del producto $S'_k S''_k$ estarán con otros términos positivos de más, contenidos en S_n (1) y se tendrá:

$$S'_k S''_k < S_n \tag{505}$$

Si n tiende al infinito, como k tiende al infinito con n, S'_n y S'_k tenderán á su límite común S'; S''_n y S''_k tenderán á su límite común S'' y finalmente S_n que queda comprendida entre dos cantidades que convergen á la par al límite común $S'S''$ cuando n crece indefinidamente satisfará la condición:

$$S = \lim S_n = S'S''$$

que es la enunciada en el teorema.

Segundo caso. Las series (501) *son reales y convergentes* y admitamos que están formadas por términos positivos y negativos, *pero que permanezcan convergentes* cuando se toman todos los términos positivamente.

Deducimos del caso anterior la expresión:

$$S'_n S''_n - S_n = u_{n-1}v_{n-1} + (u_{n-1}v_{n-2} + u_{n-2}v_{n-1}) + (u_{n-1}v_{n-3} + u_{n-2}v_{n-2} + u_{n-3}v_{n-1}) + \\ + \ldots\ldots + (u_{n-1}v_1 + u_{n-2}v_2 + \ldots\ldots + u_2v_{n-2} + u_1v_{n-1}) \text{ (2)} \tag{506}$$

Cuando las series (501) tienen todos sus términos positivos, la diferencia $S'_n S''_n - S_n$ tiende á 0 al crecer n indefinidamente (primer caso).

Siendo pues 0 el límite del segundo miembro de (506) cuando se toman positivamente los términos de las series (501), cuando se sustituya á los términos negativos el signo *menos* que realmente les corresponde, el anterior límite seguirá siendo el mismo (párrafo 92).

Como las series (501) son siempre convergentes, para $n = \infty$ las sumas S'_n, S''_n tendrán los límites determinados S' y S'' y de consiguiente:

$$\lim (S'_n S''_n - S_n) = 0 \quad \text{es decir:} \quad S = S'S''$$

Tercer caso. Las series (501) *son imaginarias y convergentes* y admitamos que las series formadas por los módulos de sus términos sean también convergentes.

Sean

$$\left.\begin{array}{l} r_0, r_1, r_2, \ldots\ldots, r_n, \ldots\ldots \\ s_0, s_1, s_2, \ldots\ldots, s_n, \ldots\ldots \end{array}\right\} \tag{507}$$

las series convergentes formadas por los módulos de los términos de las series (501), supongamos que dichas series (507) tienen por sumas σ', σ'' y representemos por:

$$\theta_0, \theta_1, \theta_2, \ldots\ldots, \theta_n, \ldots\ldots \tag{508}$$

la serie cuyo término general tiene por expresión:

$$\theta_n = r_0 s_n + r_1 s_{n-1} + \ldots\ldots + r_{n-1} s_1 + r_n s_0 \tag{509}$$

(1) Si por ejemplo $n=6$, se tendrá: $k=3$, y de consiguiente:

$$S'_3 S''_3 = (u_0+u_1+u_2)(v_0+v_1+v_2) = u_0(v_0+v_1+v_2) + u_1(v_0+v_1+v_2) + u_2(v_0+v_1+v_2)$$
$$S_6 = u_0v_0 + (u_0v_1+u_1v_0) + (u_0v_2+u_1v_1+u_2v_0) + \ldots\ldots$$

(2) Para la deducción más rápida de la fórmula nótese que en el valor de S_n los diversos productos constitutivos son aquellos en que los índices de u y de v tienen una suma que varía de 0 á $n-1$ y en el valor de $S'_n S''_n$ los diversos productos constitutivos son aquellos en que los índices de u y de v tienen una suma que varía de 0 á $2n-2$.

La serie (508) es convergente (primer caso) y tiene por suma σ el producto $\sigma'\sigma''$ de las sumas de las series (507).

Considerando n primeros términos en las series (501), (502), (507) y (508), aplicando á ambos grupos de series la fórmula (506) y empleando los símbolos adoptados resultará:

$$S'_n S''_n - S_n = u_{n-1}v_{n-1} + (u_{n-1}v_{n-2} + u_{n-2}v_{n-1}) + \ldots\ldots + \\ + (u_{n-1}v_1 + u_{n-2}v_2 + \ldots\ldots + u_2v_{n-2} + u_1v_{n-1}) \tag{510}$$

$$\sigma'_n \sigma''_n - \sigma_n = r_{n-1}s_{n-1} + (r_{n-1}s_{n-2} + r_{n-2}s_{n-1}) + \ldots\ldots + \\ + (r_{n-1}s_1 + r_{n-2}s_2 + \ldots\ldots + r_2s_{n-2} + r_1s_{n-1}) \tag{511}$$

Por ser el módulo de un producto igual al producto de los módulos de los factores (párrafos 251 y 260), el segundo miembro de (511) es la suma de los módulos de los términos que figuran en el segundo miembro de (510). Ahora bien, como el módulo de una suma es cuando más igual á la suma de los módulos de los sumandos (párrafos 250 y 260) puesto que el segundo miembro de (511) tiende á cero conforme n crece hacia el ∞, el módulo del segundo miembro de (510) tenderá forzosamente á 0; al suceder esto (párrafos 249), en el límite dicho segundo miembro y de consiguiente el primero serán nulos y siempre resultará la expresión:

$$S = S'S''$$

289. La teoría de las funciones de variable imaginaria en el punto á que hemos llegado pasa de la esfera de las preliminares á los que nos hemos ceñido, al terreno de la investigación especulativa y abstracta propia del alto análisis.

La aplicación de los maravillosos símbolos del Cálculo llega á su turno, y el estudio se despoja de su carácter elemental.

Con las consideraciones anteriores sobre las series, damos pues fin á los elementos que hemos expuesto sobre la teoría de las cantidades imaginarias, temerosos de traspasar el lindero á que debemos ajustarnos.

Como antes hemos dicho, al Cálculo toca continuar el estudio sobre la forma que afectan las funciones exponenciales, circulares y logarítmicas en caso de variable imaginaria, las relaciones mutuas que las ligan, las formas de las derivadas y las diferenciales, las de las fórmulas de Taylor, de Mac-Laurin y de Lagrange, los procedimientos y métodos de integración, etc.

En algunas cuestiones de esta obra en que haya que apelar á alguna de estas teorías omitidas, á título de lema y con la mayor claridad posible expondremos las indispensables para nuestro objeto, con la concisión que sea suficiente.

Para no citar sino un caso, inmediatamente (bien que empleando caracteres chicos) vamos á ocuparnos de las "Funciones Hiperbólicas," y hemos necesitado demostrar la generalización de la función exponencial para establecer la primera fórmula.

A riesgo de insistir demasiado, hacemos un nuevo encarecimiento sobre el interés palpitante con que debe estudiarse todo lo relativo á las cantidades imaginarias, aparte de las tantas ventajas que su revindicación ha traído á la ciencia exacta; su carácter evidentemente general es por sí solo un mérito incalculable y el hecho de entrañar todas las cantidades posibles les da actualmente y con absoluta justicia el lugar predilecto.

NOCIONES SOBRE LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS.

290. Dividiremos el estudio de estas funciones en dos partes: 1°, Funciones Hiberbólicas Generales, y 2°, Funciones Hiperbólicas Reales; á su vez cada grupo de funciones en Directas é Inversas.

FUNCIONES HIPERBÓLICAS GENERALES.

291. **Funciones directas.** Hemos demostrado (párrafo 284) que la serie:

$$1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{1.2}+\frac{z^3}{1.2.3}+\cdots\cdots+\frac{z^n}{1.2.3\ldots\ldots n}+\cdots\cdots$$

es convergente y continua en toda la extensión del plano de los ejes cualquiera que sea el valor que tenga z, tiende pues á un límite que es una función $f(z)$ de z y que designaremos por e^z, pues que en efecto cuando z tiene un valor real x, dicha serie es el desarrollo de la *función* ex *ponencial* e^x que hemos estudiado en los Capítulos V y VII.

Escribiremos, pues, para la *función exponencial general:*

$$f(z)=e^z=1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{1.2}+\cdots\cdots+\frac{z^n}{1.2.3\ldots\ldots n}+\cdots\cdots \qquad (512)$$

Dando á la variable los valores z_1, z_2, se tendrá:

$$f(z_1)=1+\frac{z_1}{1}+\frac{z_1^2}{1.2}+\cdots+\frac{z_1^n}{1.2.3\ldots\ldots n}+\cdots,\quad f(z_2)=1+\frac{z_2}{1}+\frac{z_2^2}{1.2}+\cdots+\frac{z_2^n}{1.2.3\ldots\ldots n}+\cdots$$

Como estas series permanecen convergentes cuando se reemplaza cada término por su módulo, puede aplicárseles el teorema relativo á la multiplicación de las series (párrafo 288, tercer caso), la nueva serie obtenida cuyo primer término es 1 y en la que el término de rango n es:

$$1.\frac{z_2^n}{1.2.3\ldots\ldots n}+\frac{z_1}{1}.\frac{z_2^{n-1}}{1.2.3\ldots\ldots(n-1)}+\frac{z_1^2}{1.2}.\frac{z_2^{n-2}}{1.2.3\ldots\ldots(n-2)}+\cdots\cdots+\frac{z_1^n}{1.2.3\ldots\ldots n}.1$$

será también convergente y tendrá por suma el producto $f(z_1)f(z_2)$.

Como el término general de la nueva serie equivale á $\frac{(z_1+z_2)^n}{1.2.3\ldots\ldots n}$ dicha serie representa precisamente $f(z_1+z_2)$ y resultará:

$$f(z_1)f(z_2)=f(z_1+z_2) \quad \text{es decir:} \quad e^{z_1}.e^{z_2}=e^{(z_1+z_2)} \qquad (513)$$

que es la propiedad característica de la función exponencial general.

292. También tendremos atendiendo á la fórmula (512):

$$e^{-z}=1-\frac{z}{1}+\frac{z^2}{1.2}-\frac{z^3}{1.2.3}+\frac{z^4}{1.2.3.4}-\cdots\cdots \qquad (514)$$

Sumando y restando (512) y (514) se tiene:

$$\frac{e^z+e^{-z}}{2}=1+\frac{z^2}{1.2}+\frac{z^4}{1.2.3.4}+\frac{z^6}{1.2.3.4.5.6}+\cdots\cdots \qquad (515)$$

$$\frac{e^z-e^{-z}}{2}=z+\frac{z^3}{1.2.3}+\frac{z^5}{1.2.3.4.5}+\cdots\cdots \qquad (516)$$

que son convergentes ya sea z real y de valor finito (Capítulo V), ó bien imaginaria de módulo finito (Capítulo VIII).

Estas series se denominan el seno y coseno hiperbólicos de z y se escribe:

$$\operatorname{sen} \text{h}\, z=\frac{e^z-e^{-z}}{2},\quad \cos \text{h}\, z=\frac{e^z+e^{-z}}{2} \qquad (517)$$

de donde:

$$\operatorname{tang} \text{h}\, z=\frac{e^z-e^{-z}}{e^z+e^{-z}},\quad \cot \text{h}\, z=\frac{e^z+e^{-z}}{e^z-e^{-z}},\quad \sec \text{h}\, z=\frac{2}{e^z+e^{-z}},\quad \operatorname{cosec} \text{h}\, z=\frac{2}{e^z-e^{-z}} \qquad (518)$$

293. Tenemos además los desarrollos generales [1]:

$$\operatorname{sen} z=\frac{z}{1}-\frac{z^3}{1.2.3}+\frac{z^5}{1.2.3.4.5}\cdots\cdots,\quad \cos z=1-\frac{z^2}{1.2}+\frac{z^4}{1.2.3.4}\cdots\cdots \qquad (519)$$

Si en la serie (512) reemplazamos z por zi y por $-zi$, se tendrá:

$$e^{zi}=\left(1-\frac{z^2}{1.2}+\frac{z^4}{1.2.3.4}-\cdots\cdots\right)+i\left(\frac{z}{1}-\frac{z^3}{1.2.3}+\frac{z^5}{1.2.3.4.5}-\cdots\cdots\right)$$

$$e^{-zi}=\left(1-\frac{z^2}{1.2}+\frac{z^4}{1.2.3.4}-\cdots\cdots\right)-i\left(\frac{z}{1}-\frac{z^3}{1.2.3}+\frac{z^5}{1.2.3.4.5}-\cdots\cdots\right)$$

es decir (fórmulas 519):

$$e^{zi}=\cos z+i\operatorname{sen} z,\quad e^{-zi}=\cos z-i\operatorname{sen} z \qquad (520)$$

de las que se deducen las fórmulas dadas por la primera vez por *Euler* (compárese con el Capítulo VII, párrafo 185, IV):

$$\operatorname{sen} z=\frac{e^{zi}-e^{-zi}}{2i},\quad \cos z=\frac{e^{zi}+e^{-zi}}{2},\quad \operatorname{tang} z=\frac{e^{zi}-e^{-zi}}{i(e^{zi}+e^{-zi})}=-\frac{e^{zi}-e^{-zi}}{e^{zi}+e^{-zi}}i$$

luego:

$$\operatorname{sen} z=\frac{z}{1}-\frac{z^3}{1.2.3}+\cdots\cdots=\frac{e^{zi}-e^{-zi}}{2i},\quad \cos z=1-\frac{z^2}{1.2}+\frac{z^4}{1.2.3.4}+\cdots\cdots=\frac{e^{zi}+e^{-zi}}{2}$$

y reemplazando z por zi:

$$\operatorname{sen} zi=\frac{e^{-z}-e^z}{2i}=-\frac{\operatorname{sen} \text{h}\, z}{i},\quad \cos zi=\frac{e^{-z}+e^z}{2}=\cos \text{h}\, z \qquad (521)$$

de consiguiente:

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{sen} \text{h}\, z=\dfrac{\operatorname{sen} zi}{i},\quad \cos \text{h}\, z=\cos zi,\quad \operatorname{tang} \text{h}\, z=\dfrac{\operatorname{tang} zi}{i}\\ \cot \text{h}\, z=i\cot zi,\quad \sec \text{h}\, z=\sec zi,\quad \operatorname{cosec} \text{h}\, z=i\operatorname{cosec} zi\end{array}\right\} \qquad (522)$$

Cambiando de nuevo z en zi:

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{sen} z=\dfrac{\operatorname{sen} \text{h}\, zi}{i},\quad \cos z=\cos \text{h}\, zi,\quad \operatorname{tang} z=\dfrac{\operatorname{tang} \text{h}\, zi}{i}\\ \cot z=i\cot \text{h}\, zi,\quad \sec z=\sec \text{h}\, zi,\quad \operatorname{cosec} z=i\operatorname{cosec} \text{h}\, zi\end{array}\right\} \qquad (523)$$

[1] Estos desarrollos *generales* se deducen por un razonamiento semejante al que sirvió para establecer la fórmula (512).

294. Recurriendo á la fórmula (513) y reemplazando z_1, z_2 sucesivamente por $z_1 i$, $z_2 i$, $-z_1 i$, $-z_2 i$, se tendrá:

$$e^{(z_1+z_2)i}=e^{z_1 i}.e^{z_2 i},\quad e^{(z_1+z_2)i}=e^{-z_1 i}.e^{-z_2 i} \qquad (524)$$

Pero de acuerdo con las fórmulas (520) resulta:

$$\cos(z_1+z_2)+i\,\mathrm{sen}\,(z_1+z_2)=(\cos z_1+i\,\mathrm{sen}\,z_1)(\cos z_2+i\,\mathrm{sen}\,z_2)$$
$$\cos(z_1+z_2)-i\,\mathrm{sen}\,(z_1+z_2)=(\cos z_1-i\,\mathrm{sen}\,z_1)(\cos z_2-i\,\mathrm{sen}\,z_2)$$

Sumando y restando estas ecuaciones y después reduciendo, se tendrá:

$$\cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cos z_2-\mathrm{sen}\,z_1\,\mathrm{sen}\,z_2,\quad \mathrm{sen}\,(z_1+z_2)=\mathrm{sen}\,z_1\cos z_2+\cos z_1\,\mathrm{sen}\,z_2 \qquad (525)$$

fórmulas fundamentales de la *Trigonometría General* [1].

Suponiendo $z_2=-z_1$, la primera fórmula se reduce á:

$$1=\mathrm{sen}^2 z_1+\cos^2 z_1 \qquad (526)$$

que generaliza la fórmula análoga de la Trigonometría Elemental.

295. De la fórmula (526) resulta poniendo en general z en lugar de z_1 y luego zi por z:

$$\mathrm{sen}^2 zi+\cos^2 zi=1$$

y de acuerdo con las fórmulas (521):

$$\frac{\mathrm{sen\,h}^2 z}{i^2}+\cos \mathrm{h}^2 z=1 \quad \text{ó bien} \quad \cos\mathrm{h}^2 z-\mathrm{sen\,h}^2 z=1 \quad \text{que da:} \quad 1-\mathrm{tang\,h}^2 z=\mathrm{sec\,h}^2 z$$

de donde:

$$\mathrm{sec\,h}\,z=\sqrt{1-\mathrm{tang\,h}^2 z},\quad \cos\mathrm{h}\,z=\frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{tang\,h}^2 z}},\quad \mathrm{sen\,h}\,z=\frac{\mathrm{tang\,h}\,z}{\sqrt{1-\mathrm{tang\,h}^2 z}}$$
$$\mathrm{cosec\,h}\,z=\sqrt{\cot\mathrm{h}^2 z-1},\quad \mathrm{sen\,h}\,z=\frac{1}{\sqrt{\cot\mathrm{h}^2 z-1}},\quad \cos\mathrm{h}\,z=\frac{\cot\mathrm{h}\,z}{\sqrt{\cot\mathrm{h}^2 z-1}}$$

296. Poniendo en la fórmula (525) $z_1 i$ y $z_2 i$, por z_1 y z_2, resulta:

$$\left.\begin{aligned}\cos(z_1+z_2)i&=\cos z_1 i\cos z_2 i-\mathrm{sen}\,z_1 i\,\mathrm{sen}\,z_2 i\\ \mathrm{sen}\,(z_1+z_2)i&=\mathrm{sen}\,z_1 i\cos z_2 i+\cos z_1 i\,\mathrm{sen}\,z_2 i\end{aligned}\right\} \qquad (527)$$

y según las fórmulas del párrafo (293):

$$\left.\begin{aligned}\cos\mathrm{h}\,(z_1+z_2)&=\cos\mathrm{h}\,z_1\cos\mathrm{h}\,z_2+\mathrm{sen\,h}\,z_1\,\mathrm{sen\,h}\,z_2\\ \mathrm{sen\,h}\,(z_1+z_2)&=\mathrm{sen\,h}\,z_1\cos\mathrm{h}\,z_2+\cos\mathrm{h}\,z_1\,\mathrm{sen\,h}\,z_2\end{aligned}\right\} \qquad (528)$$

Asimismo:

$$\left.\begin{aligned}\cos\mathrm{h}\,(z_1-z_2)&=\cos\mathrm{h}\,z_1\cos\mathrm{h}\,z_2-\mathrm{sen\,h}\,z_1\,\mathrm{sen\,h}\,z_2\\ \mathrm{sen\,h}\,(z_1-z_2)&=\mathrm{sen\,h}\,z_1\cos\mathrm{h}\,z_2-\cos\mathrm{h}\,z_1\,\mathrm{sen\,h}\,z_2\end{aligned}\right\} \qquad (529)$$

[1] Como tanto estas fórmulas como las análogas que se han ido y se seguirán obteniendo son ciertas cualquiera que sea la variable, vemos generalizados los resultados de la Trigonometría que establece las fórmulas cuando la variable es real y una vez más se advierte el carácter eminentemente generalizador de las cantidades imaginarias.

Análogamente:

$$\mathrm{tang\,h}\,(z_1+z_2)=\frac{\mathrm{tang\,h}\,z_1+\mathrm{tang\,h}\,z_2}{1+\mathrm{tang\,h}\,z_1\,\mathrm{tang\,h}\,z_2},\quad \mathrm{tang\,h}\,(z_1-z_2)=\frac{\mathrm{tang\,h}\,z_1-\mathrm{tang\,h}\,z_2}{1-\mathrm{tang\,h}\,z_1\,\mathrm{tang\,h}\,z_2} \qquad (530)$$

Hay que atender cuidadosamente á las analogías y á las diferencias entre las funciones hiperbólicas y las circulares directas generales.

297. Análogamente hallaríamos:

$$\cos\mathrm{h}\,2z=\cos\mathrm{h}^2 z+\mathrm{sen\,h}^2 z,\ \mathrm{sen\,h}\,2z=2\,\mathrm{sen\,h}\,z\cos\mathrm{h}\,z,\ \mathrm{tang\,h}\,2z=\frac{2\,\mathrm{tang\,h}\,z}{1+\mathrm{tang\,h}^2 z},\ \text{etc.} \qquad (531)$$

Igualmente:

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{sen\,h}\,z=\sqrt{\frac{\cos\mathrm{h}\,2z-1}{2}},\quad \mathrm{sen\,h}\,\frac{z}{2}=\sqrt{\frac{\cos\mathrm{h}\,z-1}{2}},\quad \cos\mathrm{h}\,z=\sqrt{\frac{\cos\mathrm{h}\,2z+1}{2}}\\ &\cos\mathrm{h}\,\frac{z}{2}=\sqrt{\frac{\cos\mathrm{h}\,z+1}{2}},\quad \mathrm{tang\,h}\,z=\sqrt{\frac{\cos\mathrm{h}\,2z-1}{\cos\mathrm{h}\,2z+1}},\quad \mathrm{tang\,h}\,\frac{z}{2}=\sqrt{\frac{\cos\mathrm{h}\,z-1}{\cos\mathrm{h}\,z+1}}\end{aligned}\right\} \qquad (532)$$

298. **Funciones inversas.** Se adopta la notación $\arg\,\mathrm{sen\,h}\,z$, que se lee: argumento cuyo seno hiperbólico es z, y escribiendo: $u=\arg\,\mathrm{sen\,h}\,z$, tendremos:

$$\mathrm{sen}\,h\,u=\frac{e^u-e^{-u}}{2}=z$$

de donde:

$$e^u=z\pm\sqrt{z^2+1}$$
$$u=\arg\,\mathrm{sen\,h}\,z=\mathrm{l}\,(z\pm\sqrt{z^2+1}) \qquad (533)$$

Análogamente:

$$u=\arg\,\cos\mathrm{h}\,z=\mathrm{l}\,(z\pm\sqrt{z^2+1}) \qquad (534)$$

Si $u=\arg\,\mathrm{tang\,h}\,z$, resulta:

$$e^{2u}=\frac{1+z}{1-z}$$

luego:

$$u=\arg\,\mathrm{tang\,h}\,z=\tfrac{1}{2}\,\mathrm{l}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

Análogamente:

$$\left.\begin{aligned}u&=\arg\,\cot\mathrm{h}\,z=\tfrac{1}{2}\,\mathrm{l}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)\\ u&=\arg\,\mathrm{sec\,h}\,z=\mathrm{l}\left(\frac{1\pm\sqrt{1-z^2}}{z}\right)\\ u&=\arg\,\mathrm{cosec\,h}\,z=\mathrm{l}\left(\frac{1\pm\sqrt{1+z^2}}{z}\right)\end{aligned}\right\} \qquad (535)$$

FUNCIONES HIPERBÓLICAS REALES.

299. **Funciones directas.** 1º Sea

$$\mathrm{sen\,h}\,x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\frac{1}{2}\left(e^x-\frac{1}{e^x}\right) \qquad (536)$$

Para $x=0$, $\mathrm{sen\,h}\,x=0$; si x crece de 0 al ∞, $\mathrm{sen\,h}\,x$ crece de 0 al ∞.

Así pues, los límites de sen hx son $-\infty$ y $+\infty$ (como los de tang x), pues si cambia x de signo, sen hx y tang x no alteran en valor absoluto.

2.º Sea

$$\cos \mathrm{h}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left(e^x + \frac{1}{e^x}\right)$$

Para $x=0$, cos h$x=1$; si x crece de 0 al ∞, cos hx crece de $+1$ al ∞; luego los límites son:

$$+1 \text{ y } +\infty \left(\text{como } \sec x \text{ cuando } x \text{ crece de } 0 \text{ á } \frac{\pi}{2}\right)$$

3.º Sea

$$\operatorname{tang} \mathrm{h}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 - e^{\frac{1}{2x}}}{1 + e^{\frac{1}{2x}}}$$

Para $x=0$, tang h$x=0$; si x crece de 0 al ∞, tang hx crece de 0 á $+1$. En realidad los límites son -1 y $+1$ (como los del seno y coseno).

4.º Si se tiene cosec hx, sus límites son los de sen hx.

5.º Si sec hx, sus límites son 1 á 0 $\left(\text{como los de } \cos x, \text{ si } x \text{ varía de } 0 \text{ á } \frac{\pi}{2}\right)$.

6.º En fin, cot hx varía de $+\infty$ á $+1$ y de $-\infty$ á -1 (como sec x).

300. En cuanto á la diferenciación de las funciones hiperbólicas reales, se tendrá:

$$\left.\begin{aligned}
&\mathrm{d}\,\mathrm{sen}\,\mathrm{h}\,x = \mathrm{d}\,\tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})\,\mathrm{d}x = \cos\mathrm{h}\,x\,\mathrm{d}x\\
&\mathrm{d}\cos\mathrm{h}\,x = \mathrm{sen}\,\mathrm{h}\,x\,\mathrm{d}x\\
&\mathrm{d}\cot\mathrm{h}\,x = -\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{sen}^2\mathrm{h}\,x}\\
&\mathrm{d}\,\mathrm{tang}\,\mathrm{h}\,x = \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2\mathrm{h}\,x}\\
&\mathrm{d}\sec\mathrm{h}\,x = -\mathrm{tang}\,\mathrm{h}\,x\sec\mathrm{h}\,x\,\mathrm{d}x\\
&\mathrm{d}\,\mathrm{cosec}\,\mathrm{h}\,x = -\cot\mathrm{h}\,x\,\mathrm{cosec}\,\mathrm{h}\,\mathrm{d}x\\
&\mathrm{d}\,\mathrm{l}\,\mathrm{sen}\,\mathrm{h}\,x = \frac{\cos\mathrm{h}\,x\,\mathrm{d}x}{\mathrm{sen}\,\mathrm{h}\,x} = \cot\mathrm{h}\,x\,\mathrm{d}x\\
&\mathrm{d}\,\mathrm{l}\cos\mathrm{h}\,x = \frac{\mathrm{sen}\,\mathrm{h}\,x\,\mathrm{d}x}{\cos\mathrm{h}\,x} = \mathrm{tang}\,\mathrm{h}\,x\,\mathrm{d}x\\
&\mathrm{d}\,\mathrm{l}\,\mathrm{tang}\,\mathrm{h}\,x = \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2\mathrm{h}\,x\,\mathrm{tang}\,\mathrm{h}\,x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{sen}\,\mathrm{h}\,x\cos\mathrm{h}\,x}
\end{aligned}\right\} \quad (537)$$

301. Respecto á la integración:

$$\left.\begin{aligned}
&\int \cos\mathrm{h}\,x\,\mathrm{d}x = \mathrm{sen}\,\mathrm{h}\,x + \mathrm{C}, && \int \mathrm{sen}\,\mathrm{h}\,x\,\mathrm{d}x = \cos\mathrm{h}\,x + \mathrm{C}\\
&\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2\mathrm{h}\,x} = \mathrm{tang}\,\mathrm{h}\,x + \mathrm{C}, && \int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{sen}^2\mathrm{h}\,x} = -\cot\mathrm{h}\,x + \mathrm{C}\\
&\int \frac{\mathrm{sen}\,\mathrm{h}\,x\,\mathrm{d}x}{\cos\mathrm{h}^2 x} = -\sec\mathrm{h}\,x + \mathrm{C}, && \int \frac{\cos\mathrm{h}\,x\,\mathrm{d}x}{\mathrm{sen}^2\mathrm{h}\,x} = -\mathrm{cosec}\,\mathrm{h}\,x + \mathrm{C}\\
&\int \cot\mathrm{h}\,x\,\mathrm{d}x = \mathrm{l}\,\mathrm{sen}\,\mathrm{h}\,x + \mathrm{C}, && \int \mathrm{tang}\,\mathrm{h}\,x\,\mathrm{d}x = \mathrm{l}\cos h\,x + \mathrm{C}\\
&\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{sen}\,\mathrm{h}\,x\cos\mathrm{h}\,x} = \mathrm{l}\,\mathrm{tang}\,\mathrm{h}\,x + \mathrm{C} && \text{etc.}
\end{aligned}\right\} \quad (538)$$

302. **Funciones inversas.** Con respecto á las funciones inversas tendremos:

$$\left.\begin{aligned}
&\mathrm{d}\arg\mathrm{sen}\,\mathrm{h}\,x = \mathrm{d}\,\mathrm{l}\,(x + \sqrt{x^2+1}) = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}\\
&\mathrm{d}\arg\cos\mathrm{h}\,x = \pm\,\mathrm{d}\,\mathrm{l}\,(x + \sqrt{x^2-1}) = \pm\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}}, \ (x>1)\\
&\mathrm{d}\arg\mathrm{tang}\,\mathrm{h}\,x = \mathrm{d}\,\tfrac{1}{2}\,\mathrm{l}\,\frac{1+x}{1-x} = \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}, \ (x^2<1)\\
&\mathrm{d}\arg\cot\mathrm{h}\,x = \mathrm{d}\,\mathrm{l}\,\frac{1\pm\sqrt{1+x^2}}{x} = -\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}}\\
&\mathrm{d}\arg\sec\mathrm{h}\,x = \pm\,\mathrm{d}\,\mathrm{l}\,\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} = \mp\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-x^2}}, \ (0<x<1)\\
&\mathrm{d}\arg\mathrm{cosec}\,\mathrm{h}\,x = \mathrm{d}\,\tfrac{1}{2}\,\mathrm{l}\,\frac{x+1}{x-1} = -\frac{\mathrm{d}x}{x^2-1} = \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}, \ (x^2>1)
\end{aligned}\right\} \quad (539)$$

de donde se deducen inmediatamente las integrales correspondientes.

303. No pudiendo entrar en grandes detalles, recomendamos al lector el "*Recueil de formules et de Tables numériques*" de Mr. Hoüel en que ha incluído su Tabla de los valores de las funciones hiperbólicas reales utilizando las Tablas de las funciones circulares directas reales; la consulta de dicha obra se facilitará extraordinariamente con las nociones precedentes.

Dejamos á las obras especiales la tarea de tratar con extensión todo lo relativo á las funciones de que nos hemos ocupado, haciendo notar que las obras que de más ayuda nos han servido para ordenar su estudio son los "Cursos de Álgebra" de Ch. Comberousse y Eduardo Prado.

Ultimamente se ha generalizado en extremo el empleo de las funciones hiperbólicas, y para citar un ejemplo de peso, recordamos la "*Mecánica General*" de A. Flamant, obra verdaderamente notable, de un método, un estilo, un mérito indiscutibles y adoptada como texto en nuestra "Escuela Nacional de Ingenieros."
