Se tiene:

$$f(x)=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}},\quad f'(x)=\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}},\quad f''(x)=\frac{1+2x^2}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}},\quad f'''(x)=\frac{9x+6x^3}{(1-x^2)^{\frac{7}{2}}}\ldots\ldots$$

sustituyendo:

$$\operatorname{arc}(\operatorname{sen}=x)=\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}-\frac{x^3}{2(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{x^3+2x^5}{6(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}-\ldots\ldots$$

diverso por la forma al hallado en el ejemplo VII (párrafo 185); pero equivalentes ambos en valor.

VI. Sea la expresión:

$$\mathrm{d}y=x^m(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}\mathrm{d}x$$

que se trata de integrar y se denomina por su forma *diferencial binomia.*

Desarrollando la potencia $\frac{p}{q}$ se tendrá:

$$\int x^m(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}\mathrm{d}x=a^{\frac{p}{q}}\left[\frac{x^{m+1}}{m+1}+\frac{pb}{aq}\cdot\frac{x^{m+n+1}}{m+n+1}+\frac{p(p-q)b^2}{1.2a^2q^2}\cdot\frac{x^{m+2n+1}}{m+2n+1}\right.$$
$$+\frac{p(p-q)(p-2q)}{1.2.3\,a^3q^3}\cdot\frac{x^{m+3n+1}}{m+3n+1}+\ldots\ldots$$
$$\left.+\frac{p(p-q)\ldots\ldots[p-(r-1)q]}{1.2.3\ldots\ldots ra^rq^r}\cdot\frac{x^{m+rn+1}}{m+rn+1}+\ldots\ldots\right]$$

pudiendo conocer para cierto valor de x el que toma la integral. (Gargollo.)

VII. Sea

$$\int \mathrm{d}x\sqrt{2ax-x^2}=\int 2a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{x}{2a}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$$
$$=\sqrt{2a}\left(\tfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1.2}{2.5}\cdot\frac{x^{\frac{5}{2}}}{2a}-\frac{1}{2.4.7}\cdot\frac{2x^{\frac{7}{2}}}{4a^2}-\frac{1.3}{2.4.6.9}\cdot\frac{2x^{\frac{9}{2}}}{8x^3}-\ldots\ldots\right)+C$$
$$=2x\sqrt{2ax}\left(\tfrac{1}{3}-\frac{1}{2.5}\cdot\frac{x}{2a}-\frac{1}{2.4.7}\cdot\frac{x^2}{4a^2}-\ldots\ldots\right)+C$$

(Lacroix.)

VIII. Sea

(1) $$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=2\left(\sqrt{x}+\frac{x}{2.3}\sqrt{x}+\frac{3x^2}{2.4.5}\sqrt{x}+\ldots\ldots\right)+C$$

(2) $$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=2x-\frac{1}{4x^2}-\frac{3}{32x^4}-\frac{15}{288x^6}-\ldots\ldots+C$$

IX. Sea

$$y=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}}=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}\ \text{haciendo}\ \sqrt{x}=u$$

se tiene:

$$y=\int\frac{2\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}=2\left(u+\frac{u^3}{2.3}+\frac{3u^5}{2.4.5}+\frac{3.5u^7}{2.4.6.7}+\ldots\ldots\right)+C$$

luego:

$$y=2\left(1+\frac{x}{2.3}+\frac{3x^2}{2.4.5}+\frac{3.5x^3}{2.4.6.7}+\ldots\ldots\right)\sqrt{x}+C$$

(Lacroix.)

Diferenciales binomias.

232. Las expresiones así denominadas tienen la forma:

$$\mathrm{d}y=x^m(a+bx^n)^p\mathrm{d}x \tag{393}$$

en las que m y n son enteros, siendo además n positivo. Si se presentase una diferencial binomia en que no se llenasen ambas condiciones, sería fácil cambiarla en otra de igual forma y que las llenara.

1º Si m y n fuesen fraccionarios y se tuviera:

$$\mathrm{d}y=x^{\frac{\alpha}{\beta}}(a+bx^{\frac{\gamma}{\delta}})^p\mathrm{d}x \tag{394}$$

cambiando x en otra variable cuyo exponente fuese el menor múltiplo de los denominadores β y δ de los exponentes de x, se reduciría dicha expresión á otra de la forma (393). Sea en general $x=z^{\beta\delta}$ y se tendrá:

$$\mathrm{d}y=z^{(\beta+\alpha)\delta-1}(a+bx^{\beta\gamma})^p\beta\delta\mathrm{d}z \tag{395}$$

que es de la forma (393) haciendo $m=(\beta+\alpha)\delta-1,\ n=\beta\gamma.$

2º Si n fuese negativo y se tuviera:

$$\mathrm{d}y=x^m(a+bx^{-n})^p\mathrm{d}x$$

pondríamos $x=\frac{1}{z}$ lo que da:

$$\mathrm{d}y=-z^{-m-2}(a+bz^n)^p\mathrm{d}z \tag{396}$$

de la forma tipo.

3º Si la variable independiente x entrase en los dos términos del binomio, por ejemplo teniéndose:

$$\mathrm{d}y=x^m(ax^a+bx^n)^p\mathrm{d}x$$

se tendría que esta expresión se cambiaría sin alteración en la siguiente:

$$\mathrm{d}y=x^{m+pa}(a+bx^{n-a})^p\mathrm{d}x \tag{397}$$

en la que x entra en sólo un término del binomio.

233. Vemos pues, que en todos los casos es posible reducir una diferencial binomia á la forma (393); pero como p puede ser un número positivo ó negativo, entero ó quebrado, la expresión más general será:

$$\mathrm{d}y=x^m(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}\mathrm{d}x \tag{398}$$

cuyas condiciones de integrabilidad hay que averiguar.

Desde luego se presentan tres casos de integrabilidad:

1º Cuando $\frac{p}{q}$ es un número entero y positivo.

2º Cuando $\frac{m+1}{n}$ es número entero.

3º Cuando $\frac{m+1}{n}+\frac{p}{q}$ es número entero.

Primer caso. Respecto del primer caso es claro que pues $\frac{p}{q}$ es número entero y positivo, desarrollada la potencia $\frac{p}{q}$ del binomio y efectuadas las multiplicaciones habría una serie de binomios de la forma $ax^{\beta}\,dx$ todos integrables por reglas generales ya conocidas.

Segundo caso. Si $\frac{m+1}{n}$ es entero, vamos á demostrar que también la expresión es integrable, para lo cual supongamos:

$$a+bx^n=u^q$$

que da:

$$x^m=\left(\frac{u^q-a}{b}\right)^{\frac{m}{n}},\quad dx=\frac{q\left(\frac{u^q-a}{b}\right)^{\frac{m}{n}-1}}{nb\left(\frac{u^q-a}{b}\right)^{\frac{m}{n}-\frac{1}{n}}}u^{q-1}\,du=\frac{q}{nb}\left(\frac{u^q-a}{b}\right)^{\frac{1-n}{n}}u^{q-1}\,du$$

Sustituyendo en (398):

$$dy=\frac{q}{nb}\left(\frac{u^q-a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}-1}u^{p+q-1}\,du \qquad (398')$$

Si $\frac{m+1}{n}$ es entero, también lo será la potencia á que debe elevarse el binomio u^q-a y el desarrollo dará términos integrables de la forma $au^{\beta}\,du$.

Sea, por ejemplo:

$$dy=5x^3(a+bx^2)^{\frac{3}{2}}dx$$

Como $\frac{3+1}{2}$ es entero, supondremos $a+bx^2=u^2$, lo que dará:

$$x^3=\left(\frac{u^2-a}{b}\right)^{\frac{3}{2}},\quad dx=\frac{u\,du}{b\left(\frac{u^2-a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

y de consiguiente:

$$dy=\frac{5(u^2-a)u^4\,du}{b^2}=\frac{5}{b^2}(u^6-au^4)\,du$$

y efectuando la integración:

$$y=\frac{5}{b^2}\left(\frac{u^7}{7}-\frac{au^5}{5}\right)+C=\frac{5u^7}{7b^2}-\frac{au^5}{b^2}+C=\frac{5(a+bx^2)^{\frac{7}{2}}}{7b^2}-\frac{a(a+bx^2)^{\frac{5}{2}}}{b^2}+C$$

Tercer caso. Pongamos (398) bajo la forma:

$$dy=x^m[x^n(ax^{-n}+b)]^{\frac{p}{q}}dx=x^{m+\frac{np}{q}}(ax^{-n}+b)^{\frac{p}{q}}dx$$

expresión que por lo antes demostrado será integrable si es entero el valor:

$$\frac{m+\frac{np}{q}+1}{n}\ \text{ó sea}\ \frac{m+1}{n}+\frac{p}{q}$$

Podría efectuarse la demostración de la manera siguiente:

Supongamos:

$$x^n=\frac{a}{z^q-b},\quad a+bx^n=\frac{az^q}{z^q-b},\quad (a+bx^n)^{\frac{p}{q}}=\frac{a^{\frac{p}{q}}z^p}{(z^q-b)^{\frac{p}{q}}}$$

$$x^{m+1}=\frac{a^{\frac{m+1}{n}}}{(z^q-b)^{\frac{m+1}{n}}},\quad x^m\,dx=-\frac{qa^{\frac{m+1}{n}}z^{q-1}}{n(z^q-b)^{\frac{m+1}{n}+1}}dz$$

Sustituyendo y reduciendo se tendrá finalmente:

$$dy=-\frac{q}{n}a^{\frac{m+1}{n}+\frac{p}{q}}.\frac{z^{p+q-1}}{(z^q-b)^{\frac{m+1}{n}+\frac{p}{q}+1}}dz \qquad (398'')$$

que sólo será racional si $\frac{m+1}{n}+\frac{p}{q}$ es entero.

Sea, por ejemplo, la expresión:

$$dy=\frac{3\,dx}{x^4\sqrt{1-x^2}}=3x^{-4}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx$$

que satisface la condición expresada por este caso; cambiaremos de variable suponiendo la relación:

$$x^n=\frac{a}{z^q-b}\ \text{que en este caso será}\ x^2=\frac{1}{z^2+1}\ \text{ó bien}\ x^2z^2=1-x^2$$

de donde

$$x=(1+z^2)^{-\frac{1}{2}},\quad x^{-4}=(1+z^2)^2,\quad (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=\frac{(1+z^2)^{\frac{1}{2}}}{z},\quad dx=-(1+z^2)^{-\frac{3}{2}}z\,dz$$

Sustituyendo:

$$dy=-3(1+z^2)\,dz$$

integrando:

$$y=-3z-z^3+C$$

finalmente:

$$y=\int\frac{3\,dx}{x^4\sqrt{1-x^2}}=-\frac{3x^2(1-x^3)^{\frac{1}{2}}+(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{x^3}+C=-\frac{1+2x^2}{x^3}\sqrt{1-x^2}+C$$

234. Cuando hay dificultad para proceder como antes se ha hecho, se recurre al método de la *integración por partes* que ya se ha explicado.

Sea nuevamente la fórmula:

$$dy=x^m(a+bx^n)^p\,dx$$

siendo como se dijo m y n enteros y el último además positivo, pudiendo ser p entero ó quebrado, positivo ó negativo.

Suponiendo compuesta la expresión anterior de los factores (párrafo 215):

$$u=x^{m-n+1},\quad dv=(a+bx^n)^px^{n-1}\,dx$$

se tendrá:

$$du=(m-n+1)x^{m-n}\,dx,\quad v=\frac{(a+bx^n)^{p+1}}{(p+1)nb}$$

luego según el método anunciado, se tendrá:

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx=\frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}}{(p+1)nb}-\frac{(m-n+1)}{(p+1)nb}\int x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}\,dx \qquad (399)$$

Podía haberse supuesto:

$$u=(a+bx^n)^p,\quad \mathrm{d}v=x^m\,\mathrm{d}x,\quad \mathrm{d}u=bnp(a+bx^n)^{p-1}x^{n-1}\,\mathrm{d}x,\quad v=\frac{x^{m+1}}{m+1}$$

con lo que se obtendría:

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,\mathrm{d}x=\frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{m+1}-\frac{bnp}{m+1}\int x^{m+n}(a+bx^n)^{p-1}\,\mathrm{d}x \qquad (400)$$

fórmulas que hacen depender la integral pedida de otra semejante, siendo los exponentes exteriores al paréntesis $m-n$ y $m+n$ y los del binomio $p+1$ y $p-1$ respectivamente.

235. Pueden aún deducirse otras fórmulas más generales.

La integración indicada en la fórmula (399), en el segundo miembro, da:

$$\int x^{m-n}(a+bx^n)(a+bx^n)^p\,\mathrm{d}x=a\int x^{m-n}(a+bx^n)^p\,\mathrm{d}x+b\int x^m(a+b^nx)^p\,\mathrm{d}x$$

Sustituyendo en (399):

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,\mathrm{d}x=\frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}}{(m+1+np)b}-\frac{(m-n+1)a}{(m+1+np)b}\int x^{m-n}(a+bx^n)^p\,\mathrm{d}x \qquad (401)$$

Igualmente el segundo miembro de (400) da:

$$\int x^{m+n}(a+bx^n)^{p-1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{b}\int x^m(a+bx^n)^p\,\mathrm{d}x-\frac{a}{b}\int x^m(a+bx^n)^{p-1}\,\mathrm{d}x \quad [1]$$

Sustituyendo en (400) y despejando, se encuentra:

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,\mathrm{d}x=\frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{m+1+np}+\frac{anp}{m+1+np}\int x^m(a+bx^n)^{p-1}\,\mathrm{d}x \qquad (402)$$

La fórmula (401) hace depender la integración de la función de otra semejante, pero siendo $m-n$ el exponente exterior al paréntesis.

En la (402) depende la integral de otra de la misma forma que la primitiva, pero siendo $p-1$ el exponente del binomio.

336. Si en la fórmula (401) se cambia m en $m-n$, despejando se halla:

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,\mathrm{d}x=\frac{x^{m+1}(a+bx^n)^{p+1}}{(m+1)a}-\frac{m+n+1+np}{(m+1)a}\,b\int x^{m+n}(a+bx^n)^p\,\mathrm{d}x \qquad (403)$$

Dependiendo la integral de la otra semejante en la que el exponente de la variable exterior es $m+n$.

Cambiando en (402) p en $p+1$, resulta:

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,\mathrm{d}x=-\frac{x^{m+1}(a+bx^n)^{p+1}}{an(p+1)}$$
$$+\frac{m+1+n(p+1)}{an(p+1)}\int x^m(a+bx^n)^{p+1}\,\mathrm{d}x \qquad (404)$$

[1] Transformación á que conduce la relación:

$$x^{m+n}=\frac{x^m(a+bx^n)-ax^m}{b}$$

depende la integral en este caso de la de una expresión semejante á la primera; pero siendo $p+1$ el exponente del binomio.

N. B.—Se elegirá de todas estas transformaciones la que conduzca con más facilidad al resultado.

APLICACIONES.

237. I. Sea

$$y=\int\frac{x^4\,\mathrm{d}x}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

Por la fórmula (401) se tiene:

$$\int x^4(r^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x=-\tfrac{1}{4}x^3(r^2-x^2)^{\frac{1}{2}}+\tfrac{3}{4}r^2\int x^2(r^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$$

y aplicando la misma fórmula:

$$\int x^2(r^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x=-\tfrac{1}{2}x(r^2-x^2)^{\frac{1}{2}}+\tfrac{1}{2}r^2\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

Finalmente:

$$y=-\frac{x}{4}\left(x+\tfrac{3}{2}r^2\right)\sqrt{r^2-x^2}+\tfrac{3}{8}r^4\operatorname{arc}\left(\operatorname{sen}=\frac{x}{r}\right)+C$$

II. Calcular:

$$y=\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4\sqrt{1-x^2}}$$

Aplicando la fórmula (403) se halla:

$$x^{-4}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x=\frac{-x^{-3}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{3}+\tfrac{2}{3}\int x^{-2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x\,.$$

y aplicando otra vez dicha fórmula:

$$\int x^{-4}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x=\frac{-x^3(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{3}+\tfrac{2}{3}\left[-x^{-1}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\right]+C$$
$$=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{3x^3}-\frac{2\sqrt{1-x^2}}{3x}+C$$

Usamos la fórmula (403) por ser negativo m y disminuir así el valor numérico del exponente exterior.

APLICACIONES DEL CÁLCULO INTEGRAL.

238. Expuestos los rudimentos anteriores del Cálculo Integral pasemos á estudiar sus inmediatas aplicaciones:

1ª Cuadratura de las curvas planas.
2ª Rectificación de las curvas planas.
3ª Superficie de los sólidos de revolución.
4ª Volumen de los sólidos de revolución.