Para resolver el segundo determinante aplicaremos el teorema del párrafo 321 y como el menor múltiplo común de los elementos de la primera columna, por ejemplo, tiene por valor 45, multiplicaremos la primera, segunda y tercera hilera por 9, 3, 5, respectivamente, que son los cocientes que resultan de dividir el menor múltiplo entre los elementos 5, 15 y 9 de la primera columna y poniendo en evidencia fuera del determinante dicho menor múltiplo, tendremos:

$$\Delta'=\begin{vmatrix} 5 & 7 & 2 \\ 15 & 23 & 7 \\ 9 & 14 & 3 \end{vmatrix}=\frac{1}{9.3.5}\begin{vmatrix} 45 & 63 & 18 \\ 45 & 69 & 21 \\ 45 & 70 & 15 \end{vmatrix}=\frac{45}{9.3.5}\begin{vmatrix} 1 & 63 & 18 \\ 1 & 69 & 21 \\ 1 & 70 & 15 \end{vmatrix}$$

restando ahora la primera hilera de las demás, resulta:

$$\Delta'=\tfrac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 63 & 18 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 7 & -3 \end{vmatrix}=\tfrac{1}{3}\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 7 & -3 \end{vmatrix}=\tfrac{1}{3}(-18\ -21)=-13$$

Para el tercero aplicaremos la regla de *Sanus* formando el cuadro:

$$\begin{matrix} 6 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \\ 6 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \end{matrix}$$

con lo que resultará:

$$\Delta''=6.5.4+7.9.8+2.1.3-2.5.8-6.9.3-7.1.4=360$$

II. Sean los determinantes de cuarto orden:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 27 & 5 & 2 & 4 \\ 21 & 3 & 4 & 24 \\ 30 & 40 & 25 & -180 \\ 12 & 3 & 7 & 24 \end{vmatrix},\quad \Delta'=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a & b \\ 1 & a & 0 & c \\ 1 & b & c & 0 \end{vmatrix}\quad \text{y}\quad \Delta''=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c^2 \\ 1 & b^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix}$$

Para el primero se tiene:

$$\begin{vmatrix} 27 & 5 & 2 & 4 \\ 21 & 3 & 4 & 24 \\ 30 & 40 & 25 & -180 \\ 12 & 3 & 7 & 24 \end{vmatrix}=3.4.5\begin{vmatrix} 9 & 5 & 2 & 1 \\ 7 & 3 & 4 & 6 \\ 2 & 8 & 5 & -9 \\ 4 & 3 & 7 & 6 \end{vmatrix}=60\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -6 & -5 & -2 & 6 \\ -2 & -2 & 14 & -9 \\ -12 & -11 & 1 & 6 \end{vmatrix}=60\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 1 & 4 & 12 \\ -2 & 0 & 16 & -7 \\ -12 & 1 & 13 & 18 \end{vmatrix}$$

$$=60\begin{vmatrix} 1 & 4 & 12 \\ 0 & 16 & -7 \\ 1 & 13 & 18 \end{vmatrix}=60\begin{vmatrix} 1 & 4 & 12 \\ 0 & 16 & -7 \\ 0 & 9 & 6 \end{vmatrix}=60\begin{vmatrix} 16 & -7 \\ 9 & 6 \end{vmatrix}=9540$$

sacando fuera de la matriz los factores 3, 4 y 5 comunes respectivamente á los elementos de la primera y cuarta columnas y de la tercera hilera, resulta la primera transformación.

Restando en el determinante obtenido de la primera columna la suma de las otras tres, de la segunda la tercera multiplicada por 2 y de la tercera la cuarta, resulta la segunda transformación.

Restando en el nuevo determinante que se origina la primera columna de las demás, resulta la tercera transformación de la que se pasa á la siguiente restando la primera hilera de la tercera; finalmente se obtiene el último determinante cuya resolución es inmediata.

Para el determinante Δ' se tiene restando sucesivamente la última hilera de cada una de las dos precedentes, y después restando en el determinante simplificado sucesivamente la primera columna de cada una de las dos siguientes:

$$\Delta'=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a & b \\ 1 & a & 0 & c \\ 1 & b & c & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -b & a-c & b \\ 0 & a-b & -c & c \\ 1 & b & c & 0 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -b & a-c & b \\ a-b & -c & c \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & a+b-c & 2b \\ a-b & b+c-a & c-a+b \end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} a+b-c & 2b \\ b-c-a & c-a+b \end{vmatrix}=-(a+b-c)(c-a+b)+2b(b-c-a)$$

$$=a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ac$$

Para el determinante Δ'' resultará aplicando el anterior resultado:

$$\Delta''=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 \\ 1 & a & 0 & c_2 \\ 1 & b^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix}=a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2a^2c^2=(a^2-b^2-c^2)^2-4b^2c^2$$

$$=(a+b+c)(a-b-c)(a+b-c)(c+a-b)$$

III. Sean los determinantes siguientes por desarrollar:

(1) El primero Δ, de la forma siguiente, tendrá por valor:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a+b\sqrt{-1} & -c+d\sqrt{-1} \\ c+d\sqrt{-1} & a-b\sqrt{-1} \end{vmatrix}=a^2+b^2+c^2+d^2$$

(2) El segundo Δ' por la regla de *Sanus* se resuelve fácilmente:

$$\Delta'=-\begin{vmatrix} 0 & a' & b' \\ a & 1 & \cos\varphi \\ b & \cos\varphi & 1 \end{vmatrix}=aa'+bb'-(ab'+a'b)\cos\varphi$$

(3) El tercero Δ'' por la misma regla produce:

$$\Delta''=\begin{vmatrix} -1 & \cos\gamma & \cos\beta \\ \cos\gamma & -1 & -\cos\alpha \\ -\cos\beta & \cos\alpha & -1 \end{vmatrix}=-1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma$$

(4) El cuarto Δ''' tiene por valor:

$$\Delta'''=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \operatorname{sen}\alpha & \operatorname{sen}\beta & \operatorname{sen}\gamma \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \end{vmatrix}=\operatorname{sen}(\beta-\gamma)+\operatorname{sen}(\gamma-\alpha)+\operatorname{sen}(\alpha-\beta)$$

Por otra parte, transformando el determinante convenientemente, resulta:

$$\Delta'''=\begin{vmatrix} \operatorname{sen}\beta-\operatorname{sen}\alpha & \operatorname{sen}\gamma-\operatorname{sen}\alpha \\ \cos\beta-\cos\alpha & \cos\gamma-\cos\alpha \end{vmatrix}$$

$$=(\operatorname{sen}\beta-\operatorname{sen}\alpha)(\cos\gamma-\cos\alpha)-(\operatorname{sen}\gamma-\operatorname{sen}\alpha)(\cos\beta-\cos\alpha)$$

$$=-4\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma)\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(\gamma-\alpha)\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

Comparando los dos valores de Δ''' resulta la expresión trigonométrica:

$$\operatorname{sen}(\beta-\gamma)+\operatorname{sen}(\gamma-\alpha)+\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=-4\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma)\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(\gamma-\alpha)\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

(5) Para el quinto determinante Δ^{IV} propuesto se tendrá:

$$\Delta^{\text{IV}}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & a & c \\ 0 & 1 & b & d \\ 1 & 0 & a' & c' \\ 0 & 1 & b' & d' \end{vmatrix}=(a-a')(d-d')-(b-b')(c-c')$$

(6) Para el sexto determinante Δ^{V}, se tendrá:

$$\Delta^{\text{V}}=\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & 0 & 0 \\ b & 0 & x & 0 \\ c & 0 & 0 & x \end{vmatrix}=\frac{1}{x}\begin{vmatrix} x^2 & ax & bx & cx \\ a & x & 0 & 0 \\ b & 0 & x & 0 \\ c & 0 & 0 & x \end{vmatrix}=\frac{x^3}{x}\begin{vmatrix} x^2 & a & b & c \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=x^2\begin{vmatrix} x^2-a^2-b^2-c^2 & a & b & c \\ a-a-0-0 & 1 & 0 & 0 \\ b-0-b-0 & 0 & 1 & 0 \\ c-0-0-c & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=x^2(x^2-a^2-b^2-c^2)$$

(7) Para el séptimo determinante Δ^{VI}, se tendrá:

$$\Delta^{\text{VI}}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a & d-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ a^3 & b^3-a^3 & c^3-a^3 & d^3-a^3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b-a & c-a & d-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ b^3-a^3 & c^3-a^3 & d^3-a^3 \end{vmatrix}$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+a & c+a & d+a \\ b^2+ab+a^2 & c^2+ac+a^2 & d^2+ad+a^2 \end{vmatrix}$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+a & c-b & d-b \\ b^2+ab+a^2 & c^2+ac-b^2-ab & d^2+ad-b^2-ab \end{vmatrix}$$

$$=(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$$

Este resultado es conveniente generalizarlo considerando el determinante:

$$\Delta^{\text{VII}}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots\ldots & 1 & 1 \\ a & b & c & \ldots\ldots & k & l \\ a^2 & b^2 & c^2 & \ldots\ldots & k^2 & l^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a^{n-1} & b^{n-1} & c^{n-1} & \ldots\ldots & k^{n-1} & l^{n-1} \end{vmatrix}$$

Si suponemos que dos *cualesquiera* de los elementos de la segunda hilera son iguales entre sí, el determinante constará de dos columnas idénticas y será nulo.

Ahora bien, como podemos elegir un elemento cualquiera de dicha hilera é irlo suponiendo igual á todos los que le siguen, llegando siempre á la misma conclusión, el determinante debe ser necesaria y separadamente divisible por cada una de las diferencias binomias obtenidas restando de un elemento cualquiera de la citada hilera todos los siguientes.

Si formamos el producto de todas estas diferencias, resultará un polinomio de la forma:

$$\begin{aligned} P=(a-b)(a-c)(a-d)&\ldots\ldots(a-k)(a-l) \\ \times(b-c)(b-d)&\ldots\ldots(b-k)(b-l) \\ \times(c-d)&\ldots\ldots(c-k)(c-l) \\ \times&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\times(h-k)(h-l) \\ &\times(k-l) \end{aligned}$$

El grado de Δ^{VII} es atendiendo á su término general:

$$1+2+3+\ldots\ldots+n-1=\frac{n(n-1)}{2}$$

y el de P es también el mismo evidentemente.

Como por lo expuesto P divide á Δ^{VII} y son además de igual grado, si alguna diferencia hay entre ellos consistirá en algún factor constante.

Para determinarlo no habrá sino comparar un término de Δ en que $a, b, c, \ldots\ldots, k, l$ están elevados á cierta potencia con otro de P en que entren $a, b, c, \ldots\ldots, k, l$ elevados á la misma potencia, el cociente que resulte de dividir estos términos uno entre otro será el factor buscado.

Consideremos, pues, el término principal de Δ^{VII} que es: $1.b.c^2.\ldots\ldots\ k^{n-2}.l^{n-1}$ cuyo coeficiente es 1, y para buscar el correspondiente en P no habrá sino atender á las columnas verticales que se ven en el producto que intencionalmente hemos escrito en la forma adecuada; por la simple inspección de dicho producto se ve que el término buscado es:

$$(-1)b(-1)^2c^2(-1)^3d^3\ldots\ldots(-1)^{n-2}k^{n-2}(-1)^{n-1}l^{n-1}$$

que tiene por coeficiente:

$$(-1)^{1+2+3+\ldots+n-2+n-1}=(-1)^{\frac{(n-1)n}{2}}$$

Dividiendo según lo explicado, Δ^{VII} entre P, se tendrá:

$$\frac{\Delta^{\text{VII}}}{P}=\frac{1}{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}=\pm1 \text{ ó } \Delta=\pm P$$

según que $\frac{n(n-1)}{2}$ sea *par* ó *impar*.

IV. Demostrar las dos identidades:

$$\begin{vmatrix} 1 & x-a & y-b \\ 1 & x'-a & y'-b \\ 1 & x''-a & y''-b \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x' & y' \\ 1 & x'' & y'' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-16$$

V. Demostrar las dos identidades:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & b & c \\ 1 & a' & b' & c' \\ 1 & a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a+\mu+\nu & b+\mu+\nu' & c+\mu+\nu'' \\ 1 & a'+\mu'+\nu & b'+\mu'+\nu' & c'+\mu'+\nu'' \\ 1 & a''+\mu''+\nu & b''+\mu''+\nu'' & c''+\mu''+\nu'' \end{vmatrix}$$

$$\text{y,} \quad \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & c & a \\ a+b+c & a & b \end{vmatrix} = 3abc - a^3 - b^3 - c^3$$

VI. Calcular los determinantes:

$$\varDelta = \begin{vmatrix} 3 & 13 & 17 & 4 \\ 6 & 28 & 33 & 8 \\ 10 & 40 & 54 & 13 \\ 8 & 37 & 46 & 11 \end{vmatrix} = -5, \quad \varDelta' = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -10, \quad \varDelta'' = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 70,$$

$$\varDelta''' = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 2 & 7 \\ 6 & -3 & 7 \end{vmatrix} = 0, \quad \varDelta^{\mathrm{IV}} = \begin{vmatrix} x & a & b \\ c & x & d \\ e & f & x \end{vmatrix} = x^3 - x(ac+be+df) + ade + bcf$$

VII. (1) Averiguar qué relación debe existir para que sea nulo el determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\theta & \cos\alpha \\ \cos\theta & 1 & \cos\beta \\ \cos\alpha & \cos\beta & 1 \end{vmatrix}$$

Igualando á cero se tiene:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\theta & \cos\alpha \\ \cos\theta & 1 & \cos\beta \\ \cos\alpha & \cos\beta & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el valor del determinante resulta la ecuación condicional:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\theta = \operatorname{sen}^2\theta$$

que es la conocida relación de Geometría Analítica entre los cosenos $\cos\alpha$, $\cos\beta$ de una recta con dos ejes oblicuos que hacen un ángulo θ.

Si los ejes son rectangulares, resultará de la anterior expresión: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$, relación que se origina también del determinante que se transforma en:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cos\alpha \\ 0 & 1 & \cos\beta \\ \cos\alpha & \cos\beta & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \cos\beta \\ \cos\beta & 1 \end{vmatrix} - \cos^2\alpha = 1 - \cos^2\beta - \cos^2\alpha = 0$$

*(2) Averiguar qué expresión debe subsistir para que sea nulo el determinante $\varDelta$; de la forma siguiente:

$$\varDelta = \begin{vmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0$$

Resolviéndolo por los elementos de la primera hilera, resulta:

$$A \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} - B \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} + C \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$$

cambiando el segundo en:

$$+B \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}$$

y luego cada uno de los determinantes de segundo orden respectivamente en l, m, n, resulta:

$$lA + mB + nC = 0$$

ecuación que sirve para demostrar *que toda recta en coordenadas tangenciales está representada por una ecuación de primer grado y homogénea.*

*(3) Encontrar la área de un triángulo cuyos vértices están expresados en coordenadas *tangenciales* por las tres expresiones:

$$a_1u + b_1v + c_1 = 0, \quad a_2u + b_2v + c_2 = 0, \quad a_3u + b_3v + c_3 = 0$$

Se sabe que la superficie de un triángulo cuyos vértices tengan por coordenadas cartesianas: (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) es:

$$S = \tfrac{1}{2}\left[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right]$$

es decir:

$$S = \tfrac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Se tendrá, pues, para el triángulo dado, reemplazando $y_1, x_1, \ldots\ldots$ por: $\frac{b_1}{c_1}, \frac{a_1}{c_1}, \ldots\ldots$ la expresión:

$$S = \frac{1}{2c_1c_2c_3} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

(4) Tomando cuatro puntos M_1, M_2, M_3, M_4 en un círculo y designando por d_{12}, d_{13}, d_{14}, d_{23}, d_{24}, d_{34} sus distancias mutuas, demostrar que satisfacen la relación:

$$\begin{vmatrix} 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{21} & 0 & d_{23} & d_{24} \\ d_{31} & d_{32} & 0 & d_{34} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{es decir en general que: } d_{rs} = d_{sr}$$

(5) Considerando tres ejes coordenados rectangulares: Ox, Oy, Oz, una recta l cuyas proyecciones sobre cada eje respectivamente son l_x, l_y, l_z y un punto de esta recta cuyas coordenadas sean: x, y, z demostrar que los momentos de la recta con respecto á cada uno de los ejes: $M_x l$, $M_y l$, $M_z l$ están expresados por los determinantes:

$$M_x l = \begin{vmatrix} l_z & l_y \\ z & y \end{vmatrix}, \quad M_y l = \begin{vmatrix} l_x & l_z \\ x & z \end{vmatrix}, \quad M_z l = \begin{vmatrix} l_y & l_x \\ y & x \end{vmatrix}$$

Demostrar en seguida que el momento $M_0 l$ de dicha recta respecto al origen y llamando Δ, Δ' y Δ'' los valores de los anteriores determinantes, tiene por expresión:

$$M_0 l = \sqrt{\Delta^2 + \Delta'^2 + \Delta''^2}$$

Por último, demostrar que la dirección de este momento, llamando λ, μ y ν los ángulos que forma con los tres ejes, está formulada por los determinantes:

$$\begin{vmatrix} M_0 l & M_x l \\ 1 & \cos\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} M_0 l & M_y l \\ 1 & \cos\mu \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} M_0 l & M_z l \\ 1 & \cos\nu \end{vmatrix} = 0$$

VIII. Demostrar las identidades:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+z \end{vmatrix} = xyz$$

$$\begin{vmatrix} t & x & y & z \\ x & t & z & y \\ y & z & t & x \\ z & y & x & t \end{vmatrix} = (t+x+y+z)(t+z-x-y)(z-y+x-t)(x+t-z-y), \quad \begin{vmatrix} a-d & a & 1 \\ b-d & b & 1 \\ c-d & c & 1 \end{vmatrix} = 0$$

IX. **Fórmula de Salmon.** Vamos á demostrar la fórmula:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & x_2 & x_3 & \ldots\ldots \\ x_1 & b & x_3 & \ldots\ldots \\ x_1 & x_2 & c & \ldots\ldots \\ . & . & . & \ldots\ldots \\ . & . & . & \ldots\ldots \\ . & . & . & \ldots\ldots \\ . & . & . & \ldots\ldots \end{vmatrix} = X\left(1 + \frac{x_1}{a - x_1} + \frac{x_2}{b - x_2} + \ldots\ldots\right)$$

siendo

$$X = (a - x_1)(b - x_2)(c - x_3)\ldots\ldots$$

Dividiendo las columnas del determinante Δ por: x_1, x_2, x_3, ... respectivamente, resulta:

$$\Delta = x_1 x_2 x_3 \ldots\ldots \begin{vmatrix} \frac{a}{x_1} & 1 & 1 & \ldots\ldots \\ 1 & \frac{b}{x_2} & 1 & \ldots\ldots \\ 1 & 1 & \frac{c}{x_3} & \ldots\ldots \\ . & . & . & \ldots\ldots \\ . & . & . & \ldots\ldots \\ . & . & . & \ldots\ldots \\ . & . & . & \ldots\ldots \end{vmatrix}$$

Poniendo:

$$\frac{a}{x_1} = 1 + \alpha, \quad \frac{b}{x_2} = 1 + \beta, \quad \frac{c}{x_3} = 1 + \gamma, \ldots\ldots$$

Se tendrá:

$$\begin{vmatrix} \frac{a}{x_1} & 1 & 1 & 1 & \ldots\ldots \\ 1 & \frac{b}{x_2} & 1 & 1 & \ldots\ldots \\ 1 & 1 & \frac{c}{x_3} & 1 & \ldots\ldots \\ . & . & . & . & \ldots\ldots \\ . & . & . & . & \ldots\ldots \\ . & . & . & . & \ldots\ldots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+\alpha & 1 & 1 & \ldots\ldots \\ 1 & 1+\beta & 1 & \ldots\ldots \\ 1 & 1 & 1+\gamma & \ldots\ldots \\ . & . & . & \ldots\ldots \\ . & . & . & \ldots\ldots \\ . & . & . & \ldots\ldots \end{vmatrix} = \alpha\beta\gamma\ldots\ldots\left(1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \ldots\ldots\right)$$

Para hallar este resultado tomaremos el siguiente caso particular:

$$\begin{vmatrix} 1+\alpha & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\beta & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+\gamma & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+\delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \beta & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \gamma & 1 \\ -\delta & -\delta & -\delta & 1+\delta \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} \beta & 0 & 1 \\ 0 & \gamma & 1 \\ -\delta & -\delta & 1+\delta \end{vmatrix} + \delta \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \beta & 0 & 1 \\ 0 & \gamma & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \alpha \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\beta & \gamma & 1 \\ -\delta-\beta-\beta\delta & -\delta & 1+\delta \end{vmatrix} + \delta\beta\gamma = \alpha \begin{vmatrix} -\beta & \gamma \\ -\delta-\beta-\beta\delta & -\delta \end{vmatrix} + \delta\beta\gamma$$

$$= \alpha\beta\delta + \alpha\delta\gamma + \alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta\gamma + \delta\beta\gamma = \alpha\beta\gamma\delta\left(1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta}\right)$$

Para establecer á priori esta fórmula, hagamos las siguientes consideraciones:

Si se tuviera $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$, resultaría $\Delta = 0$
" " " $\alpha = 0$, " $\Delta = \beta\gamma\delta$
" " " $\beta = 0$, " $\Delta = \alpha\gamma\delta$ [1]
" " " $\gamma = 0$, " $\Delta = \alpha\beta\delta$
" " " $\delta = 0$, " $\Delta = \alpha\beta\gamma$

Así pues, Δ es de la forma:

$$\Delta = \alpha\beta\gamma\delta + \alpha\beta\gamma + \alpha\gamma\delta + \alpha\beta\delta + \beta\gamma\delta = \alpha\beta\gamma\delta\left(1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta}\right)$$

Esta relación es general, pues considerando el determinante de n^2 elementos:

$$D = \begin{vmatrix} 1+\alpha & 1 & 1 & 1\ldots\ldots & 1 \\ 1 & 1+\beta & 1 & 1\ldots\ldots & 1 \\ 1 & 1 & 1+\gamma & 1\ldots\ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & 1\ldots\ldots & 1+\omega \end{vmatrix}$$

(1) El segundo resultado $\alpha\gamma\delta$ se obtiene *inmediatamente* con sólo cambiar las dos primeras columnas y las dos primeras hileras, pues se tiene:

$$\begin{vmatrix} 1+\alpha & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+\gamma & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+\delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+\gamma & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+\delta \end{vmatrix} = \alpha\gamma\delta$$

Por consideraciones análogas resultan los demás.