I. **Cuadratura de las curvas planas.** Ya en el párrafo 195 hemos hallado, suponiendo ejes oblicuos ó rectangulares, las expresiones:

$$\mathrm{d}u = y \operatorname{sen} \theta \,\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}u = y\,\mathrm{d}x$$

sustituyendo el valor de y ó el de $\mathrm{d}x$ sacados de la ecuación de la curva considerada para sólo tener una variable independiente, no quedará sino integrar para efectuar la cuadratura ó sea la determinación de la superficie cuyo valor será en general, suponiendo ejes rectangulares:

$$u = \int_{x_0}^{x_1} y\,\mathrm{d}x \qquad (405)$$

si la integral resulta de forma finita, la curva es exactamente cuadrable geométricamente hablando, pero si la integración sólo puede hacerse por series, el valor de la superficie será más ó menos aproximado según el grado de convergencia de la serie y el número de términos que se tomen.

Por el simple cambio del eje de las ordenadas en el de las abscisas y vice versa, también se obtendrá:

$$u = \int_{x_0}^{x_1} x\,\mathrm{d}y \qquad (406)$$

enteramente análoga á la anterior.

Si se trata de valuar la superficie comprendida entre dos curvas planas referidas á los mismos ejes, se aplicará á cada una las fórmulas (405) ó (406) y se restarán los resultados, obteniéndose según el caso:

$$\left.\begin{aligned} S = u - u' &= \int_{x_0}^{x_1} y\,\mathrm{d}x - \int_{x_0}^{x_1} y'\,\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1} (y - y')\,\mathrm{d}x \\ S = u - u' &= \int_{x_0}^{x_1} x\,\mathrm{d}y - \int_{x_0}^{x_1} x'\,\mathrm{d}y = \int_{x_0}^{x_1} (x - x')\,\mathrm{d}y \end{aligned}\right\} \qquad (407)$$

Estas fórmulas son aplicables al caso en que se pida la superficie del segmento comprendido entre el arco de curva y su cuerda, entonces y', por ejemplo, es de la forma $ax + b$.

Es á veces ventajoso recurrir á las coordenadas polares, se determinan entonces las áreas de sectores formados por un arco de curva y dos radios vectores; llamando ρ, ω, las coordenadas polares, ω_0 y ω_1, los valores de ω que corresponden á los radios extremos; la expresión general de los sectores mencionados será:

$$\int_{\omega_0}^{\omega_1} \tfrac{1}{2}\rho^2\,\mathrm{d}\omega \qquad (408)$$

Si se trata de averiguar el área comprendida entre dos curvas dadas y los radios vectores que corresponden á los ángulos ω_0, ω_1, se tendrá la fórmula:

$$\int_{\omega_0}^{\omega_1} \tfrac{1}{2}(\rho^2 - \rho'^2)\,\mathrm{d}\omega \qquad (409)$$

en la que ρ y ρ' son los radios vectores correspondientes á las dos curvas dadas.

239. Pasemos ahora á las aplicaciones de la teoría expuesta.

I. Círculo. Vamos á aplicar las fórmulas de las cuadraturas al círculo dado por su ecuación: $x^2 + y^2 = r^2$.

Aplicando la fórmula (405) resultará:

$$u = \int (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = r\int \left(1 - \frac{x^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x = r\int\left(1 - \frac{x^2}{2r^2} - \frac{x^4}{8r^4} - \frac{x^6}{16r^6} - \frac{5x^8}{128r^8} - \ldots\ldots\right)\mathrm{d}x$$
$$= rx\left(1 - \frac{x^2}{6r^2} - \frac{x^4}{40r^4} - \frac{x^6}{112r^6} - \frac{5x^8}{1152r^8} - \ldots\ldots\right) + C$$

Suponiendo que el círculo de la figura 4 estuviese referido á su centro contando la área desde HB resulta $C = 0$, pues tanto u como x son nulos y en este caso la serie que queda expresa el valor de una área tal como BHmn comprendida entre la abscisa 0 y la abscisa H$n = x$; suponiendo que el arco Bm sea de 30°, se tendrá $x = \frac{1}{2}r$, y sustituyendo:

$$u = r^2\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{48} - \tfrac{1}{1280} - \tfrac{1}{14336} - \ldots\ldots\right) = 0'4783055\,r^2$$

calculando un número conveniente de términos.

Como el valor del triángulo Hmn es $\frac{1}{8}r^2\sqrt{3} = 0'2165063\,r^2$, resultará para el sector BHm que es $\frac{1}{12}$ de la superficie de todo el círculo que llamaremos S:

$$\tfrac{1}{12}S = 0'4783055\,r^2 - 0'2165063\,r^2 = 0'26117992\,r^2 \text{ de donde } S = 3'14159\,r^2 = \pi r^2$$

fórmula muy conocida de la superficie del círculo. Vemos de un modo patente la imposibilidad de hallar exactamente la cuadratura del círculo.

II. Parábola. Se tiene $y^2 = 2px$ y valiéndonos de la fórmula (312) suponiendo en general ejes oblicuos, resultará:

$$u = \int_0^x y \operatorname{sen}\theta\,\mathrm{d}x = \int_0^x \sqrt{2px}\operatorname{sen}\theta\,\mathrm{d}x = \sqrt{2p}\operatorname{sen}\theta\int_0^x x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x = \tfrac{2}{3}\sqrt{2p}\,x^{\frac{3}{2}}\operatorname{sen}\theta = \tfrac{2}{3}xy\operatorname{sen}\theta$$

mas como por la figura 25 se obtiene: paralelógramo OPNB $= yx\operatorname{sen}\theta$, $u = $ OBP, la fórmula obtenida expresa que la *área de un segmento parabólico es igual á los $\frac{2}{3}$ de la de un paralelógramo formado con la cuerda y la parte de diámetro conjugado comprendido entre el arco y la cuerda.*

Además, por la misma figura se tiene:

área del triángulo parabólico BON = área BNOP − área OBP = $\frac{1}{3}$ área BNOP

Si se supone $\theta = 90°$, resultarán las fórmulas en ejes rectangulares.

III. Elipse. Sea $a'^2y^2 + b'^2x^2 = a'^2b'^2$, la ecuación de la elipse referida á dos diámetros conjugados que hacen un ángulo θ (fig. 26); de dicha ecuación se obtiene:

$$y = \frac{b'}{a'}\sqrt{a'^2 - x^2}$$

Aplicando la fórmula (312):

$$u = \int \frac{b'}{a'}\sqrt{a'^2 - x^2}\operatorname{sen}\theta\,\mathrm{d}x = \frac{b'}{a'}\operatorname{sen}\theta\int\sqrt{a'^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$$

Para efectuar la integración supondremos $x = a'z$, $\mathrm{d}x = a'\mathrm{d}z$, lo que dará:

$$\int\sqrt{a'^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = a'^2\int\sqrt{1 - z^2}\,\mathrm{d}z = a'^2\int\frac{\mathrm{d}z(1 - z^2)}{\sqrt{1 - z^2}} = a'^2\left(\int\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1 - z^2}} - \int\frac{z^2\,\mathrm{d}z}{\sqrt{1 - z^2}}\right)$$
$$= a'^2\left(\int\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1 - z^2}} - \int\frac{2zz\,\mathrm{d}z}{2\sqrt{1 - z^2}}\right) = a'^2[\text{arco}(\text{sen} = z) + \int z\,\mathrm{d}\sqrt{1 - z^2}$$

Pero como $\int z\,\mathrm{d}\sqrt{1-z^2}=z\sqrt{1-z^2}-\int \mathrm{d}z\sqrt{1-z^2}$, se tendrá:

$$\int\sqrt{1-z^2}\,\mathrm{d}z=\operatorname{arc}(\operatorname{sen}=z)+z\sqrt{1-z^2}-\int\sqrt{1-z^2}\,\mathrm{d}z$$

es decir:

$$\int\sqrt{1-z^2}\,\mathrm{d}z=\tfrac{1}{2}\operatorname{arc}(\operatorname{sen}=z)+\tfrac{1}{2}z\sqrt{1-z^2}$$

integrando entre los límites $+a'$ á $-a'$ después de poner por z su valor, queda:

$$\int_{+a'}^{-a'}\sqrt{a'^2-x^2}\,\mathrm{d}x=a'^2\left[\frac{1}{2}\operatorname{arc}\left(\operatorname{sen}=\frac{x}{a}\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{a'^2}\sqrt{a'^2-x^2}\right]+\mathrm{C}$$
$$=a'^2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3\pi}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\frac{a'^2\pi}{2}$$

y finalmente:

$$u=\frac{b'}{a'}\operatorname{sen}\theta\,\frac{a'^2\pi}{2}=\tfrac{1}{2}\pi a'b'\operatorname{sen}\theta=\tfrac{1}{2}\pi ab$$

siendo a y b los semiejes de la elipse y duplicando este resultado para tener la área total U, resulta:

$$\mathrm{U}=\pi ab$$

referida á los ejes de la elipse.

Si se hubiera partido de la ecuación: $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$ en ejes rectangulares, fácilmente se obtendría:

$$u=\int y\,\mathrm{d}x=\frac{b}{a}\int(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$$

y de acuerdo con la aplicación I, la integral indicada es el valor de la superficie de un círculo de radio a; luego hay que escribir:

$$u=\frac{b}{a}\pi a^2=\pi ab$$

IV. Hipérbola. Sea $xy=\frac{a^2+b^2}{y}$ ó para simplificar $xy=m^2$, la ecuación de una hipérbola referida á sus asíntotas (fig. 27); aplicando la fórmula conocida se tendrá:

$$u=m^2\operatorname{sen}\theta\int_{x_0}^{x}\frac{\mathrm{d}x}{x}=m^2\operatorname{sen}\theta\,\mathrm{L}\,\frac{x}{x_0}$$

si permaneciendo constante x_0, aumenta x indefinidamente, la área u aumentará indefinidamente; luego *la área comprendida entre un arco de hipérbola y una de las asíntotas, es infinita.*

Si la hipérbola es equilátera, $\operatorname{sen}\theta=1$, y si además se supone $m=1$, $x_0=1$, resulta:

$$u=\mathrm{L}x$$

fórmula que explica por qué los logaritmos *neperianos* se denominan también *hiperbólicos*, pues dichos logaritmos expresan la área de la hipérbola (página 185, nota).

Para hallar la área de un segmento hiperbólico, no habría sino restar la área del trapecio mixtilíneo CMDP que se ha valuado, de la área del rectilíneo CMDP.

Si se diera la hipérbola por la ecuación: $a^2y^2-b^2x^2=-a^2b^2$, en ejes rectangulares, se tendría:

$$u=\int y\,\mathrm{d}x=\frac{b}{a}\int(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$$

y aplicando la fórmula resultaría:

$$u=\frac{bx}{2a}(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}-\tfrac{1}{2}ab\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}}$$

La integración indicada fácilmente se efectúa recurriendo á una variable auxiliar que verifique la condición: $z=x+(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}$, pues resulta entonces:

$$\mathrm{d}z=\mathrm{d}x+\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{\sqrt{x^2-a^2}+x}{\sqrt{x^2-a^2}}\,\mathrm{d}x,\quad \frac{\mathrm{d}z}{z}=\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

de consiguiente:

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}=\int\frac{\mathrm{d}z}{z}=\mathrm{L}z+\mathrm{C}=\mathrm{L}[x+(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}]+\mathrm{C}$$

y sustituyendo:

$$u=\frac{bx}{2a}(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}-\tfrac{1}{2}ab\,\mathrm{L}[x+(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}]+\mathrm{C}$$

para determinar á C convengamos en contar la área desde el vértice de la curva en el que $u=0$, $x=a$, luego:

$$u=\frac{bx}{2a}(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}-\tfrac{1}{2}ab\,\mathrm{L}\left[\frac{(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}+x}{a}\right]$$

fórmula que expresa la superficie comprendida entre la curva, el eje de las abscisas y la ordenada correspondiente á x; si se duplica dicho valor se obtendrá:

$$\mathrm{U}=2u=yx-ab\,\mathrm{L}\left(\frac{ay+bx}{ab}\right)$$

expresión del segmento hiperbólico cuya base es $2y$ y cuya altura es $x-a$.

V. Lemniscato. *El lemniscato de Bernoulli goza de la propiedad de que las distancias de cada uno de sus puntos á otros dos fijos cuya distancia es* 2 a, *tienen un producto constante igual con* a² (véase Geometría Analítica) *y es una de las curvas cuya cuadratura puede efectuarse rigurosamente.*

En coordenadas polares tiene por ecuación:

$$\rho^2=2a^2\cos 2\omega$$

designando por ρ el radio vector que parte del centro.

La área ω (fig. 28) del sector que determinan los radios correspondientes á los valores ω_0 y ω_1 de ω, tiene por valor (fórmula 408):

$$u=\int_{\omega_0}^{\omega_1}\tfrac{1}{2}\rho^2\,\mathrm{d}\omega=a^2\int_{\omega_0}^{\omega_1}\cos 2\omega\,\mathrm{d}\omega=\frac{a^2}{2}(\operatorname{sen}2\omega_1-\operatorname{sen}2\omega_0)$$

La curva es simétrica respecto al eje polar Ox y á su perpendicular Oy y consta de dos ramas cerradas y las dos tangentes TT′, SS′ llevadas por O, están inclinadas á 45° sobre el eje.

Para conocer la área que encierra una de las ramas, habrá que suponer:

$$\omega_0 = -\frac{\pi}{4}, \quad \omega_1 = \frac{\pi}{4} \quad \text{lo que dará:} \quad u = a^2$$

VI. Folium de Descartes. En coordenadas rectangulares la ecuación de esta curva (fig. 12) es:

$$x^3 + y^3 - 3\,axy = 0$$

siendo a un parámetro dado. Consta de dos ramas infinitas que se encuentran en el origen y que tienen por asíntota la recta cuya ecuación (párrafo 198, aplicación V):

$$y + x + a = 0$$

Sustituyendo tanto en la ecuación de la curva como en la de la asíntota los valores generales:

$$x = \rho \cos\omega, \quad y = \rho \operatorname{sen}\omega$$

para pasar á coordenadas polares resultará en una y en otra respectivamente:

$$\rho = \frac{3\,a \operatorname{sen}\omega \cos\omega}{\operatorname{sen}^3\omega + \cos^3\omega}, \quad \rho_1 = \frac{-a}{\operatorname{sen}\omega + \cos\omega}$$

La área comprendida entre la curva y los radios vectores correspondientes á ω_0, ω_1, tendrá por valor:

$$u = \int_{\omega_0}^{\omega_1} \tfrac{1}{2} r^2\, d\omega = \frac{3\,a^2}{2} \int_{\omega_0}^{\omega_1} \frac{3 \operatorname{tang}^2\omega \,\dfrac{d\omega}{\cos^2\omega}}{(1 + \operatorname{tang}^3\omega)^2} = \frac{3\,a^2}{2} \left(\frac{1}{1 + \operatorname{tang}^3\omega_0} - \frac{1}{1 + \operatorname{tang}^3\omega_1} \right)$$

Para determinar la superficie del *ojo* formado por la curva, se supondrá:

$$\omega_0 = 0, \quad \omega_1 = \frac{\pi}{2} \quad \text{lo que dará para valor del área:} \quad \frac{3\,a^2}{2}$$

Para determinar la área comprendida entre una rama de la curva, su asíntota y dos radios vectores, habrá que restar la área u hallada de la área u_1 comprendida entre los radios vectores y la asíntota, y que es un triángulo que tiene por expresión:

$$u_1 = \int_{\omega_0}^{\omega_1} \tfrac{1}{2} \rho_1\, d\omega = \frac{a^2}{2} \int_{\omega_0}^{\omega_1} \frac{\dfrac{d\omega}{\cos^2\omega}}{(1 + \operatorname{tang}\omega)^2} = \frac{a^2}{2} \left(\frac{1}{1 + \operatorname{tang}\omega_0} - \frac{1}{1 + \operatorname{tang}\omega_1} \right)$$

de consiguiente:

$$u_1 - u = \frac{a^2}{2} \left(\frac{2 - \operatorname{tang}\omega_1}{1 - \operatorname{tang}\omega_1 + \operatorname{tang}^2\omega_1} - \frac{2 - \operatorname{tang}\omega_0}{1 - \operatorname{tang}\omega_0 + \operatorname{tang}^2\omega_0} \right)$$

Si se quiere conocer la área comprendida entre la parte negativa del eje de las abscisas, la curva y su asíntota, habrá que suponer:

$$\omega_0 = \frac{3\pi}{4}, \quad \omega_1 = \pi \quad \text{lo que dará:} \quad u_1 - u = \frac{a^2}{2}$$

También será $\frac{a^2}{2}$ el valor de la área comprendida entre la parte negativa del eje de las y, la curva y la asíntota, sumando estos dos arcos á la del triángulo que forma la asíntota con los ejes y que también tiene por valor $\frac{a^2}{2}$, se obtendrá la área total $\frac{3\,a^2}{2}$ comprendida entre las dos ramas infinitas y la asíntota, que como se ve es igual á la del *ojo* formado por la curva.

240. II. **Rectificación de curvas.** Sea s un arco de curva plana contado desde un origen arbitrario; hemos hallado en el párrafo 195 las fórmulas:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}, \quad ds = \sqrt{dx^2 + 2\,dx\,dy \cos\theta + dy^2}$$

en las que ya no habrá sino integrar para conocer á s en los dos casos de ejes rectangulares y oblicuos. Suponiendo que x é y son funciones de una variable independiente t y designando por t_0 y t_1 los valores de t que corresponden del origen de un arco S á su extremidad, se tendrá suponiendo que t varía en el mismo sentido cuando se describe el arco S y en el caso, por ejemplo, de ejes rectangulares:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dt}\, dt \tag{410}$$

Si se emplean coordenadas polares, se tendrá según la fórmula (320):

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2\, d\theta^2}$$

y si t es la variable independiente:

$$ds = \frac{\sqrt{dr^2 + r^2\, d\theta^2}}{dt}\, dt \tag{411}$$

Cuando los valores de dx ó de dy, según la variable independiente que se tome, obtenidos de la ecuación de la curva hacen integrable la fórmula elegida sin recurrir á las series, la curva es exactamente rectificable geométricamente hablando. Si el resultado es una serie, se podrá obtener con más ó menos aproximación el valor del arco de la curva, según la convergencia de la serie y el número de términos tomados.

241. Pasemos á las aplicaciones de estas fórmulas.

I. Círculo. Sea un círculo dado por la ecuación $x^2 + y^2 = r^2$, de la que resulta:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

Sustituyendo:

$$s = \int \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}\, dx = \int \left(1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}\right)^{\frac{1}{2}} dx = \int \frac{r\,dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$
$$= r \operatorname{arc}\left(\operatorname{sen} = \frac{x}{r}\right) + C$$

Si en la figura 4 suponemos que se cuenta el arco de B hacia m, luego hacia Q, etc., en el punto B se tiene $s = 0$, $x = 0$, luego:

$$s = r \operatorname{arc}\left(\operatorname{sen} = \frac{x}{r}\right)$$

será la expresión de un arco tal como Bm que va del punto B cuya abscisa es 0, al m cuya abscisa es x.

Aplicando la fórmula del párrafo 185, aplicación VII, resultará:

$$s=r\left(\frac{x}{r}+\frac{1}{6}\cdot\frac{x^3}{r^3}+\frac{3}{40}\cdot\frac{x^5}{r^5}+\frac{5}{112}\cdot\frac{x^7}{r^7}+\cdots\cdots\right)$$

haciendo $x=\frac{1}{2}r$, la serie se reduce á $\frac{1}{6}\pi$ (párrafo 229) y llamando c á la circunferencia, se tendrá:

$$\text{arco de } 30^\circ=\tfrac{1}{12}c=\tfrac{1}{6}\pi r \quad \text{de donde} \quad c=2\pi r$$

fórmula ya conocida. Por la manera como ha resultado este valor se comprende la imposibilidad de rectificar rigurosamente la circunferencia.

II. Elipse. Supongamos la elipse dada por la ecuación $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$, de la que resulta, según el párrafo 198, aplicación I:

$$s=\int\left[\frac{a^4-x^2(a^2-b^2)}{a^2(a^2-x^2)}\right]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$$

Tomando el semieje mayor como unidad, llamaremos e la excentricidad:

$$e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$$

lo que dará:

$$s=\int\left(\frac{a^2-e^2x^2}{a^2-x^2}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x=a\int\frac{\left(1-\frac{a^2}{e^2}x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}x$$
$$=\int\frac{a\,\mathrm{d}x}{(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}\left(1-\frac{e^2x^2}{2a^2}-\frac{e^4x^4}{2.4\,a^4}-\frac{3e^6x^6}{2.4.6\,a^6}-\cdots\cdots\right)$$
$$=a\,\mathrm{arc}\left(\mathrm{sen}=\frac{x}{a}\right)-\frac{e^2}{2a}\int\frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}-\frac{e^4}{2.4\,a^3}\int\frac{x^4\,\mathrm{d}x}{(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}-\cdots\cdots-\mathrm{A}\int\frac{x^m\,\mathrm{d}x}{(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}-\cdots\cdots$$

Como m es par en todos los términos por integrar, todos ellos son integrables por la fórmula (401), lo que dará:

$$s=a\,\mathrm{arc}\left(\mathrm{sen}=\frac{x}{a}\right)+\left[\frac{e^2x(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}{4a}-\frac{ae^2}{4}\mathrm{arc}\left(\mathrm{sen}=\frac{x}{a}\right)\right]+$$
$$+\left[\frac{2e^4x^3+3a^2e^4x}{2.2.4.4}(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}-\frac{3a^4e^4}{2.2.4.4\,a^3}\mathrm{arc}\left(\mathrm{sen}=\frac{x}{a}\right)\right]+\text{etc.}$$
$$=a\,\mathrm{arc}\left(\mathrm{sen}=\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{e^2}{2^2}-\frac{3e^4}{2^2.4^2}-\frac{3^2.5e^6}{2^2.4^2.6^2}-\cdots\cdots\right)+$$
$$+\frac{x}{a}(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{e^2}{2^2}+\frac{2e^4x^2+3a^2e^4}{2^2.4^2a}+\cdots\cdots\right)$$

serie que da el arco contado desde la extremidad del eje menor. Para calcular la cuarta parte del perímetro habrá que suponer $x=a$, lo que da:

$$\text{sup}\ \frac{1}{4}p=a\frac{\pi}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^2e^2-\left(\frac{1}{2.4}\right)^2 3e^4-\left(\frac{1.3}{2.4.6}\right)^2 5e^6-\cdots\cdots\right]$$

y cuadruplicando este valor, se tendrá para todo el perímetro de la elipse:

$$p=2\pi a\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^2e^2-\left(\frac{1}{2.4}\right)^2 3e^4-\left(\frac{1.3}{2.4.6}\right)^2 5e^6-\cdots\cdots\right]$$

tanto más convergente cuanto menor sea la distancia del centro al foco respecto al eje mayor; si $e=0$, la elipse se cambia en círculo de radio a y la sustitución en la fórmula conduce al valor conocido $p=2\pi a$.

Se procederá análogamente para la hipérbola.

III. Parábola. Sea la ecuación de la parábola común $y^2=2px$, que da:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{p}{q} \quad \text{y de consiguiente} \quad s=\frac{1}{p}\int(p^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y$$

en la que para mayor facilidad hemos tomado á y como variable independiente.

Esta expresión será integrable (párrafo 235) y aplicándole la fórmula (402) se tendrá:

$$s=\frac{y(p^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}{2p}+\frac{p}{2}\int\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{p^2+y^2}}=\frac{y\sqrt{p^2+y^2}}{2p}+\tfrac{1}{2}p\,\mathrm{L}(y+\sqrt{p^2+y^2})+\mathrm{C}$$

por comparación con el párrafo 239-IV.

Contando el arco desde el vértice de la curva en el que $s=0$, $y=0$, resultará en definitiva:

$$s=\frac{y\sqrt{p^2+y^2}}{2p}+\tfrac{1}{2}p\,\mathrm{L}\left(\frac{y+\sqrt{p^2+y^2}}{p}\right)$$

para expresión del arco de la parábola contado desde el vértice hasta el punto cuya ordenada es y.

IV. Espirales. Sea la ecuación $\rho=a\omega^n$ que representa las espirales y que produce por diferenciación $\mathrm{d}\rho=na\omega^{n-1}\mathrm{d}\omega$.

Sustituyendo en la fórmula (320) resulta:

$$s=\int(n^2a^2\omega^{2(n-1)}+a^2\omega^{2n})^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\omega=a\int\omega^{n-1}(n^2+\omega^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\omega$$

Si $n=1$, se tiene la espiral de *Conon* ó de *Arquímedes* (párrafo 203) y resulta:

$$s=a\int(1+\omega^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\omega$$

que por ser de la forma de la expresión hallada en el estudio de la parábola, se resolverá análogamente.

Si $n=-1$, resulta la espiral hiperbólica (párrafo 203) y la integración se efectuará por las fórmulas relativas á las diferenciales binomias.

Para la espiral logarítmica cuya ecuación es: $\omega=a\log\rho$, se tendrá:

$$\mathrm{d}\omega=a\mathrm{M}\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}$$

y aplicando la fórmula (320):

$$s=\int(1+\mathrm{M}^2a^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\rho=\rho\sqrt{1+a^2\mathrm{M}^2}+\mathrm{C}$$

que se reduce á $r\sqrt{2}$ si: se supone $a=1$, se expresa en logaritmos neperianos y se cuenta el arco desde el origen de los radios vectores en el que $s=0$, $\omega=0$. El resultado obtenido muestra que en ese caso *el arco de espiral logarítmica es igual á la diagonal del cuadrado construído sobre el radio vector.*