}\left(1-\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{45}-\tfrac{1}{189}+\tfrac{1}{729}-\tfrac{1}{2673}+\ldots\ldots\right)$$

Calculando seis términos, se tendrá aproximadamente 0'9069 y como $\frac{6}{\sqrt{3}}=3'4641$, resulta:

$$\pi=3'141592\ldots\ldots$$

3º Suponiendo $x$ comprendida entre $+1$ y $-1$, la serie:

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\tfrac{1}{2}x^2+\frac{1.3}{2.4}x^4+\frac{1.3.5}{2.4.6}x^6+\ldots\ldots$$

es convergente.

Integrando después de multiplicar por $dx$:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\operatorname{arc}(\operatorname{sen}=x)=x+\frac{1.x^3}{2.3}+\frac{1.3\,x^5}{2.4.5}+\frac{1.3.5\,x^7}{2.4.6.7}+\ldots\ldots$$

desarrollo aplicable cuando $x$ está comprendido entre $+1$ y $-1$ y aun para $x=\pm1$, pues si ciertamente la primera serie es divergente (véase el Capítulo V, Nociones sobre las series) la segunda permanece convergente ([1]).

Así pues, haciendo $x=1$ en el desarrollo hallado y tomando para arc (sen $=x$) el menor arco positivo cuyo seno es $x$:

$$\frac{\pi}{2}=1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1.3.1}{2.4.5}+\frac{1.3.5.1}{2.4.6.7}+\ldots\ldots$$

valor de la mitad de $\pi$.

Si suponemos $x=\frac{1}{2}$ corresponde al arco de $30°$ que tiene $\frac{1}{2}$ por seno; luego:

$$\pi=6\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{48}+\tfrac{3}{1280}+\tfrac{5}{14336}+\tfrac{35}{584824}+\ldots\ldots\right.$$

que da:

| | | |
|---|---|---|
| Primer | término | $=3'00000$ |
| Segundo | „ | $=0'12500$ |
| Tercero | „ | $=0'01406$ |
| Cuarto | „ | $=0'00209$ |
| Quinto | „ | $=0'00036$ |
| Sexto | „ | $=0'00006$ |
| Séptimo | „ | $=0'00002$ |
| | | $\pi=3'14159$ |

4º Sea

$$\int-\frac{x\,dx}{\sqrt{r^2-x^2}}=\int-\frac{x}{r}\left(1-\frac{x^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$=\int-\frac{x}{r}\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{r^2}+\frac{3}{8}\cdot\frac{x^4}{r^4}+\frac{5}{16}\cdot\frac{x^6}{r^6}+\ldots\ldots\right)dx$$

$$=-\frac{x^2}{2r}-\frac{x^4}{8r^3}-\frac{x^6}{16r^5}-\frac{5x^8}{128r^7}-\ldots\ldots+C$$

([1]) Además, el seno no puede ser $>1$; luego la serie siempre es convergente.

Si la integral vale $r$ cuando $x=0$, se hallará:

$$\int -\frac{x\,dx}{\sqrt{r^2-x^2}} = r + \left(1 - \frac{x^2}{2r^2} - \frac{x^4}{8r^4} - \frac{x^6}{16r^6} - \frac{5x^8}{128r^8} - \ldots\ldots\right)$$

convergente, puesto que para que sea real debe tenerse: $x<r$.

5º Sea

$$y=\int \frac{\cos^n x}{\operatorname{sen} x}\,dx$$

Llamando:

$$\cos x = u,\quad dx = -\frac{du}{\operatorname{sen} x} = -\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

luego:

$$y=\int -\frac{u^n\,du}{1-u^2} = -\int u^n(1-u^2)^{-1}du = -\int u^n(1+u^2+u^4+u^6+\ldots\ldots)\,du$$

$$=\left(-\frac{u^{n+1}}{n+1} - \frac{u^{n+3}}{n+3} - \frac{u^{n+5}}{n+5} - \ldots\ldots\right)+C$$

$$=-\cos^n x\left(\frac{\cos x}{n+1} + \frac{\cos^3 x}{n+3} + \frac{\cos^5 x}{n+5} + \ldots\ldots\right)+C$$

229'. N. B.—En algunas aplicaciones en que deben integrarse funciones trascendentes, es muy frecuente apelar como último recurso al método de integración por series.

## Fórmula de Juan Bernoulli.

230. La integración por series se puede efectuar directamente, sin necesidad del previo desarrollo de la expresión diferencial.

Sea $f(x)\,dx$ la función por integrar; integrándola por partes, resulta:

$$\int f(x)\,dx = xf(x) - \int xf'(x)\,dx$$

haciendo:

$$u=f(x),\quad dv=dx,\quad du=f'(x)\,dx,\quad v=x$$

Aplicando el propio método de integración á $\int xf'(x)\,dx$, se deduce:

$$\int f(x)\,dx = xf(x) - f'(x)\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\int x^2 f''(x)\,dx$$

$$= xf(x) - f'(x)\frac{x^2}{2} + f''(x)\frac{x^3}{1.2.3} - \frac{1}{3}\int x^3 f'''(x)\,dx$$

Prosiguiendo de una manera análoga, se obtiene la fórmula de *Bernoulli:*

$$\int f(x)\,dx = xf(x) - \frac{x^2}{1.2}f'(x) + \frac{x^3}{1.2.3}f''(x) - \frac{x^4}{1.2.3.4}f'''(x) + \ldots\ldots + C \qquad (392)$$

Esta serie no es aplicable cuando alguna de las derivadas es infinita y suele ser complicada en algunos casos, tratándose, por ejemplo, de expresiones fraccionarias.

Sin embargo, puede emplearse en los casos en que se aplican sus semejantes, la de Taylor y la de Mac-Laurin.



## APLICACIONES.

231. I. Integrar por la fórmula de Bernoulli la expresión $\sqrt{1-x^2}\,dx$.

Se tendrá:

$$f(x)=\sqrt{1-x^2},\quad f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},\quad f''(x) = -\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}},\ \ldots\ldots$$

y tendremos:

$$\int (1-x^2)^{\frac{1}{2}}dx = x(1-x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{x^3}{2(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^3}{6(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} + \ldots\ldots + C$$

II. Integrar por series la expresión:

$$\frac{a\,dx}{(1-b\operatorname{sen}^2 x)^{\frac{3}{2}}}$$

Tendremos:

$$\int \frac{a\,dx}{(1-b\operatorname{sen}^2 x)^{\frac{3}{2}}} = a\int\left(1+\tfrac{3}{2}b\operatorname{sen}^2 x + \tfrac{15}{8}b^2\operatorname{sen}^4 x + \ldots\ldots\right)dx$$

$$= ax + \tfrac{3}{2}ab\int \operatorname{sen}^3 x\,dx + \tfrac{15}{8}ab^2\int \operatorname{sen}^4 x\,dx + \ldots\ldots + C$$

integral determinada, pues se conocen $\int \operatorname{sen}^3 x\,dx$, $\int \operatorname{sen}^4 x\,dx$, etc.

III. Integrar por series $\operatorname{tang}^n x\,dx$.

Suponiendo $\operatorname{sen} x = u$, nos da:

$$\cos x = \sqrt{1-u^2},\quad dx = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}\quad \text{luego}\quad \operatorname{tang}^n x = \frac{\operatorname{sen}^n x}{\cos^n x} = \frac{u^n}{(1-u^2)^{\frac{1}{2}n}}$$

Sustituyendo:

$$\int \operatorname{tang}^n x\,dx = \int \frac{u^n\,du}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}(n+1)}} = \int u^n\left[1+\tfrac{1}{2}(u+1)u^2 + \tfrac{1}{8}(u+1)(u+3)u^4 + \ldots\ldots\right)du$$

$$= \frac{u^{n+1}}{n+1} + \frac{n+1}{2(n+3)}u^{n+3} + \frac{(n+1)(n+3)}{8n+5}u^{n+5} + \ldots\ldots + C$$

$$= \operatorname{sen}^n x\left[\frac{\operatorname{sen} x}{n+1} + \frac{n+1}{2(n+3)}\operatorname{sen}^3 x + \frac{(n+1)(n+3)}{8(n+5)}\operatorname{sen}^5 x + \ldots\ldots\right]+C$$

IV. Integrar por la fórmula de Bernoulli:

$$dy=(a-2x)^2dx$$

tendremos:

$$f(x)=(a-2x)^2,\quad f'(x)=8x-4a,\quad f''(x)=8$$

Así pues:

$$\int (a-2x^2)^2dx = (a-2x)^2x + 2ax^2 - \frac{8}{3}x^3 + C$$

V. Integrar por la misma fórmula el segundo miembro de la ecuación

$$\operatorname{arc}(\operatorname{sen}=x) = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x_2}}$$