La característica de un elemento es la suma de los números de orden de la hilera y de la columna que en él se cruzan.

La suma de las características de dos menores complementarios es un número par.

317. **Propiedades y transformaciones de los determinantes.** I. *No se altera un determinante cuando se cambian las hileras en columnas y vice versa guardando el orden de sucesión.*

Comparando los dos determinantes:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \ldots\ldots & l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \ldots\ldots & l_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \ldots\ldots & l_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n & b_n & c_n \ldots\ldots & l_n \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \ldots\ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & b_3 \ldots\ldots & b_n \\ c_1 & c_2 & c_3 \ldots\ldots & c_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ l_1 & l_2 & l_3 \ldots\ldots & l_n \end{vmatrix}$$

resulta que como tienen el mismo término principal, los desarrollos de ambos serán idénticos (párrafo 310, etc.)

Este teorema se confunde con la proposición (párrafo 310) de que lo que se dice de las hileras se dice de las columnas y vice versa.

II. *Cuando en un determinante se cambian entre sí dos líneas paralelas cualesquiera, el determinante cambia de signo; es decir, queda multiplicado por -1.*

La modificación enunciada equivale á cambiar en cada término del determinante dos índices ó dos letras (párrafo 305, etc.), de consiguiente la permutación representada por cada término cambia de signo (ó de clase); es decir, que en definitiva el determinante ha quedado multiplicado por -1.

III. *Cuando en un determinante hay dos hileras ó dos columnas idénticas, su valor es nulo.*

Sea Δ el determinante propuesto; si cambian entre sí las líneas iguales, por una parte el determinante queda idéntico y por otra queda multiplicado por -1 y se cambia en $-\Delta$.

Para que pueda existir la relación: $\Delta = -\Delta$, es preciso que Δ sea nulo.

IV. Teorema fundamental. *Todo determinante es una función lineal y homogénea de los elementos de una misma hilera ó de una misma columna y puede, de consiguiente, ordenarse según los elementos de esta línea ó de esta columna.*

En primer lugar, puesto que por definición cada término del determinante contiene un *único* elemento de cada hilera ó de cada columna, el determinante será una función *lineal* ó de *primer grado* de los elementos de una misma hilera ó de una misma columna elegida arbitrariamente.

En segundo lugar, puesto que cada término es de primer grado respecto al elemento de la hilera ó de la columna elegida que contiene, el determinante á su vez será una función *homogénea* de estos elementos.

Poniendo pues en evidencia en cada término el elemento que entra en la hilera ó la columna elegida, se podrá *ordenar* el determinante según los elementos de dicha línea.

Sea el determinante de n.º grado:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \ldots\ldots & l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \ldots\ldots & l_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n & b_n & c_n \ldots\ldots & l_n \end{vmatrix}$$

Si elegimos como *elementos ordenadores* los de la primera columna, por ejemplo; tomando en cuenta el teorema anterior, podremos escribir en general:

$$\Delta = A_1 a_1 + A_2 a_2 + A_3 a_3 + \ldots\ldots + A_n a_n$$

expresión en la que $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots, A_n$, no contienen á los factores de que son coeficientes y cuya ley de formación vamos á averiguar.

Todos los términos del determinante que contienen á a_1, no pueden contener ningún otro elemento de la primera hilera y la primera columna á las que á la vez pertenece a_1. En cada uno de dichos términos a_1 estará de consiguiente multiplicada por todas las disposiciones posibles de $n-1$ elementos elegidos en las $n-1$ hileras y $n-1$ columnas restantes; estas disposiciones constituyen precisamente (párrafo 316) el determinante menor de $n-1$ orden y de la primera clase que resulta de suprimir en el determinante primitivo la primera hilera y la primera columna; A_1 es, pues, dicho determinante menor.

Análogamente llegaríamos á concluir en definitiva, por el mismo razonamiento, que: $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots, A_n$ *son los determinantes menores de la primera clase, obtenidos suprimiendo en el determinante propuesto y sucesivamente, la hilera y la columna que se cruzan en el elemento considerado respectivamente:* $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n$.

Ordenando el determinante Δ propuesto según los elementos de las diversas columnas, resultará:

$$\begin{aligned} \Delta &= A_1 a_1 + A_2 a_2 + \ldots\ldots + A_n a_n \\ \Delta &= B_1 b_1 + B_2 b_2 + \ldots\ldots + B_n b_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Delta &= L_1 l_1 + L_2 l_2 + \ldots\ldots + L_n l_n \end{aligned}$$

Vemos que las columnas verticales que se forman escribiendo como lo hemos hecho las anteriores ecuaciones, representan también los valores del determinante Δ ordenado según los elementos de las diversas hileras y que son:

$$\begin{aligned} \Delta &= A_1 a_1 + B_1 b_1 + \ldots\ldots + L_1 l_1 \\ \Delta &= A_2 a_2 + B_2 b_2 + \ldots\ldots + L_2 l_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Delta &= A_n a_n + B_n b_n + \ldots\ldots + L_n l_n \end{aligned}$$

V. *Si en un determinante todos los elementos menos uno de una hilera ó de una columna son nulos, el determinante propuesto es igual al producto de este elemento por el determinante menor que resulta de suprimir la hilera y la columna que en él se cruzan.*

Si ordenamos el determinante Δ respecto á los elementos de la línea cuyos elementos menos uno son nulos, tendremos:

$$\Delta = M_1 e_1 + M_2 e_2 + \ldots\ldots + M_a e_a + \ldots\ldots + M_n e_n$$

llamando en general: $e_1, e_2, \ldots., e_a, \ldots.\ e_n$ los elementos, y $M_1, M_2, \ldots., M_a, \ldots.\ M_n$ los menores respectivos.

Si todos los elementos son nulos, salvo e_a, resultará: $\Delta = M_a e_a$.

Corolario I. *Todo determinante puede ponerse bajo la forma de un determinante de un orden más elevado.*

Por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ x_2 & a_2 & b_2 & c_2 \\ x_3 & a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

cualesquiera que sean los valores de x_1, x_2 y x_3.

Corolario II. *Todo determinante que tiene una hilera ó una columna constituída por elementos todos nulos, es nulo.*

Corolario III. *Cuando un determinante tiene nulos todos los elementos situados de un mismo lado de la diagonal del cuadrado, su valor se reduce al de su término principal.*

Se tiene:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \dots & l_1 \\ 0 & b_2 & c_2 & \dots & l_2 \\ 0 & 0 & c_3 & \dots & l_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 000 & l_n \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & \dots\dots & l_2 \\ 0 & c_3 & \dots\dots & l_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots\dots & l_n \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 \dots\dots l_n$$

VI. *Si se multiplican ó dividen por un mismo número todos los elementos de una misma hilera ó de una misma columna, el determinante queda multiplicado ó dividido por este número.*

Sea Δ el determinante propuesto que desarrollado con respecto á una línea cuyos elementos sean, por ejemplo: $e_1, e_2, \dots\dots, e_\alpha, \dots\dots e_n$ conduce á la expresión:

$$\Delta = M_1 e_1 + M_2 e_2 + \dots\dots + M_\alpha e_\alpha + \dots\dots + M_n e_n$$

si se multiplican ó dividen todos los elementos por un mismo número, el primer miembro ó sea Δ sufriría la misma alteración.

Corolario I. *No se altera el valor de un determinante si se introduce ó suprime un factor común en todos los elementos de una misma línea, siempre que á la vez se ponga este factor en evidencia dividiendo ó multiplicando al determinante.*

Corolario II. *Si se cambian los signos de los elementos de una misma línea, es preciso dividir ó multiplicar por -1 el determinante.*

VII. *Si un determinante tiene dos líneas proporcionales* (compuestas de elementos proporcionales) *su valor es nulo.*

La verdad del enunciado resulta de los teoremas III y VI.

VIII. *Si los elementos de una misma línea son sumas de un mismo número de cantidades, el determinante propuesto es la suma de tantos determinantes como términos hay en uno de estos elementos. Estos determinantes se forman asociando respectivamente los diversos términos de los elementos de la línea compuesta con los de las otras líneas simples.*

Se tiene (teorema IV):

$$\begin{vmatrix} a_1+k_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+k_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (a_1+k_1)M_1 + (a_2+k_2)M_2 + (a_3+k_3)M_3$$

$$= (a_1 M_1 + a_2 M_2 + a_3 M_3) + (k_1 M_1 + k_2 M_2 + k_3 M_3)$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1 \\ k_2 & b_2 & c_2 \\ k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

IX. *No altera el valor de un determinante añadiendo á los elementos de una misma línea los de otras líneas respectivamente multiplicadas por factores constantes.*

Se tiene (teoremas VII y VIII):

$$\begin{vmatrix} a_1+mb_1+nc_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+mb_2+nc_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+mb_3+nc_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} mb_1 & b_1 & c_1 \\ mb_2 & b_2 & c_2 \\ mb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} nc_1 & b_1 & c_1 \\ nc_2 & b_2 & c_2 \\ nc_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

pero como los dos últimos determinantes son nulos (teorema VII) queda demostrada la proposición que, como se comprende, es aún cierta cuando se modifican análoga-

mente varias líneas (hileras ó columnas) del determinante y cuando los coeficientes m y n valen ± 1.

Corolario. *Cuando los elementos correspondientes de un cierto número de líneas están ligados en el determinante propuesto por relaciones lineales y homogéneas, el determinante es nulo.*

Sean:

$$a_1 + mb_1 + nc_1 = 0$$
$$a_2 + mb_2 + nc_2 = 0$$
$$a_3 + mb_3 + nc_3 = 0$$

las relaciones lineales homogéneas supuestas; en virtud de ellas inmediatamente se concluye el enunciado (teorema V, corolario II).

X. *Cuando dos determinantes difieren por una línea se les puede reunir en uno igual á su suma ó á su diferencia, añadiendo ó quitando término á término las dos líneas no idénticas y conservando las demás.*

Sean los determinantes:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Desarrollando tanto el determinante D como el Δ, según los elementos de la primera columna, sus desarrollos respectivos tendrán por valor la suma algebraica de los productos de los elementos de dicha primera columna por los menores respectivos; de consiguiente resultará:

$$D = aA'_1 + a_2 A'_2 + a_3 A'_3, \quad \Delta = \alpha_1 A'_1 + \alpha_2 A'_2 + \alpha_3 A'_3$$

Tomando los signos superiores y los inferiores:

$$D \pm \Delta = (a_1 \pm \alpha_1) A'_2 + (a_2 \pm \alpha_2) A'_2 + (a_3 \pm \alpha_3) A'_3$$

es decir:

$$D + \Delta = \begin{vmatrix} a_1+\alpha_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+\alpha_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+\alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad D - \Delta = \begin{vmatrix} a_1-\alpha_1 & b_1 & c_1 \\ a_2-\alpha_2 & b_2 & c_2 \\ a_3-\alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

318. **Ley de la formación de un determinante.** Supongamos que el determinante Δ queda desarrollado por los elementos de una hilera α, por ejemplo, cuyos elementos son: $a_\alpha, b_\alpha, \dots\dots, l_\alpha$ y los menores respectivos: $A_\alpha, B_\alpha, \dots\dots, L_\alpha$, tendremos:

$$\Delta = A_\alpha a_\alpha + B_\alpha b_\alpha + \dots\dots + L_\alpha l_\alpha \qquad (541)$$

En esta expresión: $A_\alpha, B_\alpha, \dots\dots, L_\alpha$ indican, como hemos dicho, los determinantes menores de primera clase correspondientes á la supresión de la hilera α combinada con la supresión de la 1ª, 2ª, 3ª, ..., nª columna, menores cuya formación vamos á explicar.

Si llevamos la hilera α al primer rango, es decir, permutándola sucesivamente con cada una de las hileras superiores hasta permutarla con la 1ª, á cada operación cambiará el signo del valor del determinante (teorema II) y para conservar á este valor su verdadero signo, á cada operación habrá también que multiplicar -1; como se han efectuado $\alpha - 1$ cambios, habrá que multiplicar por $(-1)^{\alpha-1}$ ó más bien por $(-1)^{\alpha+1}$, puesto que $(-1)^2 = 1$.

Tendremos de consiguiente:

$$
\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \ldots\ldots & l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \ldots\ldots & l_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_a & b_a & c_a & \ldots\ldots & l_a \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n & b_n & c_n & \ldots\ldots & l_n \end{vmatrix}=(-1)^{a+1}\begin{vmatrix} a_a & b_a & c_a & \ldots\ldots & l_a \\ a_1 & b_1 & c_1 & \ldots\ldots & l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \ldots\ldots & l_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{a-2} & b_{a-2} & c_{a-2} & \ldots\ldots & l_{a-2} \\ a_{a-1} & b_{a-1} & c_{a-1} & \ldots\ldots & l_{a-1} \\ a_{a+1} & b_{a+1} & c_{a+1} & \ldots\ldots & l_{a+1} \\ a_{a+2} & b_{a+2} & c_{a+2} & \ldots\ldots & l_{a+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n & b_n & c_n & \ldots\ldots & l_n \end{vmatrix} \qquad (542)
$$

si ahora suponemos nulos todos los elementos (salvo a_a) de la primera hilera, tendremos para el determinante por la fórmula (541) el valor:

$$\Delta=A_a a_a$$

y por la (542) el valor:

$$
\Delta=(-1)^{a+1}\begin{vmatrix} a_a & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & \ldots\ldots & l_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{a-1} & b_{a-1} & c_{a-1} & \ldots\ldots & l_{a-1} \\ a_{a+1} & b_{a+1} & c_{a+1} & \ldots\ldots & l_{a+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n & b_n & c_n & \ldots\ldots & l_n \end{vmatrix}
$$

$$
=(-1)^{a+1} a_a \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & \ldots\ldots & l_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{a-1} & c_{a-1} & \ldots\ldots & l_{a-1} \\ b_{a+1} & c_{a+1} & \ldots\ldots & l_{a+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n & c_n & \ldots\ldots & l_n \end{vmatrix}
$$

De consiguiente resultará:

$$
A_a=(-1)^{a+1}\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & \ldots\ldots & l_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{a-1} & c_{a-1} & \ldots\ldots & l_{a-1} \\ b_{a+1} & c_{a+1} & \ldots\ldots & l_{a+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n & c_n & \ldots\ldots & l_n \end{vmatrix}
$$

Para hallar á B_a es preciso hacer pasar al primer rango, como acabamos de hacerlo, la línea a; *pero además* el elemento b_a y para esto es preciso efectuar una nueva permutación entre las dos primeras columnas y de consiguiente *aumentar en una unidad* el exponente de -1; tendremos pues:

$$
B_a=(-1)^{a+1}\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & \ldots\ldots & l_1 \\ a_2 & c_2 & \ldots\ldots & l_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{a-1} & c_{a-1} & \ldots\ldots & l_{a-1} \\ a_{a+1} & c_{a+1} & \ldots\ldots & l_{a+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n & c_n & \ldots\ldots & l_n \end{vmatrix}
$$

Es inútil proseguir explicando cómo se irían obteniendo C_a, D_a, ..., L_a, pues claramente se comprende que habría que ir aumentando una unidad sucesivamente el exponente de -1, es decir, como entonces á cada operación su exponente pasa de par á impar y recíprocamente los valores de los menores: A_a, B_a, ..., L_a son alternativamente de signos contrarios comenzando por $+$ ó $-$ según el rango de partida.

Por ejemplo, en el determinante de tercer orden se tiene:

$$\Delta=A_1 a_1+B_1 b_1+C_1 c_1$$

Haciendo $a=1$ en los resultados precedentes, se tiene:

$$A_1=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}=b_2 c_3-b_3 c_2$$

$$B_1=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}=-(a_2 c_3-a_3 c_2)$$

$$C_1=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}=a_2 b_3-a_3 b_2$$

De consiguiente no restará sino sustituir en Δ el valor respectivo de cada uno de estos menores, con lo que se tendrá:

$$\Delta=a_1(b_2 c_3-b_3 c_2)-b_1(a_2 c_3-a_3 c_2)+c_1(a_2 b_3-a_3 b_2)$$

y desarrollando:

$$\Delta=a_1 b_2 c_3-a_1 b_3 c_2-b_1 a_2 c_3+b_1 a_3 c_2+c_1 a_2 b_3-c_1 a_3 b_2$$

que es efectivamente el desarrollo del determinante de tercer orden.

319. Recordando las denominaciones del párrafo (316) y atendiendo á lo que acabamos de exponer, resulta una regla práctica cómoda para efectuar el desarrollo de un determinante.

El menor correspondiente á un elemento de una línea cualquiera, aparte del signo propio de su valor numérico particular, está afectado de otro que se combina con el primero y que depende de la suma total de los números de orden que tienen en el determinante primitivo la hilera y la columna que se cruzan en dicho elemento, es decir, que depende de la *característica* de dicho elemento.

Puede, pues, formularse en general este último signo afectando el menor de la potencia $(-1)^z$ en la que z representa la característica del elemento. En otras palabras: *el desarrollo general del determinante según los elementos de una línea cualquiera, es igual á la suma algebraica de los productos de cada uno de estos elementos por el menor correspondiente. Cuando la suma de los números que expresan el rango de la hilera y de la columna que se cruzan en el elemento es un número par, habrá que afectar el producto del signo $+$ y si dicho número es impar, habrá que afectarlo del signo $-$* [1].

Los menores correspondientes á los elementos de la línea elegida afectados de los signos que deben llevar según la regla anterior, se denominan para mayor brevedad *complementos algebraicos* de los elementos, y dicha regla puede, de consiguiente, enunciarse de la siguiente manera expresiva y expedita: *el desarrollo de un determinante es igual á la suma algebraica de los productos de los elementos de una misma línea cualquiera por sus complementos algebraicos.*

[1] Como hablamos en abstracto, sólo nos referimos á los signos que deben existir en tesis general, sin preocuparnos de los signos especiales que dependan del valor numérico.

Según esta regla será sencillísimo desarrollar el determinante de cuarto grado según los elementos de la primera columna; por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_4 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 \left(b_2 \begin{vmatrix} c_3 & d_3 \\ c_4 & d_4 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} c_2 & d_2 \\ c_4 & d_4 \end{vmatrix} + b_4 \begin{vmatrix} c_2 & d_2 \\ c_3 & d_3 \end{vmatrix} \right) - a_2 \left(b_1 \begin{vmatrix} c_3 & d_3 \\ c_4 & d_4 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_4 & d_4 \end{vmatrix} + b_4 \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_3 & d_3 \end{vmatrix} \right)$$

$$+ a_3 \left(b_1 \begin{vmatrix} c_2 & d_2 \\ c_4 & d_4 \end{vmatrix} - b_2 \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_4 & d_4 \end{vmatrix} + b_4 \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix} \right) - a_4 \left(b_1 \begin{vmatrix} c_2 & d_2 \\ c_3 & d_3 \end{vmatrix} - b_2 \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_3 & d_3 \end{vmatrix} + b_3 \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix} \right)$$

$$= a_1 b_2 (c_3 d_4 - c_4 d_3) - a_1 b_3 (c_2 d_4 - c_4 d_2) + a_1 b_4 (c_2 d_3 - c_3 d_2) - a_2 b_1 (c_3 d_4 - c_4 d_3)$$
$$+ a_2 b_3 (c_1 d_4 - c_4 d_1) - a_2 b_4 (c_1 d_3 - c_3 d_1) + a_3 b_1 (c_2 d_4 - c_4 d_2) - a_3 b_2 (c_1 d_4 - c_4 d_1)$$
$$+ a_3 b_4 (c_1 d_2 - c_2 d_1) - a_4 b_1 (c_2 d_3 - c_3 d_2) + a_4 b_2 (c_1 d_3 - c_3 d_1) - a_4 b_3 (c_1 d_2 - c_2 d_1)$$
$$= a_1 b_2 c_3 d_4 - a_1 b_2 c_4 d_3 - a_1 b_3 c_2 d_4 + a_1 b_3 c_4 d_2 + a_1 b_4 c_2 d_3 - a_1 b_4 c_3 d_2 - a_2 b_1 c_3 d_4$$
$$+ a_2 b_1 c_4 d_3 + a_2 b_3 c_1 d_4 - a_2 b_3 c_4 d_1 - a_2 b_4 c_1 d_3 + a_2 b_4 c_3 d_1 + a_3 b_1 c_2 d_4 - a_3 b_1 c_4 d_2$$
$$- a_3 b_2 c_1 d_4 + a_3 b_2 c_4 d_1 + a_3 b_4 c_1 d_2 - a_3 b_4 c_2 d_1 - a_4 b_1 c_2 d_3 + a_4 b_1 c_3 d_2 + a_4 b_2 c_1 d_3$$
$$- a_4 b_2 c_3 d_1 - a_4 b_3 c_1 d_2 + a_4 b_3 c_2 d_1$$

320. Vemos que no hay dificultad para la comprensión de la forma del desarrollo de un determinante, pero hay que convenir que el método expuesto tan fácil en teoría, aplicado en la práctica á un determinante de orden elevado, es sumamente laborioso; por esta causa, en la práctica, dado un determinante de orden elevado [como adelante veremos en las aplicaciones y valiéndonos de las propiedades explicadas (párrafo 317)] se va *reduciendo* á otros sucesivos de orden menor hasta reducirlo, por ejemplo, á un determinante de segundo ó de tercer orden.

En cuanto al de segundo orden, su solución ya es fácil, pues sólo hay que efectuar el producto de los elementos de la *diagonal secundaria* y restarlo del que originan los de la *diagonal principal*, atendiendo á la forma general:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Respecto al de tercer orden que puede ofrecer más dificultad, el profesor *Sarrus* ha dado una regla práctica bastante sencilla y que consiste en escribir abajo de la tercera hilera otra vez la primera y luego la segunda, en esta forma:

$$\begin{array}{ccc} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{array}$$

afectando de signo + á los productos de los elementos situados en las tres diagonales que descienden de izquierda á derecha y de signo — á los que corresponden á las otras tres diagonales; operando así, resulta inmediatamente:

$$a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3$$

expresión idéntica á la hallada en el párrafo 318.

321. Para llegar con más rapidez á la sucesiva simplificación del determinante, es de

gran utilidad el teorema siguiente cuya aplicación continua conduce al resultado sin tanteos estériles.

TEOREMA. *Siempre se puede un determinante transformar en otro que tenga una hilera ó una columna cuyos elementos todos sean la unidad.*

Sea el determinante de tercer grado:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

en el que se desea cambiar en 1 los elementos de la primera columna, por ejemplo.

Sea m el *menor múltiplo común* de dichos elementos que conducirán á las relaciones:

$$m = a_1 q_1 = a_2 q_2 = a_3 q_3$$

De acuerdo con el párrafo 317, propiedad VI, corolario I, podremos escribir multiplicando las tres hileras por q_1, q_2, q_3 respectivamente, y dividiendo el determinante por $q_1 q_2 q_3$ para que no haya alteración:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{q_1 q_2 q_3} \begin{vmatrix} m & b_1 q_1 & c_1 q_1 \\ m & b_2 q_2 & c_2 q_2 \\ m & b_3 q_3 & c_3 q_3 \end{vmatrix} = \frac{m}{q_1 q_2 q_3} \begin{vmatrix} 1 & b_1 q_1 & c_1 q_1 \\ 1 & b_2 q_2 & c_2 q_2 \\ 1 & b_3 q_3 & c_3 q_3 \end{vmatrix}$$

que es lo que expresa el enunciado [1].

Restando la primera hilera de las demás (párrafo 317, propiedad IX) se tendrá llamando Δ al determinante:

$$\Delta = \frac{m}{q_1 q_2 q_3} \begin{vmatrix} 1 & b_1 q_1 & c_1 q_1 \\ 0 & b_2 q_2 - b_1 q_1 & c_2 q_2 - c_1 q_1 \\ 0 & b_3 q_3 - b_1 q_1 & c_3 q_3 - c_1 q_1 \end{vmatrix}$$
$$= \frac{m}{q_1 q_2 q_3} [(b_2 q_2 - b_1 q_1)(c_3 q_3 - c_1 q_1) - (b_3 q_3 - b_1 q_1)(c_2 q_2 - c_1 q_1)]$$

valor final del determinante.

APLICACIONES [2].

322. I. Sean los determinantes de tercer orden:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 7 & 9 \\ 12 & 28 & 11 \\ 15 & 35 & 13 \end{vmatrix}, \quad \Delta' = \begin{vmatrix} 5 & 7 & 2 \\ 15 & 23 & 7 \\ 9 & 14 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \Delta'' = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \end{vmatrix}$$

Para el primero se tiene:

$$\Delta = 3 \begin{vmatrix} 28 & 11 \\ 35 & 13 \end{vmatrix} - 12 \begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 35 & 13 \end{vmatrix} + 15 \begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 28 & 11 \end{vmatrix}$$
$$= 3(28.13 - 35.11) - 12(7.13 - 35.9) + 15(7.11 - 28.9) = 0$$

(1) Vemos que el procedimiento es análogo al empleado en Aritmética para reducir los denominadores de las fracciones á un común denominador.

(2) Es conveniente que los alumnos al efectuar estas aplicaciones, tanto como comprobación como por ejercicio, desarrollen los determinantes según elementos de líneas diversas de las que al principio hayan elegido.