Esta expresión puede escribirse *simbólicamente:*

$$\rho_\omega = \rho\,(\cos\omega + \operatorname{sen}\omega.i) \tag{439}$$

La cantidad $\rho$ se llama módulo, el ángulo $\omega$ el argumento de la imaginaria.

Como se tiene (párrafo 249–1º) que el producto de dos imaginarias conjugadas es igual al cuadrado del módulo común, si se supone el módulo $\rho = 1$, resultará:

$$\frac{1}{\cos\omega + \operatorname{sen}\omega.i} = \cos\omega - \operatorname{sen}\omega.i$$

luego *dos imaginarias trigonométricas conjugadas son recíprocas.*

TEOREMA. *Dos cantidades imaginarias trigonométricas son iguales si lo son sus módulos y la diferencia de sus argumentos es 0 ó en general un múltiplo par de semicircunferencias.*

Supongamos las dos cantidades imaginarias iguales:

$$\rho\,(\cos\omega + \operatorname{sen}\omega.i) = \rho_1\,(\cos\omega_1 + \operatorname{sen}\omega_1.i)$$

Igualando las partes reales y las imaginarias:

$$\rho\cos\omega = \rho_1\cos\omega_1, \quad \rho\operatorname{sen}\omega = \rho_1\operatorname{sen}\omega_1$$

Elevando estas ecuaciones al cuadrado y sumándolas ordenadamente, se tiene:

$$\rho = \rho_1 \tag{440}$$

luego:

$$\operatorname{sen}\omega = \operatorname{sen}\omega_1, \quad \cos\omega = \cos\omega_1$$

y como los arcos $\omega$ y $\omega_1$ tienen igual seno é igual coseno, debe tenerse:

$$\omega - \omega_1 = 2k\pi \tag{441}$$

Así pues, la igualdad de las expresiones imaginarias hace forzosas las relaciones (440) y (441) pudiendo $k$ crecer de 0 al $\infty$; dividiendo las (438) una por otra, resulta:

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{y}{x} \quad \text{ó bien} \quad \omega = \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{y}{x}\right) \tag{442}$$

TEOREMA. *Dos cantidades imaginarias trigonométricas son iguales y de signos contrarios cuando tienen igual módulo y sus argumentos difieren $\pi$ ó un número impar de semicircunferencias.*

La demostración es bastante fácil y el lector la hallará sin dificultad.

TEOREMA. *Para que una imaginaria trigonométrica sea nula, es necesario y suficiente que su módulo sea nulo.*

TEOREMA. *Dos cantidades imaginarias trigonométricas conjugadas tienen módulos iguales y sus argumentos tienen por suma $2\pi$ ó un número entero cualquiera de circunferencias.*

258. El módulo $\rho$ se toma siempre positivo y tiene un valor definido que es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de $x$ é $y$.

En cuanto al argumento $\omega$ es susceptible de una infinidad de valores; en efecto, está determinado por su seno y por su coseno de acuerdo con las fórmulas (438). Tiene, pues, para satisfacer á esas condiciones, *un valor único* entre 0 y $2\pi$, pero sin que varíe la expresión imaginaria puede agregarse á $\omega$ un múltiplo cualquiera de $2\pi$. Si pues designamos por $\omega_0$ el primer valor de $\omega$ comprendido entre 0 y $2\pi$ y por $k$ un entero cualquiera positivo, negativo ó nulo, se tendrá:



$$\omega = \omega_0 + 2k\pi$$

259. Si designamos por R un módulo cualquiera, tendremos:

$$+\mathrm{R} = \mathrm{R}\,(\cos 0 + \operatorname{sen} 0.i), \quad -\mathrm{R} = (\mathrm{R}\cos\pi + \operatorname{sen}\pi.i), \quad \mathrm{R}i = \mathrm{R}\left(\cos\frac{\pi}{2} + \frac{\operatorname{sen}\pi}{2}.i\right)$$

$$-\mathrm{R}i = \mathrm{R}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}.i\right)$$

Como vemos, las imaginarias trigonométricas entrañan además de las *imaginarias complexas*, las *imaginarias simples* y las *cantidades reales.*

Ya desde luego vemos las incalculables ventajas que presta la representación trigonométrica de las cantidades imaginarias y la generalidad que revisten sus fórmulas; más adelante vamos á seguir presenciando la maravillosa ayuda que á cada rato prestan al análisis.

260. TEOREMAS FUNDAMENTALES. I. *El módulo de la suma de varias cantidades imaginarias está comprendido entre la suma y la diferencia de los módulos de los sumandos.*

Tenemos (párrafo 250):

$$\rho_1\,(\cos\omega_1 + \operatorname{sen}\omega_1.i) + \rho_2\,(\cos\omega_2 + \operatorname{sen}\omega_2.i) = \mathrm{R}\,(\cos\varphi + \operatorname{sen}\varphi.i)$$

luego:

$$\rho_1\cos\omega_1 + \rho_2\cos\omega_2 = \mathrm{R}\cos\varphi, \quad \rho_2\operatorname{sen}\omega_1 + \rho_2\operatorname{sen}\omega_2 = \mathrm{R}\operatorname{sen}\varphi \tag{443}$$

Elevando al cuadrado, sumando ordenadamente y extrayendo raíz cuadrada:

$$\mathrm{R} = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 \pm 2\rho_1\rho_2\cos(\omega_1 - \omega_2)} \tag{444}$$

Los límites superior é inferior de $\cos(\omega_1 - \omega_2)$, son $+1$ y $-1$, y se tendrá para el módulo R que es *esencialmente positivo* en el caso de la adición y en el de la sustracción:

$$\mathrm{R} < \text{ó} = \sqrt{(r^2 + r'^2)} \quad \text{ó bien} \quad \mathrm{R} < \text{ó} = r + r'$$

y

$$\mathrm{R} > \text{ó} = \sqrt{(r^2 - r'^2)} \quad \text{ó bien} \quad \mathrm{R} > \text{ó} = \pm(r - r')$$

II. *El módulo de la suma de varias cantidades es menor que la suma de los módulos de los sumandos.*

No obstante que atendiendo al teorema anterior inmediatamente se demostraría la proposición enunciada, vamos á efectuar la demostración apelando á otro procedimiento.

Se tiene considerando $n$ sumandos:

$$\rho_1(\cos\omega_1 + \operatorname{sen}\omega_1.i) + \rho_2(\cos\omega_2 + \operatorname{sen}\omega_2.i) + \ldots\ldots + \rho_n(\cos\omega_n + \operatorname{sen}\omega_n.i)$$
$$= \mathrm{R}\,(\cos\varphi + \operatorname{sen}\varphi.i)$$

luego:

$$\mathrm{R}\operatorname{sen}\varphi = \rho_1\operatorname{sen}\omega_1 + \rho_2\operatorname{sen}\omega_2 + \ldots\ldots + \rho_3\operatorname{sen}\omega_3 = \sum_{r=1}^{r=n}\rho_r\operatorname{sen}\omega_r$$

$$\mathrm{R}\cos\varphi = \rho_1\cos\omega_1 + \rho_2\cos\omega_2 + \ldots\ldots + \rho_3\cos\omega_3 = \sum_{r=1}^{r=n}\rho_r\cos\omega_r$$

Elevando al cuadrado y sumando ordenamente:

$$\left.\begin{aligned} R^2 = {} & \rho_1^2+\rho_2^2+\ldots\ldots+\rho_n^2+2\rho_1\rho_2\cos(\omega_1-\omega_2)+\ldots\ldots \\ & +2\rho_1\rho_n\cos(\omega_1-\omega_n)+2\rho_1\rho_3\cos(\omega_1-\omega_3)+\ldots\ldots \\ & +2\rho_2\rho_n\cos(\omega_2-\omega_n)+\ldots\ldots+2\rho_n\rho_{n-1}\cos(\omega_{n-1}-\omega_n) \end{aligned}\right\} \qquad (445)$$

ó *simbólicamente:*

$$\begin{aligned} R^2 &= \sum_{r=1}^{r=n}(\rho_r^2+2\rho_r\rho_{r+1})-\sum_{r=1}^{r=n}2\rho_r\rho_{r+1}[1-\cos(\omega_{r+1}-\omega_r)] \\ &= \sum_{r=1}^{r=n}(\rho_r^2+2\rho_r\rho_{r+1})-4\sum_{r=1}^{r=n}\rho_r\rho_{r+1}\,\text{sen}^2\tfrac{1}{2}(\omega_{r+1}-\omega_r) \end{aligned}$$

luego:

$$R^2<\sum_{r=1}^{r=n}(\rho_r^2+2\rho_r\rho_{r+1})$$

Pero se tiene:

$$\sum_{r=1}^{r=n}(\rho_r^2+2\rho_r\rho_{r+1})=(\rho_1+\rho_2+\ldots\ldots+\rho_n)^2$$

finalmente:

$$R<\rho_1+\rho_2+\ldots\ldots+\rho_n$$

III. 1º *El módulo del producto de varias magnitudes imaginarias es igual al producto de los módulos de los factores y el argumento es igual á la suma de los argumentos de dichos factores.* 2º *El módulo del cociente de dos cantidades imaginarias es igual al cociente de los módulos del dividendo y del divisor, y el argumento es la diferencia entre el argumento del dividendo menos el del divisor.*

1º Se tiene:

$$\begin{aligned} & \rho_1(\cos\omega_1+\text{sen}\,\omega_1.i)\times\rho_2(\cos\omega_2+\text{sen}\,\omega_2.i)= \\ & =\rho_1\rho_2[(\cos\omega_1\cos\omega_2-\text{sen}\,\omega_1\,\text{sen}\,\omega_2)+(\text{sen}\,\omega_1\cos\omega_2+\cos\omega_1\,\text{sen}\,\omega_2).i] \\ & =\rho_1\rho_2[\cos(\omega_1+\omega_2)+\text{sen}(\omega_1+\omega_2).i] \end{aligned}$$

Tomando otro nuevo factor:

$$\begin{aligned} & \rho_1(\cos\omega_1+\text{sen}\,\omega_1.i)\,\rho_2(\cos\omega_2+\text{sen}\,\omega_2.i)\,\rho_3(\cos\omega_3+\text{sen}\,\omega_3.i)= \\ & =\rho_1\rho_2[\cos(\omega_1+\omega_2)+\text{sen}(\omega_1+\omega_2).i]\,\rho_3(\cos\omega_3+\text{sen}\,\omega_3.i) \\ & =\rho_1\rho_2\rho_3[\cos(\omega_1+\omega_2+\omega_3)+\text{sen}(\omega_1+\omega_2+\omega_3).i] \end{aligned}$$

En general:

$$\underset{\omega_1}{\rho_1}\times\underset{\omega_2}{\rho_2}\times\underset{\omega_3}{\rho_3}\ldots\ldots\underset{\omega_n}{\rho_n}=\rho_1\rho_2\rho_3\ldots\ldots\rho_n\left(\cos\sum_{r=1}^{r=n}\omega_r+\text{sen}\sum_{r=1}^{r=n}\omega_r.i\right) \qquad (446)$$

relación que demuestra el teorema enunciado.

Resulta de aquí que: 1º *Un producto de factores imaginarios no altera cuando cambia el orden de los factores.* 2º *El módulo del producto es igual al producto de los módulos de los factores.*

2º Se tiene, en efecto:

$$\begin{aligned} \frac{\rho_1(\cos\omega_1+\text{sen}\,\omega_1.i)}{\rho_2(\cos\omega_2+\text{sen}\,\omega_2.i)} &= \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos\omega_1+\text{sen}\,\omega_1.i)(\cos\omega_2-\text{sen}\,\omega_2.i) \\ &= \frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\omega_1-\omega_2)+\text{sen}(\omega_1-\omega_2).i] \end{aligned}$$



**261. Elevación á potencias.** Suponiendo que:

$$\rho_1=\rho_2=\ldots\ldots=\rho_n=\rho,\quad \omega_1=\omega_2=\ldots\ldots=\omega_n=\omega$$

es decir, si todos los factores son iguales, se tendrá en la fórmula (446):

$$(x+yi)^n=\rho^n(\cos n\omega+\text{sen}\,n\omega.i) \qquad (447)$$

luego *la $n^a$ potencia de una cantidad imaginaria es otra imaginaria cuyo módulo es la $n^a$ potencia del módulo de la primera y cuyo argumento es el argumento de la primera tomado* n *veces.*

Como se sabe que

$$x+yi=\rho(\cos\omega+\text{sen}\,\omega.i),\quad (x+yi)^n=\rho^n(\cos\omega+\text{sen}\,\omega.i)^n$$

Sustituyendo (fórmula 447):

$$\rho^n(\cos n\omega+\text{sen}\,n\omega.i)=\rho^n(\cos\omega+\text{sen}\,\omega.i)^n$$

ó bien:

$$(\cos\omega+\text{sen}\,\omega.i)^n=\cos n\omega+\text{sen}\,n\omega.i \qquad (448)$$

que es la notable fórmula de MOIVRE, geómetra francés que la descubrió (1667-1754) y con la cual para elevar á una potencia entera y positiva el binomio imaginario trigonométrico $x+yi=\cos\omega+\text{sen}\,\omega.i$, se multiplica el arco por el grado de la potencia.

Como el desarrollo de $\cos\omega-\text{sen}\,\omega.i$ sólo puede diferir del de $\cos\omega+\text{sen}\,\omega.i$ en los signos de los términos en que $i$ entre elevado á una potencia impar, también se tendrá:

$$(\cos\omega-\text{sen}\,\omega.i)^n=\cos n\omega-\text{sen}\,n\omega.i$$

**262. Generalidad de la fórmula de Moivre.** Demostrada esta fórmula para el caso de un exponente entero y positivo, estudiaremos los demás.

*Exponente entero y negativo.* Tendremos:

$$\begin{aligned} (\cos\omega+\text{sen}\,\omega.i)^{-m} &= \frac{1}{(\cos\omega+\text{sen}\,\omega.i)^m}=\frac{1}{\cos m\omega+\text{sen}\,m\omega.i}=\frac{\cos m\omega-\text{sen}\,m\omega.i}{\cos^2 m\omega+\text{sen}^2 m\omega} \\ &= \cos m\omega-\text{sen}\,m\omega.i=\cos(-m\omega)+\text{sen}(-m\omega).i \end{aligned} \qquad (449)$$

*Exponente fraccionario positivo ó negativo.* Elevando á la potencia $n$ entera la cantidad

$$\cos\frac{\omega}{n}+\frac{\text{sen}\,\omega}{n}.i \text{ dará } \left(\cos\frac{\omega}{n}+\frac{\text{sen}\,\omega}{n}.i\right)^n=\cos\omega+\text{sen}\,\omega.i$$

extrayendo la raíz $n^a$ y transportando:

$$(\cos\omega+\text{sen}\,\omega.i)^{\frac{1}{n}}=\cos\frac{\omega}{n}+\text{sen}\frac{\omega}{n}.i \qquad (450)$$

Elevando la ecuación á la potencia $m$ entera:

$$(\cos\omega+\text{sen}\,\omega.i)^{\frac{m}{n}}=\cos\left(\frac{m\omega}{n}\right)+\text{sen}\left(\frac{m\omega}{n}\right).i \qquad (451)$$

Como $m$ y $n$ pueden tomarse con cualquier signo, la fórmula es general; pero como la potencia indicada en el primer miembro de la fórmula puede ser susceptible de *varios* valores, hasta ahora sólo hemos demostrado que el segundo miembro de la fórmula es uno de dichos valores; adelante volveremos á tocar este punto.

Al verificarse la fórmula obtenida para cualquier valor de $\omega$ poniendo por $\omega$, $-\omega$, como se tiene:

$$\cos(-\omega)=\cos\omega,\quad \text{sen}(-\omega)=-\text{sen}\,\omega$$

resultará:

$$(\cos\omega-\text{sen}\,\omega i)^m=\cos m\omega-\text{sen}\,m\omega i$$

y combinando ambas fórmulas:

$$(\cos\omega\pm\text{sen}\,\omega.i)^m=\cos m\omega\pm\text{sen}\,m\omega.i \qquad (452)$$

263. De las precedentes fórmulas podemos deducir algunas propiedades:

$$\cos(\omega_1+\text{sen}\,\omega_1.i)(\cos\omega_2-\text{sen}\,\omega_2.i)=[\cos(\omega_1)+\text{sen}(\omega_1).i][\cos(-\omega_2)+\text{sen}(-\omega_2).i]$$

luego (fórmula 446):

$$[\cos(\omega_1)+\text{sen}(\omega_1).i][\cos(\omega_2)-\text{sen}(\omega_2).i]=\cos(\omega_1-\omega_2)+\text{sen}(\omega_1-\omega_2).i$$

Si $\omega_1=\omega_2$, resultará:

$$[\cos(\omega_1)+\text{sen}(\omega_1).i][\cos(\omega_1)-\text{sen}(\omega_1).i]=1$$

como hallamos por el párrafo (257).

264. Recurriendo á las formas trigonométricas para conocer el resultado de elevar á una potencia una cantidad imaginaria, hemos hallado las fórmulas:

$$(\cos\omega\pm\text{sen}\,\omega.i)^m=\cos m\omega\pm\text{sen}\,m\omega.i,\quad (\cos\omega\pm\text{sen}\,\omega.i)^{-m}=\cos(-m\omega)\pm\text{sen}(-m\omega).i$$

$$(\cos\omega\pm\text{sen}\,\omega.i)^{\frac{m}{n}}=\cos\left(\frac{m\omega}{n}\right)\pm\text{sen}\left(\frac{m\omega}{n}\right).i$$

Las dos primeras no dan lugar á ninguna observación; no así la tercera, que escrita como está, da lugar á la observación que hicimos en el párrafo (262).

Sea

$$\cos(\omega+\text{sen}\,\omega.i)^{\frac{m}{n}} \qquad (453)$$

siendo $n$ un número entero positivo ó negativo, se tendrá:

$$(\cos\omega\pm\text{sen}\,\omega.i)^{\frac{m}{n}}=(\cos m\omega\pm\text{sen}\,m\omega.i)^{\frac{1}{n}} \qquad (454)$$

Vamos á averiguar si esta última expresión puede reducirse á la forma:

$$\cos z+\text{sen}\,z.i \qquad (455)$$

y si esto sucede se tendrá:

$$\cos m\omega+\text{sen}\,m\omega.i=\cos nz+\text{sen}\,nz.i \qquad (456)$$

Así pues, $m\omega$ y $nz$ deben tener el mismo seno y el mismo coseno, lo que exige la relación:

$$nz-m\omega=2k\pi \quad \text{de donde} \quad z=\frac{m\omega+2k\pi}{n} \qquad (457)$$

luego:

$$(\cos\omega+\text{sen}\,\omega.i)^{\frac{m}{n}}=\cos\frac{m\omega+2k\pi}{n}+\text{sen}\,\frac{m\omega+2k\pi}{n}.i \qquad (458)$$



Así pues, observaremos que la fórmula antes hallada no es general, pero si nos fijamos en que:

$$\cos\frac{m\omega+2k\pi}{n}+\text{sen}\,\frac{m\omega+2k\pi}{n}.i=\left(\cos\frac{m\omega}{n}+\text{sen}\,\frac{m\omega}{n}.i\right)\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+\text{sen}\,\frac{2k\pi}{n}.i\right) \quad (459)$$

inferimos que se podrá aplicar la fórmula de *Moivre* al caso de un exponente fraccionario como si fuera entero, siempre que multipliquemos el resultado que es la *determinación aritmética* de:

$$(\cos\omega+\text{sen}\,\omega.i)^{\frac{m}{n}}$$

por las raíces $n^{\text{simas}}$ de 1, que evidentemente da el segundo factor de la fórmula (459), pues suponiendo: $\omega=0$, $m=1$ y de consiguiente $\text{sen}\,\omega=0$, $\cos\omega=1$, resulta por la fórmula (458):

$$\sqrt[n]{1}=\cos\frac{2k\pi}{n}+\text{sen}\,\frac{2k\pi}{n}.i \qquad (459')$$

raíces que en el párrafo siguiente demostraremos que son en número de $n$.

Finalmente, el teorema será cierto en el presente caso, si nos limitamos á dicha *determinación aritmética.*

En general, designando una imaginaria por $\rho_\omega$, su $n$.ª potencia por $\rho_\omega^n$, se tendrá:

$$\rho_\omega^n=\rho^n(\cos\omega+\text{sen}\,\omega.i)^n \quad \text{ó bien} \quad \rho_\omega^n=\rho^n(\cos n\omega+\text{sen}\,n\omega.i) \qquad (459'')$$

265. **Extracción de raíces.** Sea

$$R(\cos\varphi+\text{sen}\,\varphi.i)$$

la imaginaria propuesta y

$$z=\rho(\cos\omega+\text{sen}\,\omega.i)$$

su raíz *enésima.*

Se tiene por definición de raíz:

$$\rho^n(\cos\omega+\text{sen}\,\omega.i)^n=R(\cos\varphi+\text{sen}\,\varphi.i)$$

y según la fórmula de Moivre:

$$\rho^n(\cos n\omega+\text{sen}\,n\omega.i)=R(\cos\varphi+\text{sen}\,\varphi.i)$$

que produce:

$$\rho^n\cos n\omega=R\cos\varphi,\quad \rho^n\,\text{sen}\,n\omega=R\,\text{sen}\,\varphi$$

elevando al cuadrado y sumando ordenadamente:

$$\rho^{2n}=R^2 \quad \text{ó bien} \quad \rho^n=R,\quad \rho=\sqrt[n]{R},\quad \cos n\omega=\cos\varphi,\quad \text{sen}\,n\omega=\text{sen}\,\varphi$$

es decir:

$$\omega=\frac{\varphi+2k\pi}{n}$$

de consiguiente:

$$z=\rho(\cos\omega+\text{sen}\,\omega.i)=\sqrt[n]{R}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+\text{sen}\,\frac{\varphi+2k\pi}{n}.i\right) \qquad (460)$$

que comprende las $n$ raíces de:

$$R(\cos\varphi+\text{sen}\,\varphi.i)$$

Deducimos de la precedente relación, que *toda imaginaria tiene* n *raíces enésimas* sin perder de vista que $\sqrt[n]{R}$ sólo conserva un solo valor por ser R esencialmente positivo.

En efecto, dando á $k$ los valores:

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ n-1$$

el argumento de la expresión es correlativamente:

$$\frac{\varphi}{n},\ \frac{\varphi+2\pi}{n},\ \ldots\ldots,\ \frac{\varphi+2(n-1)\pi}{n} \qquad (461)$$

y como la diferencia entre dos de los valores precedentes es menor que una circunferencia, los senos y cosenos tendrán valores forzosamente diversos y $z$ tendrá $n$ valores diversos.

Demostraremos *que no puede tener más de* n.

Supongamos que se dé á $k$ el valor $nb+c$, designando por $c$ uno cualquiera de los valores: 0, 1, 2, ......, $(n-1)$, por $b$ un número entero y se tendrá:

$$\frac{\varphi+2k\pi}{n}=\frac{\varphi+2nb\pi+2\pi c}{n}=2\pi b+\frac{\varphi+2\pi c}{n}$$

luego:

$$\cos\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)=\cos\left(\frac{\varphi+2\pi c}{n}\right),\quad \operatorname{sen}\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)=\operatorname{sen}\left(\frac{\varphi+2\pi c}{n}\right)$$

y el valor de $z$ será (fórmula 460):

$$z=\sqrt[n]{R}\left[\cos\left(\frac{\varphi+2\pi c}{n}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{\varphi+2\pi c}{n}\right)i\right]$$

que es uno de los $n$ obtenidos al suponer: $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ (n-1)$.

Vemos, pues, que: *la raíz de una cantidad imaginaria tiene tantos valores diversos como unidades hay en su índice, y que de acuerdo con el párrafo* (259) *lo mismo sucederá con las cantidades reales* [1].

N. B.—Si se dan á $k$ los valores negativos: $-1,\ -2,\ -3,\ \ldots\ldots$, en la fórmula (460) se obtienen para el segundo miembro los $n$ valores ya encontrados (461) pero en orden inverso. En efecto, si $k=-1$, se tiene:

$$\frac{\varphi+2k\pi}{n}=\frac{\varphi}{n}-\frac{2\pi}{n}=\frac{\varphi+2(n-1)\pi}{n}-2\pi$$

Como vemos, pues, que el primer miembro difiere $2\pi$ del último valor (461), el mismo resultado se obtiene suponiendo: $k=-1$ ó $k=(n-1)$ y análogamente $k=-2$ que $k=n-2$, etc. De consiguiente basta dar á $k$, contando desde cero valores iguales dos á dos y de signos contrarios hasta que se obtengan $n$ raíces distintas.

266. Finalmente, si se quisiera extraer raíz $n$ á la expresión:

$$[r(\cos\omega+\operatorname{sen}\omega i)]^p=r^p(\cos\omega p+\operatorname{sen}\omega p i)$$

se tendría:

$$\sqrt[m]{[r(\cos\omega+\operatorname{sen}\omega.i)]^p}=[r(\cos\omega+\operatorname{sen}\omega.i)]^{\frac{p}{m}}=r^{\frac{p}{m}}\left(\cos\frac{p\omega+2k\pi}{m}+\operatorname{sen}\frac{p\omega+2k\pi}{m}.i\right)$$

[1] Con los anteriores razonamientos queda ya demostrado de una manera general el teorema del párrafo 25, Capítulo III, sobre el que de nuevo volveremos á insistir al hablar de las ecuaciones binomias como anunciamos en el párrafo antedicho.



y sustituyendo por $k$ los $m$ valores: 0, 1, 2, ......, $(m-1)$ se obtendrán todos los valores diversos del segundo miembro.

267. Si en la fórmula (459) sólo se considera la raíz *enésima* correspondiente á $k=0$, se tendrá la (451):

$$(\cos\omega+\operatorname{sen}\omega.i)^{\frac{m}{n}}=\cos\frac{m\omega}{n}+\operatorname{sen}\frac{m\omega}{n}.i$$

También de la misma relación (459) se deduce:

$$(\cos\omega+\operatorname{sen}\omega.i)^{\frac{1}{n}}=\left(\cos\frac{\omega}{n}+\operatorname{sen}\frac{\omega}{n}.i\right)\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}.i\right)$$

268. **Raíces imaginarias de la unidad.** Hemos hallado la fórmula (459'):

$$\sqrt[n]{1}=\cos\frac{2k\pi}{n}+\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}.i$$

que hace conocer las $n$ raíces *enésimas* de la unidad positiva.

Si suponemos en la fórmula (459): $\omega=\pi$, $m=1$, tendremos:

$$\sqrt[n]{-1}=\cos\frac{(2k+1)\pi}{n}+\operatorname{sen}\frac{(2k+1)\pi}{n}.i \qquad (462)$$

que da á conocer las $n$ raíces *enésimas* de la unidad negativa.

Para proceder al estudio de las fórmulas anteriores, lo dividiremos en dos partes estudiándolas separadamente.

I. Para obtener las $n$ raíces diversas de 1, basta suponer:

$$k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ (n-1)\quad \text{ó bien}\quad k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \ldots\ldots$$

en este segundo caso puede simplificarse la sustitución escribiendo la fórmula así:

$$\sqrt[n]{1}=\cos\frac{2k\pi}{n}\pm\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}.i$$

y dando á $k$ los valores 0, 1, 2, 3, ...... teniendo cuenta del doble signo hasta obtener $n$ raíces diversas, puesto que la sustitución de dos valores iguales y de signos contrarios sólo hace cambiar el signo del segundo término. Vamos á averiguar hasta qué sustitución debemos llegar para obtener esos $n$ valores.

1º *n par.* Para obtener los $n$ valores diversos basta suponer:

$$k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots,\ \frac{n}{2}$$

lo que da, á causa del doble signo: $2\left(\frac{n}{2}+1\right)=n+2$ resultados, pero que se reducen á $n$ porque los dos resultados que provienen de suponer: $k=0$ y $k=\frac{n}{2}$ no constituyen respectivamente sino uno solo, $+1$ y $-1$, puesto que el segundo término se nulifica, *las demás raíces son imaginarias conjugadas* y *recíprocas* (párrafo 257).

2º *n impar.* Basta suponer:

$$k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots,\ \frac{n-1}{2}\quad \text{se obtienen por todo:}\quad 2\left(\frac{n-1}{2}+1\right)=n+1$$