1º La ecuación de la primera línea es $y=b$, de consiguiente:

$$V=\pi\int y^2\,dx=\pi\int_{x'}^{x''} b^2\,dx=\pi b^2 x+C=\pi b^2(x''-x')=\pi b^2 l$$

llamando l la longitud de la línea; como vemos, el volumen engendrado es, como debía esperarse, el de un cilindro recto.

2º La ecuación de la recta en el segundo caso es $y=ax+b$, de consiguiente:

$$V=\pi\int_{y'}^{y''} y^2\frac{dy}{a}=\frac{\pi}{a}\int_{y'}^{y''} y^2\,dy=\frac{\pi}{3a}y^3+C=\frac{\pi}{3a}(y''^3-y'^3)$$
$$=\frac{\pi}{3a}(y''-y')(y''^2+y''y'+y'^2)=\tfrac{1}{3}\pi h(y''^2+y''y'+y'^2)$$

llamando h la proyección de la línea sobre el eje; como vemos el volumen engendrado es, como debía esperarse, el de un trozo de cono de bases paralelas.

3º Para resolver el tercer problema basta suponer $y'=0$ en la fórmula que acaba de obtenerse para el segundo problema, y se tendrá: $V=\frac{1}{3}\pi h y''^2$, siendo h la proyección de la nueva recta sobre el eje; como se ve, el volumen es el de un cono.

CAPÍTULO VIII.

TEORÍA ELEMENTAL DE LAS CANTIDADES IMAGINARIAS.

246. El Álgebra Elemental inicia el estudio de las cantidades imaginarias, pero es tal la importancia que les atañe, que es de necesidad ampliar los conocimientos adquiridos emprendiendo su estudio hasta donde lo permite la extensión de esta obra.

247. **Origen de las cantidades imaginarias.** Sea la ecuación mixta de segundo grado con una incógnita:

$$ax^2+bx+c=0 \tag{426}$$

cuyas raíces son, como se sabe:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \tag{427}$$

en cuya fórmula pueden suceder tres casos:

Si $b^2>4ac$, las raíces son *reales y desiguales.*

Si $b^2=4ac$, „ „ „ „ *é iguales.*

Si $b^2<4ac$, „ „ „ *imaginarias.*

Esta última denominación obedece á las razones siguientes: puesto que b^2-4ac es menor que 0, será igual á una cantidad esencialmente negativa que representaremos, para darle ese carácter, por $-k^2$, puesto que k^2 siempre tiene signo positivo y tendremos:

$$b^2-4ac=-k^2 \tag{428}$$

con lo que la ecuación propuesta se cambiará en:

$$(2ax+b)^2+k^2=0 \tag{429}$$

y la suma de dos cantidades *esencialmente positivas* no puede ser nula; de suerte que ningún valor *real* de x, *ni positivo ni negativo* puede verificar la ecuación. Así pues, el valor de la incógnita que la verifique no es *real* y se le ha llamado *imaginario.*

Sustituyendo en (427) resulta:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{-k^2}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{k^2(-1)}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{k^2}\sqrt{-1}}{2a}=\frac{-b\pm k\sqrt{-1}}{2a}$$
$$=\alpha\pm\beta\sqrt{-1}$$

valor que se obtiene efectuando operaciones que el Álgebra ha consagrado como universales en su aplicación, y suponiendo $-\frac{b}{2a}=\alpha$, $\frac{k}{2a}=\beta$, la forma obtenida es la forma general de las cantidades ó expresiones imaginarias á las que puede originar la resolución de la ecuación general de segundo grado.

El *símbolo* $\sqrt{-1}$ se representa comunmente por i y entonces la expresión hallada será: $x=\alpha\pm\beta i$, teniendo siempre cuinado de recordar que el cuadrado de i ó sea i^2 es igual á -1.

Las cantidades $\alpha+\beta i$, $\alpha-\beta i$ que aisladamente se llaman *imaginarias*, consideradas conjuntamente se denominan *imaginarias conjugadas*, pues sólo varía el signo que liga á la parte real α con la parte imaginaria $\beta\sqrt{-1}$.

Las cantidades α y β pueden ser nulas, positivas ó negativas, y son los *elementos* de la cantidad imaginaria.

La cantidad imaginaria $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ ó sea $\alpha+\beta i$, se expresa también por medio del símbolo: (α, β).

Si se trata de un polinomio imaginario que sea función entera de i, se escribirá simbólicamente $f(i)$.

248. Cuando se tienen dos cantidades imaginarias complexas:

$$a+b\sqrt{-1} \quad \text{y} \quad a'+b'\sqrt{-1}$$

es preciso, para que sean iguales entre sí, que se tenga: $a=a'$, $b=b'$, relaciones que se deducen fácilmente estableciendo la igualdad hipotética:

$$a+b\sqrt{-1}=a'+b'\sqrt{-1}$$

que se cambia en:

$$(a-a')^2=(b'-b)^2(\sqrt{-1})^2=-(b'-b)^2 \quad \text{ó bien} \quad (a-a')^2+(b'-b)^2=0$$

esta suma sólo puede ser nula si se establecen las relaciones finales antes enunciadas.

Recíprocamente no se puede establecer la igualdad:

$$a+b\sqrt{-1}=a'+b'\sqrt{-1}$$

si de antemano no se llenan las condiciones $a=a'$, $b=b'$.

De acuerdo con lo anterior, la relación $(\alpha, \beta)=(\gamma, \delta)$ entraña las siguientes:

$$\alpha=\gamma, \quad \beta=\delta$$

249. Se llama *módulo* en una expresión imaginaria: $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, el número real y positivo: $+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$; de consiguiente:

1º *Dos expresiones imaginarias conjugadas* $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, $\alpha-\beta\sqrt{-1}$ *tienen el mismo módulo y su producto es igual al cuadrado del módulo.*

2º *Cuando el módulo es nulo la cantidad imaginaria lo es y recíprocamente.*

3º *El módulo de una cantidad real es ella misma tomada positivamente.*

250. **Suma y resta.** De las relaciones:

$$(\alpha, \beta)=\alpha+\beta i, \quad (\gamma, \delta)=\gamma+\delta i$$

se deduce:

$$(\alpha, \beta)\pm(\gamma, \delta)=(\alpha\pm\gamma)+(\beta\pm\delta)i \tag{430}$$

Así pues: *la suma ó la diferencia de dos cantidades imaginarias es una nueva imaginaria cuyos elementos son iguales á la suma ó á la diferencia de los elementos respectivos de las cantidades sumadas ó restadas.*

Si las dos imaginarias son conjugadas: $\alpha=\gamma$, $\delta=-\beta$, entonces *la suma de dos imaginarias conjugadas es real é igual al doble* 2α *de la parte real común y la diferencia es una imaginaria simple* $2\beta i$ *cuyo cuadrado es esencialmente negativo* $-4\beta^2$.

Generalizando el teorema que cifra la fórmula (430) resulta:

$$(\alpha_1, \beta_1)+(\alpha_2, \beta_2)+\ldots\ldots+(\alpha_n, \beta_n)=(\alpha_1+\alpha_2+\ldots\ldots+\alpha_n, \beta_1+\beta_2+\ldots\ldots+\beta_n) \tag{431}$$

ó *simbólicamente:*

$$\sum_{r=1}^{r=n}(\alpha_r, \beta_r)=\left(\sum_{r=1}^{r=n}\alpha_r, \sum_{r=1}^{r=n}\beta_r\right) \tag{432}$$

Si se tiene: $\alpha_1=\alpha_2=\ldots\ldots=\alpha_n$, $\beta_1=\beta_2=\ldots\ldots=\beta_n$, resultará:

$$n(\alpha_1, \beta_1)=(n\alpha_1, n\beta_1) \tag{433}$$

Teorema. *La suma ó la diferencia de dos cantidades cualesquiera tiene un módulo comprendido entre la suma y la diferencia de los módulos de las cantidades.*

Sean las cantidades: $\alpha+\beta i$, $\alpha'+\beta' i$ cuyos módulos son:

$$r^2=\alpha^2+\beta^2, \quad r'^2=\alpha'^2+\beta'^2$$

Llamando R el módulo de la suma, se tiene:

$$R^2=(\alpha+\alpha')^2+(\beta+\beta')^2=\alpha^2+\alpha'^2+\beta^2+\beta'^2+2(\alpha\alpha'+\beta\beta')=r^2+r'^2+2(\alpha\alpha'+\beta\beta')$$

Pero se tiene:

$$r^2r'^2=\alpha^2\alpha'^2+\beta^2\alpha'^2+\alpha^2\beta'^2+\beta^2\beta'^2=(\alpha\alpha'+\beta\beta')^2+(\alpha\beta'-\beta\alpha')^2$$

luego el valor numérico de $\alpha\alpha'+\beta\beta'$ es menor ó á lo sumo igual á rr', de consiguiente R^2 está comprendido entre $r^2+r'^2-2rr'=(r-r')^2$ y $r^2+r'^2+2rr'=(r+r')^2$ ó bien R está comprendida entre $r+r'$ y $r-r'$.

La demostración en el caso de tratarse de la diferencia de dos cantidades imaginarias, es idéntica.

251. **Producto.** Se tiene, por ejemplo, para dos factores:

$$(\alpha_1, \beta_1)(\alpha_2, \beta_2)=(\alpha_1+\beta_1 i)(\alpha_2+\beta_2 i)=\alpha_1\alpha_2+(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)i+\beta_1\beta_2 i^2$$
$$=\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2+(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)i=p_1+q_1 i$$

producto de la misma forma que las dos cantidades imaginarias é *independiente del orden de los factores.*

Siguiendo el procedimiento aplicable en casos análogos al presente para demostrar la generalidad de un teorema, concluiremos que: *el producto de varias cantidades imaginarias es una expresión imaginaria que no se altera al mudar el orden de los factores.*

Si las cantidades imaginarias son conjugadas, tendremos tomando por ejemplo dos:

$$\alpha_1=\alpha_2, \quad \beta_2=-\beta_1$$

y concluiremos: *que el producto de dos imaginarias conjugadas es real é igual á la suma de los cuadrados de* α_1 *y* β_1, $\alpha_1^2+\beta_1^2$.

TEOREMA. *El módulo de un producto de dos factores imaginarios es igual al producto de los módulos de los factores.*

Se tiene:

$$(\alpha_1+\beta_1 i)(\alpha_2+\beta_2 i)=(\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2)+(\alpha_1\beta_2+\beta_1\alpha_2)i$$

el módulo de la expresión del segundo miembro es:

$$R=\sqrt{(\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2)^2+(\alpha_1\beta_2+\beta_1\alpha_2)^2}=\sqrt{(\alpha_1^2+\beta_1^2)(\alpha_2^2+\beta_2^2)}=\sqrt{(\alpha_1^2+\beta_1^2)}\sqrt{(\alpha_2^2+\beta_2^2)}$$

Si se tienen varios factores imaginarios, los llamaremos para simplificar:

$$y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots\ldots, y_n$$

y tendremos:

$$\begin{aligned}\text{mód}\,(y_1.y_2.y_3.y_4\ldots\ldots y_{n-3}.y_{n-2}.y_{n-1}.y_n)&=\text{mód}\,y_n\,\text{mód}\,(y_1.y_2.y_3\ldots\ldots y_{n-1})\\&=\text{mód}\,y_n\,\text{mód}\,y_{n-1}.\text{mód}\,(y_1.y_2.y_3\ldots\ldots y_{n-2})\\&=\text{mód}\,y_n\,\text{mód}\,y_{n-1}\,\text{mód}\,y_{n-2}\ldots\ldots\text{mód}\,y_3\,\text{mód}\,y_2\,\text{mód}\,y_1\end{aligned}$$

lo que demuestra el teorema enunciado en general y además entraña las deducciones: 1ª, *el producto de varias sumas de cuadrados es igual á la suma de dos cuadrados;* 2ª, *que la nª potencia de una cantidad imaginaria tiene por módulo la nª potencia del módulo de dicha expresión.*

TEOREMA. *Para que un producto de factores imaginarios sea nulo, es necesario y suficiente que uno de los factores sea nulo.*

Cuando los factores son reales, el teorema es evidente.

Cuando son imaginarios, si el producto es nulo, su módulo lo es; para que este módulo sea nulo, como es producto de factores reales (Teor. anterior), es preciso que uno de sus factores sea nulo; á su vez al ser nulo este factor que es módulo de alguno de los factores imaginarios, el factor imaginario que le corresponde también es nulo y la condición enunciada es necesaria. Es suficiente, porque de ser nulo un factor imaginario lo es su módulo, lo es de consiguiente el módulo del producto y finalmente el producto mismo.

252. **División.** *Divisor imaginario es la cantidad imaginaria* $\gamma+\delta i$ *que multiplicada por otra imaginaria* $x+yi$ *llamada cociente, reproduce otra imaginaria dividendo* $\alpha+\beta i$.

Tendremos:

$$\alpha+\beta i=(\gamma+\delta i)(x+yi)=(\gamma x-\delta y)+(\delta x+\gamma y)i \tag{433'}$$

de donde se deduce:

$$\alpha=\gamma x-\delta y, \quad \beta=\delta x+\gamma y \quad \text{y de consiguiente:} \quad x=\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2}, \quad y=\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}$$

por último:

$$\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}=x+yi=\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}i$$

cociente imaginario.

Si se tuviera: $\beta\gamma=\alpha\delta$, $y=0$, el cociente es entonces real, lo que puede averiguarse directamente, pues se tiene:

$$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\delta}{\gamma}=m \quad \text{ó bien} \quad \beta=\alpha m, \quad \delta=\gamma m$$

y de consiguiente la ecuación (433′) se cambiará en:

$$\alpha(1+mi)=\gamma(1+mi)(x+yi) \quad \text{ó bien} \quad \alpha=\gamma x+\gamma yi$$

que cuando $y=0$ se reduce á $x=\frac{\alpha}{\gamma}$, es decir, *el cociente de dos cantidades imaginarias no siempre es imaginario.*

253. **Elevación á potencias.** Consideremos la expresión:

$$(\alpha+\beta i)^n$$

siendo n entero positivo y desarrollémosla por la fórmula del binomio:

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta i)^n&=\alpha^n\left(1+\frac{\beta}{\alpha}i\right)^n\\&=\alpha^n\left[1+\frac{n\beta}{\alpha}i-\frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{\beta^2}{\alpha^2}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cdot\frac{\beta^3}{\alpha^3}i+\ldots\ldots\right] \text{(1)}\\&=\alpha^n\left[1-\frac{n(n-1)\beta^2}{1.2.\alpha^2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\beta^4}{1.2.3.4.\alpha^4}-\ldots\ldots\right]\\&\qquad+\alpha^n\left[\frac{n\beta}{\alpha}-\frac{n(n-1)(n-2)\beta^3}{1.2.3.\alpha^3}+\ldots\ldots\right]i\end{aligned}$$

y puesto que α y β son reales, el resultado será de la forma: $A+Bi$, siendo reales A y B.

Para desarrollar $(\alpha-\beta i)^n$, basta cambiar β en $-B$ en el anterior cálculo, lo que conduce á cambiar B en $-B$, puesto que α entra elevado á potencias pares en A é impares en B; luego:

$$(\alpha-\beta i)^n=A-Bi$$

reuniendo ambas fórmulas:

$$(\alpha\pm\beta i)^n=A\pm Bi \tag{434}$$

luego: *las potencias semejantes de dos imaginarias conjugadas son imaginarias conjugadas.*

Para pasar á las potencias negativas observaremos que:

$$(\alpha+\beta i)(\alpha-\beta i)=\alpha^2+\beta^2 \quad \text{luego} \quad (\alpha\pm\beta i)^{-n}=\frac{(\alpha\mp\beta i)^n}{(\alpha^2+\beta^2)^n}$$

(1) Recordando que se tiene:

$$(i)^1=+i, \quad (i)^2=-1, \quad (i)^3=-i, \quad (i)^4=+1$$

elevando i á potencias superiores, resultará uno de los cuatro resultados anteriores, y designando por k un número entero positivo cualquiera, se tendrá:

$$(i)^{4k}=[(i)^4]^k=+1, \quad (i)^{4k+1}=(i)^{4k}\times i=+i, \quad (i)^{4k+2}=i^{4k}(i)^2=-1, \quad (i)^{4k+3}=(i)^{4k}i^3=-i$$

Estas fórmulas se emplearán según que la división del exponente entre 4 dé por resta 0, 1, 2 ó 3, lo que encierra todos los casos.

Se ve que las potencias *pares* de i son *reales* é iguales á ±1, según que el exponente sea de la forma $4k$ ó $4k+2$, y las *impares* son *imaginarias* é iguales á $\pm i$, según que el exponente sea de la forma $4k+1$ ó $4k+3$.

De consiguiente:

$$(a\pm\beta i)^{-n}=\frac{A\mp Bi}{(a^2+\beta^2)^n} \qquad (435)$$

Las transformaciones (434), (435) son ciertas cualquiera que sea n, pero cuando es negativo ó fraccionario, A y B entrañan una infinidad de términos.

Además hemos demostrado (Capítulo IV) la generalidad de la fórmula de Newton para cualquier exponente.

254. Si se multiplican entre sí las dos relaciones comprendidas en la (434), resulta:

$$(a^2\pm\beta^2)^n=A^2+B^2 \qquad (436)$$

lo que demuestra que: *una potencia cualquiera entera y positiva de una suma de cuadrados, puede descomponerse en otra suma de cuadrados.*

255. Como conclusión de lo que acaba de decirse, de acuerdo con los párrafos (250), (251) y (253), si consideramos el polinomio entero en x de coeficientes reales ó imaginarios y de la forma:

$$F(x)=A_0x^m+A_1x^{m-1}+\ldots\ldots+A_{m-1}x+A_m \qquad (437)$$

y sustituimos por x el valor imaginario $a+\beta i$, el resultado de la sustitución será una imaginaria de la forma $P+Qi$ y se tendrá:

$$F(a+\beta i)=P+Qi$$

Si se sustituye $a-\beta i$, se presentan dos casos:

1º *Los coeficientes del polinomio son reales.* En este caso el término general A_nx^n que en un principio era $A_n(a+\beta i)^n$, con la nueva sustitución se cambia en: $A_n(a-\beta i)^n$; de consiguiente el nuevo resultado es *conjugado* del anterior y tendrá la forma $P-Qi$.

2º *Los coeficientes son imaginarios.* En este segundo caso se tendrán por resultados obtenidos en las dos sustituciones y siendo el coeficiente general A_n de la forma a_n+b_ni:

$$(a_n+b_ni)(a+\beta i)^n,\quad (a_n+b_ni)(a-\beta i)^n$$

resultados que no son conjugados y de consiguiente tampoco lo serán los resultados finales.

256. **Extracción de raíces.** Cuando se quiere reducir la expresión radical $\sqrt[n]{a\pm\beta i}$ á la forma $A\pm B$, se reemplaza por la potencia fraccionaria $(a+\beta i)^{\frac{1}{n}}$ que se desarrolla como se ha explicado; el álgebra no presenta otro método general para esta transformación, pero cuando n es múltiplo de 2, puede efectuarse sin recurrir á las series.

Sea la expresión: $\sqrt{a+\beta i}$ y el problema consiste en hallar una cantidad imaginaria $x+yi$ que elevada al cuadrado reproduzca $a+\beta i$, tendremos de consiguiente:

$$a+\beta i=(x+yi)^2 \text{ que desarrollando produce } a+\beta i=x^2+2xyi-y^2$$

De esta ecuación se obtiene (párrafo 248):

$$a=x^2-y^2,\quad \beta=2xy$$

y de consiguiente por eliminación resulta:

$$y=\frac{B}{2x},\quad 4x^4-4ax^2-\beta^2=0$$

Despejando x de la segunda ecuación que es bicuadrada, se tendrá:

$$x=\pm\sqrt{\frac{a\pm\sqrt{a^2+\beta^2}}{2}}$$

y puesto que x é y sólo deben admitir valores reales, se tendrá:

$$x=\pm\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+\beta^2}}{2}} \text{ y de consiguiente } y=\frac{\beta}{2x}=\frac{\beta}{\pm 2\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+\beta^2}}{2}}}$$

$$=\pm\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+\beta^2}}{2}}$$

Finalmente:

$$\sqrt{a+\beta i}=\pm\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+\beta^2}}{2}}+i\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+\beta^2}}{2}}\right)$$

y siguiendo un procedimiento análogo:

$$\sqrt{a-\beta i}=\pm\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+\beta^2}}{2}}-i\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+\beta^2}}{2}}\right)$$

Teniendo cuidado de combinar los signos de los valores de x é y de tal suerte que el producto xy sea $\frac{\beta}{2}$.

Si se tiene:

$$\sqrt[4]{a\pm\beta i},\quad \sqrt[8]{a\pm\beta i},\quad \sqrt[16]{a\pm\beta i}, \text{ etc.}$$

el empleo repetido de las fórmulas halladas, es decir, la extracción sucesiva de raíces cuadradas, resuelve el problema.

Como se ve, las raíces cuadradas de dos imaginarias conjugadas son también imaginarias conjugadas.

FORMA TRIGONOMÉTRICA DE LAS CANTIDADES IMAGINARIAS.

257. Se tiene idénticamente:

$$x+yi=\sqrt{x^2+y^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}i\right)$$

y como la suma de los cuadrados de

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ é } \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

es igual á 1, se puede poner:

$$\sqrt{x^2+y^2}=\rho,\quad \cos\omega=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{\rho},\quad \operatorname{sen}\omega=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{y}{\rho} \qquad (438)$$

y tendremos:

$$x+yi=\rho(\cos\omega+\operatorname{sen}\omega.i)$$