resultados, pero que se reducen á n porque los dos que produce la suposición $k=0$ constituyen uno solo que es $+1$; *las demás raíces son imaginarias conjugadas* y *recíprocas.*

II. También podremos escribir la fórmula (462) así:

$$\sqrt[n]{-1}=\cos\frac{(2k+1)\pi}{n}\pm\operatorname{sen}\frac{(2k+1)\pi}{n}.i \tag{463}$$

1º *n par.* Basta sustituir:

$$k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ \frac{n}{2}-1$$

y resultan n valores *imaginarios conjugados* y *recíprocos.*

2º *n impar.* Basta suponer:

$$k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ \frac{n-1}{2}\quad\text{se obtienen entonces:}\quad 2\left(\frac{n-1}{2}+1\right)=n+1$$

resultados que se reducen á n porque los dos que se obtienen al suponer $k=\frac{n-1}{2}$ constituyen uno solo -1 al ser nulo en dicho caso el segundo término; *las demás raíces serán imaginarias conjugadas* y *recíprocas.*

*269. **Cálculo de los radicales algebraicos.** I. Suponiendo: $\rho_\omega=A$, $r_\phi=B$ en la (460) y conviniendo con *Cauchy* en representar la raíz n de una imaginaria A con el símbolo $\sqrt[n]{[(A)]}$ se tiene:

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{[(A)]}&=\sqrt[n]{\rho[(\cos\omega+\operatorname{sen}\omega.i)]}=\rho^{\frac{1}{n}}(\cos\omega+\operatorname{sen}\omega.i)^{\frac{1}{n}}\\&=\rho^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\omega}{n}+\operatorname{sen}\frac{\omega}{n}.i\right)\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}.i\right)\end{aligned} \tag{464}$$

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{[(B)]}&=\sqrt[n]{r[(\cos\varphi+\operatorname{sen}\varphi.i)]}=r^{\frac{1}{n}}(\cos\varphi+\operatorname{sen}\varphi.i)^{\frac{1}{n}}\\&=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\varphi}{n}+\operatorname{sen}\frac{\varphi}{n}.i\right)\left(\cos\frac{2k_1\pi}{n}+\operatorname{sen}\frac{2k_1\pi}{n}.i\right)\end{aligned} \tag{465}$$

Multiplicando la fórmula (464) por la (465) ordenadamente, resulta:

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{[(A)]}\times\sqrt[n]{[(B)]}&=\rho^{\frac{1}{n}}r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\omega+\varphi}{n}+\operatorname{sen}\frac{\omega+\varphi}{n}.i\right)\times\\&\times\left(\cos\frac{2(k+k_1)\pi}{n}+\operatorname{sen}\frac{2(k+k_1)\pi}{n}.i\right)\end{aligned} \tag{466}$$

Se tiene, por otra parte:

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{[(AB)]}&=(AB)^{\frac{1}{n}}=\rho^{\frac{1}{n}}r^{\frac{1}{n}}[(\cos\omega+\operatorname{sen}\omega.i)(\cos\varphi+\operatorname{sen}\varphi.i)]^{\frac{1}{n}}\\&=\rho^{\frac{1}{n}}r^{\frac{1}{n}}[\cos(\omega+\varphi)]+\operatorname{sen}(\omega+\varphi).i]^{\frac{1}{n}}\\&=\rho^{\frac{1}{n}}r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\omega+\varphi}{n}+\operatorname{sen}\frac{\omega+\varphi}{n}\right)\left(\cos\frac{2k_2\pi}{n}+\operatorname{sen}\frac{2k_2\pi}{n}.i\right)\end{aligned} \tag{467}$$

haciendo $k_2=k+k_1$ y comparando las fórmulas (466) y (467) se infiere:

$$\sqrt[n]{[(A)]}\times\sqrt[n]{[(B)]}=\sqrt[n]{[(AB)]} \tag{468}$$

Es decir, si se multiplica cada valor de $\sqrt[n]{[(A)]}$ por cada uno de los $\sqrt[n]{[(B)]}$ se obtendrán los diversos valores de $\sqrt[n]{[(AB)]}$.

II. Dividiendo las relaciones (464) y (465) se tendrá:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt[n]{[(A)]}}{\sqrt[n]{[(B)]}}&=\frac{\rho^{\frac{1}{n}}}{r^{\frac{1}{n}}}\cdot\frac{\cos\frac{\omega}{n}+\operatorname{sen}\frac{\omega}{n}.i}{\cos\frac{\varphi}{n}+\operatorname{sen}\frac{\varphi}{n}.i}\cdot\frac{\cos\frac{2k\pi}{n}+\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}.i}{\cos\frac{2k_1\pi}{n}+\operatorname{sen}\frac{2k_1\pi}{n}.i}\\&=\frac{\rho^{\frac{1}{n}}}{r^{\frac{1}{n}}}\left(\cos\frac{\omega-\varphi}{n}+\operatorname{sen}\frac{\omega-\varphi}{n}.i\right)\left[\cos\frac{2\pi(k-k_1)}{n}+\operatorname{sen}\frac{2\pi(k-k_1)}{n}.i\right]\end{aligned} \tag{469}$$

Se tiene por otra parte:

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{\left[\left(\frac{A}{B}\right)\right]}&=\left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{\rho^{\frac{1}{n}}}{r^{\frac{1}{n}}}\left(\frac{\cos\omega+\operatorname{sen}\omega.i}{\cos\varphi+\operatorname{sen}\varphi.i}\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{\rho^{\frac{1}{n}}}{r^{\frac{1}{n}}}[\cos(\omega-\varphi)+\operatorname{sen}(\omega-\varphi).i]\\&=\frac{\rho^{\frac{1}{n}}}{r^{\frac{1}{n}}}\left(\cos\frac{\omega-\varphi}{n}+\operatorname{sen}\frac{\omega-\varphi}{n}.i\right)\left(\cos\frac{2k_2\pi}{n}+\operatorname{sen}\frac{2k_2\pi}{n}.i\right)\end{aligned} \tag{470}$$

poniendo $k_2=k-k_1$ y comparando las fórmulas (469) y (470) inferimos:

$$\frac{\sqrt[n]{[(A)]}}{\sqrt[n]{[(B)]}}=\sqrt[n]{\left[\left(\frac{A}{B}\right)\right]}$$

Si pues se divide cada uno de los valores de $\sqrt[n]{[(A)]}$ entre cada uno de los de $\sqrt[n]{[(B)]}$ se obtendrán los diversos valores de $\sqrt[n]{[(\frac{A}{B})]}$.

III. Se tiene:

$$\begin{aligned}\left[\sqrt[n]{[(A)]}\right]^m&=A^{\frac{m}{n}}=\rho^{\frac{m}{n}}(\cos\omega+\operatorname{sen}\omega.i)^{\frac{m}{n}}\\&=\rho^{\frac{m}{n}}\left(\frac{m\omega}{n}+\operatorname{sen}\frac{m\omega}{n}.i\right)\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}.i\right)\end{aligned} \tag{471}$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{[(A^m)]}&=\rho^{\frac{m}{n}}\sqrt[n]{\{[(\cos\omega+\operatorname{sen}\omega.i)^m]\}}=\rho^{\frac{m}{n}}\sqrt[n]{[(\cos m\omega+\operatorname{sen}m\omega.i)]}\\&=\rho^{\frac{m}{n}}(\cos m\omega+\operatorname{sen}m\omega.i)^{\frac{1}{n}}\\&=\rho^{\frac{m}{n}}\left(\cos\frac{m\omega}{n}+\operatorname{sen}\frac{m\omega}{n}.i\right)\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}.i\right)\end{aligned} \tag{472}$$

De las relaciones (471) y (472) se deduce:

$$\left[\sqrt[n]{[(A)]}\right]^m=\sqrt[n]{[(A^m)]}$$

Es decir, si se elevan á la m^a potencia los valores de $\sqrt[n]{[(A)]}$, se obtienen los de $\sqrt[n]{[(A^m)]}$.

IV. Se tiene:

$$\sqrt[m]{\left[\left(\sqrt[n]{[(A)]}\right)\right]}=\rho^{\frac{1}{mn}}\sqrt[m]{\left\{\left[\left(\cos\frac{\omega}{n}+\operatorname{sen}\frac{\omega}{n}.i\right)\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}.i\right)\right]\right\}}$$

$$=\rho^{\frac{1}{mn}}\sqrt[m]{\left[\left(\cos\frac{\omega}{n}+\operatorname{sen}\frac{\omega}{n}.i\right)\right]}\sqrt[m]{\left[\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}.i\right)\right]}$$

$$=\rho^{\frac{1}{mn}}\left(\cos\frac{\omega}{mn}+\operatorname{sen}\frac{\omega}{mn}.i\right)\left(\cos\frac{2k\pi}{mn}+\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{mn}.i\right) \qquad (473)$$

Además se tiene:

$$\sqrt[mn]{[(A)]}=A^{\frac{1}{mn}}=\rho^{\frac{1}{mn}}(\cos\omega+\operatorname{sen}\omega.i)^{\frac{1}{mn}}$$

$$=\rho^{\frac{1}{mn}}\left(\cos\frac{\omega}{mn}+\operatorname{sen}\frac{\omega}{mn}.i\right)\left(\cos\frac{2k\pi}{mn}+\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{mn}.i\right) \qquad (474)$$

De las relaciones (473) y (474) se infiere:

$$\sqrt[m]{\left[\left(\sqrt[n]{[(A)]}\right)\right]}=\sqrt[mn]{[(A)]} \qquad (475)$$

Si pues se extraen las m^{simas} raíces de los n valores de $\sqrt[n]{[(A)]}$, se obtienen los valores de $\sqrt[mn]{[(A)]}$.

APLICACIÓN.

270. Sea el radical de segundo grado:

$$\sqrt{[(a+bi)]}=\rho^{\frac{1}{2}}\sqrt{\cos\omega+\operatorname{sen}\omega.i}$$

$$=\rho^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\omega}{2}+\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}.i\right)(\cos k\pi+\operatorname{sen}k\pi.i)=\pm\rho^{\frac{1}{2}}(\cos\tfrac{1}{2}\omega+\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\omega.i) \qquad (476)$$

Mas se tiene:

$$\cos\omega=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\omega=\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2\sqrt{a^2+b^2}}},\quad \cos\tfrac{1}{2}\omega=\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2\sqrt{a^2+b^2}}},\quad \rho=\sqrt{a^2+b^2}$$

de consiguiente:

$$\sqrt{[(a+bi)]}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}+\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\,i\right)^{(1)} \qquad (477)$$

271. **Casos particulares.** Si $b=0$, resulta $\sqrt{[(a)]}=\pm\sqrt{a}$; si en esta relación se supone $a=-a^2$:

$$\sqrt{[(-a^2)]}=\pm\sqrt{-a^2}=\pm a\sqrt{-1} \qquad (478)$$

(1) Compárese con las fórmulas del párrafo 35, Capítulo III.

REPRESENTACIÓN É INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

DE LAS CANTIDADES IMAGINARIAS Y DE LAS OPERACIONES A QUE DAN LUGAR.

272. La Aritmética se cambió en Álgebra; con la introducción de las magnitudes negativas, con las leyes que rigen el modo de figurar el signo *menos* en las operaciones y con la representación de los símbolos numéricos por letras; de esta manera se pasó del estudio concreto de la relación numérica al estudio general de la magnitud abstracta, las cantidades negativas dejaron de ser quimeras y la nueva ciencia se constituyó.

Lo propio debía suceder con el módulo $\sqrt{-1}$ reputado como ente imaginario y que al aparecer en una operación parecía no tener más misión que embrollarla con enigmas; hoy se construye $\sqrt{-1}$ con la sencillez de cualquier magnitud geométrica, y así como la cantidad negativa sólo revela una oposición de sentido, el símbolo antedicho para su construcción sólo requiere el conocimiento de dos elementos: una magnitud lineal y una angular.

Fijadas las bases para interpretar geométricamente las cantidades imaginarias, se llega á un resultado inesperado: los mismos procedimientos son aplicables á las cantidades reales y éstas no son sino un caso particular de las imaginarias; alcanzada esta conclusión evidentemente general, la forma imaginaria es ya no el *símbolo quimérico* sino todo lo contrario, la forma natural de todas las cantidades.

La teoría algebraica de las imaginarias ha sido fundada esencialmente por: D'Alembert, Euler y Cauchy, y su interpretación concreta se debe, sobre todo, á Argand (1), Mourey (2), Hoüel, Tait crítico de los trabajos sobre la materia y Cauchy (3) que adoptando las ideas de sus predecesores les ha impreso el imborrable sello de su genio.

Finalmente, el eminente matemático inglés William Rowan Hamilton es el inventor de la nueva teoría de los *cuaternios* que han logrado realizar, como dice el matemático mexicano Garza (4) "*el desideratum de la pedagogía, dando á las demostraciones matemáticas un carácter intuitivo de mayor alcance y de una maravillosa concisión.*"

El profesor Kelland (5) de la Universidad de Edimburgo se ha ocupado del juicio crítico de los trabajos de Hamilton y Tait.

En México el citado Sr. P. Garza se ha ocupado empeñosamente de difundir las nuevas teorías en conferencias y clases orales dadas en el Colegio Militar de Chapultepec y en algún otro colegio particular, así como también ha escrito varios opúsculos concienzudos sobre la materia.

273. Entremos, pues, á la exposición de la teoría que estudia la interpretación geométrica de las cantidades imaginarias.

Tracemos dos ejes xx', yy' situados en un mismo plano (fig. 29) formando un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares cuyo origen es 0.

De acuerdo con las consideraciones de *Cauchy*, si se da una expresión imaginaria de la forma: $a+bi$, es fácil construir un punto M cuyas coordenadas respectivas sean la abscisa ON igual á la parte real a y la ordenada NM igual á la cantidad b. Conocida la imaginaria $a+bi$ corresponderá á un punto del plano cuyas coordenadas sean a y b y recíprocamente: todo punto M del plano corresponderá á una expresión imaginaria

(1) R. Argand. "*Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques.*"
(2) C. V. Mourey. "*La vraie théorie des quantités négatives et des quantités prétendues imaginaires.*"
(3) Cauchy. "*Anciens Exercices d'Analyse et de Physique Matématique,*" tomo IV.
(4) P. Garza. "*Aritmética de los Vectores y Cuaternios.*"
(5) P. Kelland. "*Introduction to Quaternions.*"

en que la parte real a sea la abscisa del punto dado y el coeficiente de i sea la ordenada de dicho punto; pero para la completa identificación del punto M y de la expresión imaginaria $a+bi$, hay que convenir que la expresión imaginaria es la *suma* de la abscisa y la ordenada de M multiplicada ésta por i.

Como ambas coordenadas son perpendiculares, es preciso, como hoy se admite, que *el signo de operación* i *sea la representación algebraica de la perpendicularidad geométrica.*

Así pues:

$$a+bi, \quad a-bi, \quad -a+bi, \quad -a-bi$$

estarían representados por M, M‴, M′, M″. Trazando la línea OM, se obtiene $OM=\sqrt{a^2+b^2}$, valor del módulo de la imaginaria $a+bi$ correspondiente á M; á la línea OM se le llama *módulo* y al punto M *afijo* de la imaginaria $a+bi$.

Hemos visto que puede situarse el punto M por coordenadas cartesianas y la significación hallada para la línea OM que llamaremos ρ, nos revela que podemos también situarlo por coordenadas polares siempre que además de la línea OM conozcamos el ángulo ω que ella forma con una dirección fija como Ox, por ejemplo.

De la misma figura deducimos:

$$a=\rho\cos\omega, \quad b=\rho\operatorname{sen}\omega$$

Por sustitución encontramos:

$$a+bi=\rho\,(\cos\omega+\operatorname{sen}\omega\, i)$$

forma trigonométrica de una expresión imaginaria por la que vemos que OM representa el *módulo* y ω el *argumento* de la *imaginaria;* al ángulo que hace una línea representativa de un *módulo* con la línea Ox, se le ha llamado por estas consideraciones *argumento* (1).

Vemos, pues, que pasar de la consideración pura de M á la de OM, es pasar de las coordenadas cartesianas á las polares, ó en otros términos, de la forma *algebraica* á la *trigonométrica* de una cantidad imaginaria.

Como antes ya dijimos, á menudo se usa la notación cómoda y breve ρ_ω para simbolizar la imaginaria trigonométrica.

Directamente puede demostrarse que se puede determinar un número positivo ρ y un ángulo ω tales que se tenga la relación final antes hallada, pues de ella se deduce:

$$\rho\cos\omega=a, \quad \rho\operatorname{sen}\omega=b$$

y de consiguiente:

$$\rho=\sqrt{a^2+b^2}, \quad \cos\omega=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \operatorname{sen}\omega=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

y siempre hay un arco comprendido entre 0 y 2π que satisfaga las dos últimas relaciones, pudiéndose añadir ó quitar á dicho arco un número cualquiera de veces 2π, es decir, siendo ω de la forma: $\omega=\omega_0+2k\pi$, en que puede ser k nulo, positivo ó negativo.

En fin, puesto que a y b son las proyecciones de OM sobre xx' é yy' (debiendo b estar afectada del signo i), resulta que: *la expresión imaginaria representada geométricamente por* OM *es algebraicamente la suma de las proyecciones de* OM *sobre los ejes.*

274. Depende, pues, la representación de una imaginaria trigonométrica de su *módulo* y de su *argumento.*

(1) Mr. Mourey le llama *versor* de *vertere, voltear.*

El módulo sólo puede admitir valores comprendidos entre 0 y $+\infty$, pues es esencialmente positivo.

El argumento considerado como positivo en el sentido ABCD...... por ejemplo, puede admitir valores de $-\infty$ á $+\infty$ pasando por 0.

Trazando el círculo ABC...... con el radio ρ, se tiene:

1º Si $\omega=0$ ú $\omega=0+2k\pi$ siendo k un entero cualquiera, la imaginaria se reduce á la magnitud *real* y *positiva* $OA=\rho$ situada sobre OX.

2º Si $\omega=\frac{\pi}{2}$ ú $\omega=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, se obtiene la magnitud *imaginaria simple* y *positiva* $OB=+\rho i$ situada sobre la parte positiva Oy' del eje yy'.

3º Si $\omega=\pi$ ú $\omega=\pi+2k\pi$, se obtiene la magnitud *real* y *negativa* $OC=-\rho$ situada sobre la parte negativa Ox' del eje xx'.

4º Si $\omega=\frac{3\pi}{2}$ ú $\omega=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$, resulta $OD=-ri$ cantidad *imaginaria simple negativa* situada sobre la parte negativa $0y$ del eje yy' (1).

Vemos que la forma general de las cantidades es la imaginaria, pues entraña á todas las demás formas y que en resumen:

1º El eje xx' es el eje de las *cantidades reales positivas* en su región Ox, *negativas* en la región Ox'; así pues, los números positivos tienen por afijos los puntos de Ox y los negativos los de Ox'.

2º El eje yy' es el de las *cantidades imaginarias simples positivas* en la región Oy', *negativas* en la región Oy; así pues, los afijos de las imaginarias simples son los puntos de yy'.

3º Los diversos radios intermedios de los círculos que pueden trazarse desde el centro O, representan las *imaginarias complexas.*

Según esto, se dice que el *campo* de la imaginaria es el plano completo á excepción del eje xx' que corresponde á las magnitudes reales y se deduce: 1º, *que si dos imaginarias son iguales, tienen el mismo módulo y sus argumentos difieren* 2π *y recíprocamente;* 2º, *que dos segmentos rectilíneos paralelos, iguales y del mismo sentido, representan dos imaginarias iguales cuyos módulos lo son y cuyos argumentos ó son iguales ó difieren* 2π*;* 3º, *que una misma cantidad imaginaria de módulo* ρ *puede representarse con un argumento positivo ó negativo, siendo* $360°$ *la suma algebraica de ambos argumentos.*

La primera conclusión queda cifrada en la fórmula:

$$\rho_\omega=\rho_{2k\pi+\omega}$$

Si $\omega=0$, ρ_ω coincide con Ox; si $\omega=\pi$, ρ_ω coincide con Ox' y se tiene $\rho_\pi=-\rho_0$, resultados ya encontrados.

La segunda no da lugar á ninguna dificultad.

La tercera también se comprende fácilmente recurriendo para ayuda á una figura.

275. Si tratando de conocer el valor del argumento ω tratamos de compararlo con uno escogido como unidad, elegiremos con M. Mourey por *vector unitario* el ángulo recto y OA por unidad de longitud ó *módulo unitario*, y tendremos:

$$OA=1, \quad OB=1_1, \quad OC=1_2=-1, \quad OD=1_3=-1_1$$

Los argumentos fraccionarios darán en cada cuadrante las direcciones intermedias.

Vemos que en resumen habrá una infinidad de magnitudes de igual *módulo* y *diverso argumento*, y en cada dirección habrá una infinidad de magnitudes del mismo argumento y de diverso módulo.

(1) Es conveniente cotejar estas deducciones con las halladas sin recurrir á esta nueva teoría.

Con estas nociones, es fácil pasar á las reglas del cálculo algebraico, á las ecuaciones, en fin, al Álgebra entera.

276. **Suma y resta.** Dadas las magnitudes $a+bi$, $a+b'i$ representadas por O A, O B, hallar su suma y su resta (fig. 30).

Llevando O B paralelamente á sí misma hasta que tome la posición A D, tracemos la línea O D que será el *segmento resultante* de los *segmentos componentes* O A, O B'.

Como (véase Trigonometría) la proyección de O D es igual á la suma de proyecciones de O A y A D = O B sobre xx' ó yy', la proyección de O D sobre xx' será $a+a'$ y sobre yy' será $b+b'$, de consiguiente O D representa la imaginaria: $(a+a')+(b+b')i$ que como vemos es la suma de las propuestas.

Como se comprende, basta construir el triángulo O A B ó el paralelógramo O A D B llamados el triángulo y el paralelógramo de las imaginarias por su semejanza con el triángulo y el paralelógramo de las velocidades y de las fuerzas en Mecánica.

Las líneas O B, O A, conocidas en longitud y dirección, se llaman *magnitudes geométricas* y la resultante O D *suma geométrica*; se ve, pues, que la adición de imaginarias corresponde á la adición de magnitudes geométricas y se conviene en escribir:

$$\overline{OD}=\overline{OB}+\overline{OA}$$

Corolario. Como el lado O D verifica las relaciones:

$$OD<OA+AD,\quad OD>OA-AD$$

sustituyendo:

$$R<A+B,\quad R>A-B$$

llamando A y B los módulos de las imaginarias que se consideran; luego: *el módulo de la suma de dos cantidades imaginarias está comprendido entre la suma y la diferencia de los módulos de los sumandos*, teorema conocido.

Para sumar, pues, las magnitudes A_α, B_β, C_γ, ..., M_μ, se trazará por el extremo de la primera una paralela á la segunda, etc., y la línea que cierre el polígono será la suma de las propuestas (fig. 31).

La sustracción como es operación inversa de la suma, se efectúa como á continuación se expresa.

Para restar O A de la magnitud O D, puede sumarse O D con — O A, puesto que el resultado es el mismo; así pues, sumando O D con — O A como lo indica la figura, la línea O B será la resta (fig. 30).

Multiplicación. Supongamos que los factores son A_α, B_β representados geométricamente por O A, O B.

M. Mourey razona así: tómese primero sobre O A la longitud A tantas veces como expresa B; y en seguida hágase girar la nueva línea O A' un ángulo igual á β hasta que tome la posición O C (fig. 32).

Designando por A B el producto solo de las *magnitudes*, el producto buscado será:

$$(AB)_{\alpha+\beta}$$

y se tendrá:

$$A_\alpha \times B_\beta=(AB)_{\alpha+\beta} \tag{479}$$

lo que equivale á formar el producto A B por las reglas algebraicas y sumar los argumentos.

Si $\alpha=\beta=\pi$, se tendrá:

$$\alpha+\beta=2\pi \quad \text{luego} \quad A_\pi\times B_\pi=(AB)_{2\pi}$$

Esta relación conforme á las convenciones se cambia en:

$$-A\times-B=+AB \quad \text{lo que demuestra el principio:} \quad -\times-=+$$

Si $\alpha=\pi$, $\beta=2\pi$, $\alpha+\beta=3\pi$, luego:

$$A_\alpha\times B_\beta=(AB)_{\alpha+\beta},\quad -A\times(+B)=+(AB)_{3\pi}=-(AB) \quad \text{luego} \quad -\times+=-, \text{ etc.}$$

Si se tienen dos imaginarias conjugadas A_α y $A_{-\alpha}$, debiendo tener el mismo módulo y sólo difiriendo por el signo del argumento, tales como O A y O B, deberá tomarse O A tantas veces como expresa O B; pero como son iguales, el resultado O A' será el cuadrado del número que mide á O A. Haciendo girar á O C el ángulo negativo C O x, se obtiene O E; luego el *producto de dos imaginarias conjugadas es el cuadrado de su módulo* (fig. 32).

Puede también demostrarse así:

$$A_\alpha\times A_{-\alpha}=(AB)_{\alpha+\beta}=(AA)_{\alpha-\alpha}=A_0^2$$

lo que demuestra el anterior enunciado.

N. B.—Si en la fig. 32 O D es una línea tomada como unidad, resulta:

$$\left(\frac{OC}{OD}\right)=\left(\frac{OB}{OD}\right)\times\left(\frac{OA}{OD}\right) \quad \text{de donde resulta:} \quad \frac{OC}{OA}=\frac{OB}{OD}$$

los dos triángulos O A C, O D B son directamente semejantes y el punto C es el vértice de un triángulo construído sobre O A directamente semejante con el O B D; además los triángulos O D A, O B C son también semejantes; luego la multiplicación de las imaginarias corresponde á la similitud de las figuras planas.

División. Como el producto del divisor por el cociente ha de producir el dividendo:

$$\frac{A_\alpha}{B_\beta}=\left(\frac{A}{B}\right)_{\alpha-\beta} \tag{480}$$

se dividirá pues A *entre* B *y se restarán el argumento del divisor del argumento del dividendo* para operar con brevedad (fig. 32), siendo O A el dividendo, O B el divisor y O D una línea tomada como unidad; basta construir sobre O A el triángulo O A C directamente semejante con O B D, la línea O C será el cociente.

Potencias. Como consecuencia de lo dicho al tratar de la multiplicación resulta:

$$\left.\begin{array}{l} (A_\alpha)^2=A_\alpha A_\alpha=(A^2)_{2\alpha} \\ (A_\alpha)^3=(A^2)_{2\alpha}A_\alpha=(A^3)_{3\alpha} \\ \dotfill \\ (A_\alpha)^m=(A^m)_{m\alpha} \end{array}\right\} \tag{481}$$

así pues (fig. 33): construída la imaginaria O A = A_α, basta ir construyendo triángulos semejantes al O A 1 construído sobre O 1 que tomamos por unidad y las sucesivas líneas O A_1, O A_2, O A_3, etc., serán la segunda, tercera, cuarta, etc., potencia de O A. Por ejemplo, para la línea O A_3 se tiene el argumento 4α y conforme á las relaciones:

$$\frac{O1}{OA}=\frac{OA}{OA_1}=\frac{OA_1}{OA_2}=\frac{OA_2}{OA_3}=\ldots\ldots,\quad \text{resulta:} \quad OA_3=OA.OA_2=OA^2.OA_1=OA^4=(A)^4$$

Vemos pues que O A_3 es la cuarta potencia de A_α.