Raíces. Tenemos la relacion:

$$\sqrt[m]{A_a} = \sqrt[m]{A}\left(\cos\frac{a+2k\pi}{m} + \operatorname{sen}\frac{a+2k\pi}{m}.i\right) \qquad (482)$$

y los diversos valores de este radical se obtendrán dando á k los m valores:

$$0, 1, 2, \ldots\ldots, (m-1)$$

Vemos pues (fig. 34), que basta describir un círculo de radio $\sqrt[m]{A}$ con el origen como centro, tomar un primer arco aa_0 igual á $\frac{a}{m}$ y partiendo de a_0 dividir la circunferencia en m arcos iguales: $a_0 a_1, a_1 a_2, \ldots\ldots, a_{m-1} a_0$. Es evidente que los radios que van á los m puntos de división: $a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots, a_{m-1}$, representan las m raíces de módulo $\sqrt[m]{A}$ y de argumentos:

$$\frac{a}{m},\ \frac{a}{m}+\frac{2\pi}{m},\ \frac{a}{m}+\frac{4\pi}{m}, \ldots\ldots, \frac{a}{m}+\frac{2(m-1)\pi}{m}$$

Si bajo el radical hubiere signo negativo, como se tiene en general:

$$-A = (A)_{2k\pi+\pi}$$

bastaría añadir $\frac{\pi}{m}$ á los argumentos del caso anterior.

APLICACIONES.

277. I. Sean

$$\sqrt{A^2},\ \sqrt{-A^2}$$

el primer radical admite los valores:

$$A_0 = +A,\quad A_{\frac{2\pi}{m}} = A_\pi = -A$$

el segundo:

$$A_{0+\frac{\pi}{2}} = A_{\frac{\pi}{2}} = A_1,\quad A_{\pi+\frac{\pi}{2}} = A_{\frac{3\pi}{2}} = A_3 = -A_1$$

Vemos, pues, y aquí estriba uno de los grandes méritos de la teoría, que el símbolo $\sqrt{-A^2}$ no ofrece ya idea de imposibilidad; tiene por valores A_1 y $-A_1$, dos direcciones opuestas y perpendiculares á A_0. Así pues: *el signo de operación* $i=\sqrt{-1}$ *es el equivalente algebraico de la perpendicularidad geométrica* (véase párrafo 273) pues evidentemente si se tiene:

$$\sqrt{-1} \text{ puede escribirse: } -1 = 1_2$$

Así pues:

$$\sqrt{-1} = \sqrt{1_2} = \pm 1_1$$

y su representación geométrica es: Oy ó bien Oy' tomando sobre este radio ó sobre una paralela á él, magnitudes iguales á 2, 3, 4, ..., n unidades, estas magnitudes representarán á:

$$2\sqrt{-1},\ 3\sqrt{-1},\ 4\sqrt{-1}, \ldots\ldots, n\sqrt{-1}$$

II. Sea $\sqrt[3]{1}$ y tendremos:

$$A_0 = 1_0 = 1,\quad A_{\frac{2\pi}{m}} = A_{120^\circ} = -\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{-1},\quad A_{\frac{4\pi}{m}} = A_{240^\circ} = -\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{-1}$$

que son las ya tanto conocidas *raíces cúbicas de la unidad.*

III. Sea $\sqrt[4]{1}$ que da:

$$+1,\ \sqrt{-1},\ -1,\ -\sqrt{-1}$$

IV. Sea $\sqrt[5]{1}$ que da:

$$1_0 = 1,\quad 1_{72^\circ} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\sqrt{-1}$$

$$1_{144^\circ} = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} - \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\sqrt{-1},\quad 1_{216^\circ} = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} - \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\sqrt{-1}$$

$$1_{288^\circ} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} - \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\sqrt{-1}$$

OBSERVACIONES.

1ª Los senos y cosenos que no puedan obtenerse en función del radio valiéndose de los polígonos inscriptibles, se calcularán aproximadamente por logaritmos.

2ª Estos valores se volverán á hallar en el estudio de las "Ecuaciones Binomias."

3ª Las nociones que sobre la nueva teoría hemos explicado hacen palpables las ventajas didácticas del nuevo método.

V. Sea $\sqrt{-1}$ y vamos á hallar sus potencias. Para el cuadrado tenemos que elevar la misma longitud $=1_1$ perpendicularmente á OB á fin de añadir los argumentos, lo que da:

$$i^2 = (\sqrt{-1})^2 = OC = -1 \text{ (fig. 29)}$$

Análogamente: $i^3 = OD = -i$, $i^4 = OA = +1$ reproduciéndose periódicamente estos resultados.

VI. En esta aplicación nos proponemos exponer el modo como se debe hacer la interpretación de las soluciones imaginarias (fig. 35).

Sea la recta $AB = a$ que se quiere *dividir en media y extrema razón*, suponiendo que el punto C resuelve el problema y llamando x la distancia AC, se tendrá:

$$x^2 = a(a-x) \text{ que tiene por raíces: } x = -\frac{a}{2} \pm \frac{a}{2}\sqrt{5}$$

una positiva correspondiente á C, otra negativa correspondiente á C′ á la izquierda de A.

Si para el punto de división se eligiera el punto C″, la ecuación del problema debería ser:

$$x^2 = a(x-a) \text{ cuyas raíces son: } x = \frac{a}{2} \pm \frac{a}{2}\sqrt{3}.i$$

imaginarias conjugadas; este resultado expresa la imposibilidad de resolver el problema como ha sido expuesto, lo que es evidente, pues AC″ es mayor que AD y que C″B.

Si construimos las raíces imaginarias con A por origen y AB por eje xx', tendremos que el *afijo* de la primera tendrá por abscisa $\frac{a}{2}$ y por ordenada $+\frac{a}{2}\sqrt{3}$ que es el lado del triángulo equilátero inscrito en el círculo de radio $\frac{a}{2}$ y el afijo de la segunda tendrá igual abscisa y la ordenada será también igual, pero de signo contrario.

De este modo fijamos los puntos D y D′ y las líneas AD y AD′ tendrán por valor el del módulo que es:

$$\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{3a^2}{4}}=a$$

D y D′ son, pues, los vértices de los triángulos ADB, ABD′ simétricos y equiláteros.

Para aceptar las soluciones D, D′ hay que modificar el enunciado expresando: *que se trata de hallar en un plano que contenga á* AB *ya sobre esta recta, ya fuera de ella, un punto cuya distancia al punto* A *sea media proporcional entre su distancia á* B *y la línea* AB.

Por la figura tenemos en efecto:

$$AD^2=AB.DB \quad \text{puesto que} \quad AD=DB=AB=a$$

Poniendo bajo forma trigonométrica las raíces halladas, resulta:

$$x=a\left(\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}.i\right)=a\left(\cos\frac{\pi}{3}\pm\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}.i\right)$$

y si se hace girar el plano de la figura al derredor de la recta AB, resulta que el problema de la media y extrema razón sólo tiene dos soluciones reales correspondientes á los puntos C y C′ y un número infinito de soluciones imaginarias representadas por las generatrices de un cono de revolución cuyo vértice es A, cuyo eje es AB y cuya base es el círculo descrito con el diámetro DD′ y en un plano perpendicular á AB.

(Comberousse.)

FUNCIONES DE VARIABLE IMAGINARIA.

278. **Preliminares.** Las funciones de variable imaginaria se dividen en *algebraicas* y *trascendentes*.

Siendo z la variable independiente *real* ó *imaginaria*, toda función entera de z es un polinomio de la forma:

$$F(z)=A_0z^m+A_1z^{m-1}+A_2z^{m-2}+\ldots\ldots+A_{m-1}z+A_m \qquad (483)$$

en el que m es un número entero positivo y $A_0, A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots, A_m$ números constantes reales ó imaginarios independientes de la variable.

Una *fracción racional* es la *función racional* que resulta de dividir una entre otra dos expresiones análogas á la antes escrita.

La raíz de una función racional de z es una *función irracional* de dicha variable.

Las funciones que quedan mencionadas son *algebraicas* y todas las no comprendidas en la enumeración son *trascendentes*.

279. En el párrafo 255 hemos expresado que cuando en un polinomio entero de coeficientes reales ó imaginarios se sustituye por la variable independiente un valor imaginario $\alpha+\beta i$, el resultado obtenido es de la forma: $P+Qi$.

También hemos averiguado qué forma afecta el resultado obtenido de sustituir: $\alpha-\beta i$; no insistiremos pues en este punto nuevamente, y sólo recomendamos recordar lo dicho en el mencionado párrafo 255.

280. No debe perderse de vista cuanto se ha dicho respecto á la significación, interpretación y representación de las cantidades imaginarias en sus dos formas esenciales:

$$z=x+yi, \quad z=\rho(\cos\omega+\operatorname{sen}\omega.i)$$

atendiendo siempre al sistema de coordenadas por el que un punto queda fijado según cada una de ellas, á las variaciones de posición que origina la discusión de estas fórmulas, y en una palabra, á todas y cada una de las condiciones que las expresan.

281. **Series de términos imaginarios.** Vamos á expresar cómo se define la convergencia de una serie de términos imaginarios y para ello consideremos la serie:

$$u_1, u_2, u_3, \ldots\ldots, u_n, \ldots\ldots \qquad (484)$$

que por ser serie de términos imaginarios tiene la forma:

$$\alpha_1+\beta_1 i, \ \alpha_2+\beta_2 i, \ \alpha_3+\beta_3 i, \ldots\ldots, \alpha_n+\beta_n i, \ldots\ldots \qquad (485)$$

Si las dos series de términos reales:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\ldots, \alpha_n, \ldots\ldots \\ \beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots\ldots, \beta_n, \ldots\ldots\end{array}\right\} \qquad (486)$$

son convergentes, la serie (485) lo será; si no son ambas convergentes, la (485) se considera como divergente (ó indeterminada).

En el primer caso, cuando las (486) son convergentes y tienen por sumas σ y σ', la (485) que hemos dicho que es convergente, tendrá por suma la expresión: $\sigma+\sigma' i$.

282. Teorema I. 1º *Una serie de términos imaginarios*

$${\rho_1}_{\omega_1}, \ {\rho_2}_{\omega_2}, \ {\rho_3}_{\omega_3}, \ldots\ldots, {\rho_n}_{\omega_n}, \ldots\ldots$$

es convergente, si los módulos de sus diversos términos forman una serie convergente.

Es claro que siendo convergente la serie formada con los módulos de los términos de la serie considerada, es decir, siendo convergente la serie:

$$\rho_1, \rho_2, \ldots\ldots, \rho_n, \ldots\ldots \qquad (487)$$

lo serán las series:

$$\left.\begin{array}{l}\rho_1\cos\omega_1, \ \rho_2\cos\omega_2, \ldots\ldots, \rho_n\cos\omega_n, \ldots\ldots \\ \rho_1\operatorname{sen}\omega_1, \ \rho_2\operatorname{sen}\omega_2, \ldots\ldots, \rho_n\operatorname{sen}\omega_n, \ldots\ldots\end{array}\right\} \qquad (488)$$

cuyos términos son menores respectivamente que los de la serie de los módulos, luego según el párrafo 281 lo será la propuesta.

Sabemos que si:

$$\frac{\rho_{n+1}}{\rho_n}<1$$

la serie de los módulos es convergente, luego bajo igual condición lo será la serie imaginaria:

$$\rho_1(\cos\omega_1+\operatorname{sen}\omega_1\sqrt{-1}), \ \rho_2(\cos\omega_2+\operatorname{sen}\omega_2\sqrt{-1}), \ldots\ldots$$

2º *Cuando la serie de módulos es divergente, hay duda sobre la convergencia de la serie propuesta.*

Si al contrario:

$$\frac{\rho_{n+1}}{\rho_n} < 1$$

la serie de los módulos será divergente y sus términos pueden tender ó no tender indefinidamente á 0 (fórmula 74).

Primer caso. Si los términos de la serie de los módulos pueden tender indefinidamente á 0, las series (488) [1] pueden ser convergentes, pues sus términos pueden no ser del mismo signo, pero tender indefinidamente á 0 [2]. Hay, pues, duda sobre el carácter de la serie propuesta.

Segundo caso. Como varían inversamente el seno y el coseno de un arco, no pudiendo tender á 0 ambos á la vez, pues que ρ_n no tiende á 0 al crecer n, crecerá sin fin con ρ_n uno ú otro al menos de los productos:

$$\rho_n \cos \omega_n, \quad \rho_n \operatorname{sen} \omega_n$$

y las series (488) no podrán ser simultáneamente convergentes; así pues, la serie imaginaria propuesta será divergente ó indeterminada (párrafo 281).

APLICACIÓN.

283. Sea la serie:

$$a + az + az^2 + \ldots\ldots + az^n + \ldots\ldots \qquad (489)$$

Sean r y ρ los módulos de a y de z; así pues, los términos de la anterior serie tendrán por módulos:

$$r, \ r\rho, \ r\rho^2, \ r\rho^3, \ \ldots\ldots, r\rho^n, \ \ldots\ldots \qquad (490)$$

Si se pone:

$$S_n = r(1 + \rho + \rho^2 + \ldots\ldots + \rho^n + \ldots\ldots) \qquad (491)$$

Como si $\rho < 1$, el límite de:

$$1 + \rho + \rho^2 + \ldots\ldots + \rho^n + \ldots\ldots \qquad (492)$$

es $\frac{1}{1-\rho}$.

Llamando S la suma de la serie propuesta, resulta:

$$S = \frac{r}{1-\rho}$$

Si $\rho < 1$, la serie de los módulos es convergente y lo será la (489).

Las progresiones geométricas imaginarias son pues convergentes si el módulo de la razón es < 1.

284. Teorema II. *Siendo* A, B, ..., *cantidades reales y constantes, si la serie*

$$Ax + Bx^2 + \ldots\ldots$$

es convergente para un valor real de la variable $x = \rho$, la misma serie permanecerá convergente para los valores imaginarios cuyo módulo es ρ.

[1] Teorema I-1º, párrafo 282.
[2] Capítulo V, teorema I, párrafo 91.

Suponiendo convergente la serie real

$$A\rho + B\rho^2 + C\rho^3 + \ldots\ldots \qquad (493)$$

que es la propuesta para el valor $x = \rho$, para los valores imaginarios cuyo módulo es ρ, es decir, para los valores:

$$x = \rho(\cos \omega + \operatorname{sen} \omega \sqrt{-1})$$

la serie propuesta será:

$$A\rho(\cos \omega + \operatorname{sen} \omega \sqrt{-1}) + B\rho^2(\cos 2\omega + \operatorname{sen} 2\omega \sqrt{-1}) + \ldots\ldots \qquad (494)$$

en la que los términos reales y los coeficientes de $\sqrt{-1}$ forman las series:

$$\left.\begin{array}{l} A\rho \cos \omega, \ B\rho^2 \cos 2\omega, \ C\rho^3 \cos 3\omega, \ \ldots\ldots \\ A\rho \operatorname{sen} \omega, \ B\rho^2 \operatorname{sen} 2\omega, \ C\rho^3 \operatorname{sen} 3\omega, \ \ldots\ldots \end{array}\right\} \qquad (495)$$

cuyos términos son más pequeños respectivamente que los de la serie (493) por ser fracciones propias generalmente el seno y el coseno de un arco, no pudiendo traspasar los límites $+1$ ó -1.

Si pues (493) es convergente lo mismo que (495), debe concluirse la convergencia de la serie (494).

Corolario. *Cuando la serie:*

$$Ax, \ Bx^2, \ Cx^3, \ \ldots\ldots$$

es convergente para cualquier valor de x, *quedará convergente para todos los valores imaginarios cuyo módulo sea dicho valor real;* es decir, quedará convergente *para todos los valores imaginarios que se sustituyan en lugar de* x.

Así la serie:

$$\frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots\ldots$$

es convergente para valores reales finitos de x, y si ponemos por x, $x\sqrt{-1}$, resulta:

$$\frac{x\sqrt{-1}}{1} - \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3}\sqrt{-1} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5}\sqrt{-1} - \ldots\ldots$$

que es serie imaginaria convergente.

285. Teorema III. (Teorema de Abel). *Si una serie ordenada según las potencias enteras, positivas y crecientes de una variable imaginaria* z, *es* $\left\{\begin{smallmatrix}\textit{convergente}\\ \textit{divergente}\end{smallmatrix}\right.$ *para cierto valor de* z *cuyo módulo sea* R, *continuará siendo* $\left\{\begin{smallmatrix}\textit{convergente}\\ \textit{divergente}\end{smallmatrix}\right.$ *para todo valor de* z *cuyo módulo sea* $\left\{\begin{smallmatrix}\textit{inferior}\\ \textit{superior}\end{smallmatrix}\right.$ *á* R.

Sea la serie:

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots\ldots + a_n z^n + \ldots\ldots \qquad (496)$$

siendo z la variable imaginaria y $a_0, a_1, \ldots\ldots a_n, \ldots\ldots$ constantes reales ó imaginarias, $r_0, r_1, r_2, \ldots\ldots, r_n, \ldots\ldots$ y ρ los módulos de: $a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n, \ldots\ldots$ y z.

La serie de módulos será:

$$r_0, \ r_1\rho, \ r_2\rho^2, \ r_3\rho^3, \ \ldots\ldots, r_n\rho^n, \ \ldots\ldots \qquad (497)$$

1º Si para el valor $\rho = R$, la serie (496) es convergente, lo será igualmente la serie:

$$r_0,\ r_1 R,\ r_2 R^2, \ldots\ldots, r_n R^n, \ldots\ldots \qquad (498)$$

Mas si se dá á z un valor cuyo módulo sea $R' < R$, la serie:

$$r_0,\ r_1 R', \ldots\ldots, r_n R'^n, \ldots\ldots \qquad (499)$$

será convergente, si lo es la (498), puesto que tiene sus términos respectivamente menores que los de la serie (498).

Pero si la serie (499) es convergente, lo será la (496).

2º Si la serie (496) es divergente para el valor R de ρ, la (498) lo será también, y si $R' > R$, la (499) será divergente; luego la propuesta (496) lo será también.

Sea por ejemplo la serie:

$$1 + z + z^2 + z^3 + \ldots\ldots + z^n + \ldots\ldots$$

que es convergente para todos los valores de z cuyo módulo es < 1 y divergente para todos los valores de z cuyo módulo es > 1 (véase Capítulo V, párrafo 88, y en el presente Capítulo el teorema I).

3º Para valores de z cuyo módulo es 1, es decir, correspondientes á imaginarias de la forma:

$$\cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha \sqrt{-1}$$

la serie propuesta es divergente (ó indeterminada) pues los términos constitutivos de la serie de los módulos de sus términos no pueden tender á 0 cuando n crece indefinidamente (véase teorema I-2º).

286. Inferimos de lo anterior que existe un módulo R de z, tal que para todo módulo menor la serie (496) es convergente y para todo módulo mayor es divergente; este módulo se llama *radio de convergencia* de la serie considerada y el círculo correspondiente á este radio: *círculo de convergencia.*

Si pues tomando como centro el origen de dos ejes coordenados y con un radio R se describe una circunferencia, los puntos interiores corresponden á los valores de la variable imaginaria que hacen convergente la serie propuesta y los puntos exteriores corresponden á los valores de la mencionada variable que hacen divergente la serie propuesta.

Para los valores de z que corresponden á R, es decir, para los puntos de la circunferencia, hay incertidumbre.

Si siendo R el módulo de z, los módulos de los términos de la serie no tienden á cero, es divergente para todos los puntos de la circunferencia de radio R, ó para todos los valores imaginarios correspondientes de z (teorema I-2º).

Si siendo R el módulo de z, los módulos de los términos de la serie tienden á cero, nada puede afirmarse (teorema I-2º) y la serie propuesta puede ser convergente ó divergente para todos los puntos ó para ciertos puntos de la circunferencia de radio R.

No debe olvidarse que para los puntos interiores, la serie de los módulos de los términos de la serie propuesta es convergente como esta última (teorema de Abel-1º).

Por último, si $R = 0$, la serie sólo es convergente para este valor especial de R.

Si $R = \infty$, jamás puede ser la serie divergente.

EJEMPLOS.

287. I. La serie (párrafo 285):

$$1 + z + z^2 + \ldots\ldots + z^n + \ldots\ldots$$

es *convergente* en el círculo de radio $= 1$, *divergente* sobre la circunferencia ó fuera del círculo.

II. Sea la serie

$$1 + 1.z + 1.2.z^2 + 1.2.3.z^3 + \ldots\ldots + 1.2.3\ldots\ldots z^n + \ldots\ldots \qquad (500)$$

Como la serie de los módulos de sus términos tiende al infinito cuando se da á z un valor diverso de cero, es divergente.

La serie es pues convergente si se tiene $z = 0$ y el radio del círculo de convergencia es nulo.

288. **Multiplicación de las series.** Sean

$$\left.\begin{array}{l} u_0,\ u_1,\ u_2, \ldots\ldots, u_{n-1}, \ldots\ldots \\ v_0,\ v_1,\ v_2, \ldots\ldots, v_{n-1}, \ldots\ldots \end{array}\right\} \qquad (501)$$

dos series convergentes reales ó imaginarias cuyas sumas son respectivamente S′ y S″.

Si las dos series son reales, se supone que permanecen convergentes cuando no se consideran sino los valores absolutos de los términos, y si son de cualquier especie, se admite que las series formadas con los módulos de sus términos son convergentes.

Esto supuesto, *la serie:*

$$t_0,\ t_1,\ t_2, \ldots\ldots, t_n, \ldots\ldots \qquad (502)$$

cuyo término general t_n *tiene por expresión:*

$$t_n = u_0 u_n + u_1 v_{n-1} + \ldots\ldots + u_{n-1} v_1 + u_n v_0 \qquad (503)$$

es convergente y tiene por suma S *el producto* S′S″ *de las sumas de las series consideradas.*

Primer caso. Las series (501) *son reales* y supongamos que de términos positivos. Las sumas de los n primeros términos de las series (501) y (502) son:

$$S'_n = u_0 + u_1 t \ldots\ldots + u_{n-1}, \quad S''_n = v_0 + u_2 + \ldots\ldots + v_{n-1}$$
$$S_n = t_0 + t_1 + \ldots\ldots + t_{n-1} = u_0 v_0 + (u_0 v_1 + u_1 v_0) + \ldots\ldots + (u_0 v_{n-1} + u_1 v_{n-2} + \ldots\ldots + u_{n-1} v_0)$$

según la expresión (503).

Si formamos el producto $S'_n S''_n$ contendrá además de los términos constitutivos de S_n otros términos positivos y de consiguiente:

$$S'_n S''_n > S_n \qquad (504)$$

Si por otra parte k es el mayor número entero contenido en $\frac{n}{2}$ (1), todos los términos

(1) Si n es par, dicho número será $\frac{n}{2}$ y si n es impar $\frac{n-1}{2}$.