Resultará por un corto raciocinio:

$$D=\alpha\beta\ldots\ldots\omega\left(1+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\cdots\cdots+\frac{1}{\omega}\right)$$

que es la expresión por encontrar.

De consiguiente el valor del determinante propuesto será:

$$\varDelta=x_1x_2x_3\ldots\ldots\times\alpha\beta\gamma\ldots\ldots\left(1+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\cdots\cdots\right)$$

Pero como:

$$\alpha=\frac{a-x_1}{x_1},\quad \beta=\frac{b-x_2}{x_2},\quad \gamma=\frac{c-x_3}{x_3},\ldots\ldots$$

resulta:

$$\varDelta=(a-x_1)(b-x_2)(c-x_3)\ldots\ldots\left(1+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\cdots\cdots\right)$$

ó llamando X como antes dijimos el coeficiente del paréntesis:

$$\varDelta=\mathrm{X}\left(1+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\cdots\cdots\right) \tag{543}$$

323. El teorema VIII nos conduce á establecer la regla siguiente para sumar ó restar determinantes: *La suma ó diferencia de dos determinantes del mismo orden que sólo difieren por los elementos de una línea, es otro determinante del mismo orden que se obtiene sumando ó restando dos á dos los elementos correspondientes de las líneas diferentes.*

Sean:

$$\varDelta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ y } \varDelta'=\begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

el primero tiene por expresión:

$$\varDelta=\mathrm{A}_1a_1+\mathrm{A}_2a_2+\mathrm{A}_3a_3$$

y el segundo:

$$\varDelta'=\mathrm{A}_1\alpha_1+\mathrm{A}_2\alpha_2+\mathrm{A}_3\alpha_3$$

de consiguiente:

$$\varDelta\pm\varDelta'=\mathrm{A}_1(a_1\pm\alpha_1)+\mathrm{A}_2(a_2\pm\alpha_2)+\mathrm{A}_3(a_3\pm\alpha_3)$$

lo que equivale á:

$$\varDelta\pm\varDelta'=\begin{vmatrix} a_1\pm\alpha_1 & b_1 & c_1 \\ a_2\pm\alpha_2 & b_2 & c_2 \\ a_3\pm\alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Si se tienen, por ejemplo, los dos determinantes:

$$\varDelta=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & 7 & 4 \\ 9 & 2 & 3 \end{vmatrix} \text{ y } \varDelta'=\begin{vmatrix} 5 & 7 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 9 & 2 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 5 & 7 & 4 \\ 9 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

resultará:

$$\varDelta+\varDelta'=\begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 5 & 7 & 4 \\ 9 & 2 & 3 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 5 & 7 & 4 \\ 9 & 2 & 3 \end{vmatrix}=-16,\quad \varDelta-\varDelta'=2\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 5 & 7 & 4 \\ 9 & 2 & 3 \end{vmatrix}=-106$$

Si se tienen varias líneas complejas, se opera así:

$$\varDelta=\begin{vmatrix} a_1+a'_1+a''_1 & b_1+b'_1 & c_1 \\ a_2+a'_2+a''_2 & b_2+b'_2 & c_2 \\ a_3+a'_3+a''_3 & b_3+b'_3 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1+b'_1 & c_1 \\ a_2 & b_2+b'_2 & c_2 \\ a_3 & b_3+b'_3 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a'_1 & b_1+b'_1 & c_1 \\ a'_2 & b_2+b'_2 & c_2 \\ a'_3 & b_3+b'_3 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a''_1 & b_1+b'_1 & c_1 \\ a''_2 & b_2+b'_2 & c_2 \\ a''_3 & b_3+b'_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & b'_1 & c_1 \\ a_2 & b'_2 & c_2 \\ a_3 & b'_3 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a'_1 & b_1 & c_1 \\ a'_2 & b_2 & c_2 \\ a'_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a'_1 & b'_1 & c_1 \\ a'_2 & b'_2 & c_2 \\ a'_3 & b'_3 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a''_1 & b_1 & c_1 \\ a''_2 & b_2 & c_2 \\ a''_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a''_1 & b'_1 & c_1 \\ a''_2 & b'_2 & c_2 \\ a''_3 & b'_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

MULTIPLICACIÓN DE LOS DETERMINANTES.

*324. **Teorema de Binet y Cauchy.** Las proposiciones subsecuentes constituyen en su conjunto un teorema general llamado comunmente de *Binet* y *Cauchy* que permite efectuar la multiplicación de los determinantes.

Los dos sabios antes mencionados lo han concluído á la vez partiendo de casos particulares examinados por *Lagrange* y *Gauss* (1).

Sean las dos matrices rectangulares semejantes:

$$\mathrm{M}=\left\Vert\begin{matrix} a_1^1 & a_1^2\ldots\ldots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2\ldots\ldots & a_2^n \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_i^1 & a_i^2\ldots\ldots & a_i^n \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_m^1 & a_m^2\ldots\ldots & a_m^n \end{matrix}\right\Vert,\quad \mathrm{M}'=\left\Vert\begin{matrix} b_1^1 & b_1^2\ldots\ldots & b_1^n \\ b_2^1 & b_2^2\ldots\ldots & b_2^n \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ b_k^1 & b_k^2\ldots\ldots & b_k^n \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ b_m^1 & b_m^2\ldots\ldots & b_m^n \end{matrix}\right\Vert$$

Multipliquemos respectivamente los elementos de una hilera cualquiera de M designada por i por los elementos correspondientes de una hilera cualquiera de M′ designada por k agregando los productos obtenidos para obtener una expresión de la forma:

$$a_i^1b_k^1+a_i^2b_k^2+a_i^3b_k^3+\ldots\ldots+a_i^nb_k^n$$

que representaremos por c_i^k expresando el índice inferior el rango de la hilera considerada de M y el superior el rango de la hilera considerada de M′.

Podemos, pues, formar el determinante de las m^2 cantidades análogas á c_i^k que será:

$$\mathrm{N}=\begin{vmatrix} c_1^1 & c_1^2 & c_1^3\ldots\ldots & c_1^m \\ c_2^1 & c_2^2 & c_2^3\ldots\ldots & c_2^m \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ c_m^1 & c_m^2 & c_m^3\ldots\ldots & c_m^m \end{vmatrix}$$

cuyo término principal es:

$$\mathrm{T}=c_1^1\,c_2^2\,c_3^3\ldots\ldots c_m^m$$

Pueden suceder tres casos: $m=n$, $m>n$, $m<n$.

Primer caso: $m=n$. En este caso las matrices pasan de rectangulares á cuadradas; el término principal T y c_i^k tendrán las formas:

$$\mathrm{T}=c_1^1\,c_2^2\,c_3^3\ldots\ldots c_n^n,\quad c_i^k=a_i^1b_k^1+a_i^2b_k^2+\ldots\ldots+a_i^nb_k^n$$

(1) "*Journal de l'École Polytechnique,*" cuadernos XVI y XVII.

Ahora bien, según lo anterior se tiene en tesis general:

$$c_i^k = \Sigma a_i^{\varepsilon} b_k^{\varepsilon}$$

haciendo variar el índice superior ε simultáneamente para a_i y b_k desde 1 hasta n, de consiguiente puede escribirse:

$$\begin{aligned} c_1^1\, c_2^2\, c_3^3 \ldots\ldots c_n^n &= (\Sigma a_1^{\alpha}\, b_1^{\alpha})(a_2^{\beta}\, b_2^{\beta}) \ldots\ldots (\Sigma a_n^{\lambda}\, b_n^{\lambda}) \\ &= \Sigma(a_1^{\alpha}\, a_2^{\beta}\, a_3^{\gamma} \ldots\ldots a_n^{\lambda}\, b_1^{\alpha}\, b_2^{\beta}\, b_3^{\gamma} \ldots\ldots b_n^{\lambda} \end{aligned} \qquad (544)$$

debiendo variar los números $\alpha, \beta, \gamma, \ldots\ldots, \lambda$ simultáneamente para a_1 y b_1, a_2 y $b_2, \ldots\ldots$, a_n y b_n de 1 á n.

Para formar, pues, el determinante N correspondiente á este caso y que tiene por forma:

$$N = \begin{vmatrix} c_1^1 & c_1^2 & c_1^3 \ldots\ldots & c_1^n \\ c_2^1 & c_2^2 & c_2^3 \ldots\ldots & c_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_n^1 & c_n^2 & c_n^3 \ldots\ldots & c_n^n \end{vmatrix}$$

por medio de su término principal; es preciso añadir á este término los que se obtienen dejando invariables los índices *inferiores*, por ejemplo, de las letras c y permutando los superiores, lo que equivale á dejar invariables las líneas consideradas en M y permutar las consideradas en M′.

En este supuesto, los dos índices de las letras a del segundo miembro de (544) quedan invariables mientras que deben permutarse los *inferiores* de las letras b, así como se permutan los *superiores* de las letras c en el primer miembro de (544).

Resulta entonces que el producto de las letras b representa un cierto determinante N′ que tendrá por expresión:

$$N' = \pm \Sigma b_1^{\alpha}\, b_2^{\beta}\, b_3^{\gamma} \ldots\ldots b_n^{\lambda}$$

y de consiguiente se tendrá:

$$N = \pm \Sigma a_1^{\alpha}\, a_2^{\beta}\, a_3^{\gamma} \ldots\ldots a_n^{\lambda}\, (N') \qquad (545)$$

En N′ los índices superiores deben recibir de una manera cualquiera uno de los valores: 1.2.3, ..., n; habrá, pues, tantos valores para N′ como disposiciones posibles presenten estos valores, pero todas las disposiciones que identifiquen dos índices superiores de las letras b harán que haya en N′ dos columnas idénticas; por consiguiente nulificarán á N′ y según (545) también á N.

Sólo habrá, pues, que dar á los números: $\alpha, \beta, \gamma, \ldots\ldots, \lambda$ valores *diferentes* escogidos en la serie: 1, 2, 3, ... n y por la permutación de los índices inferiores de las letras b, estos valores diferentes se encontrarán en realidad escogidos de todas las maneras posibles *compatibles con la no nulidad de* N′.

Justamente el determinante N′ así obtenido no es otro sino el M′ y además puesto que: $\alpha, \beta, \gamma, \ldots\ldots, \lambda$ deben recibir los mismos valores para a_1 y b_1, a_2 y b_2, ..., a_n y b_n respectivamente, resulta:

$$M = \pm \Sigma a_1^{\alpha}\, a_2^{\beta}\, a_3^{\gamma} \ldots\ldots a_n^{\lambda}$$

Finalmente, la ecuación (545) se cambiará en:

$$N = M'(\pm \Sigma_1^{\alpha}\, a_2^{\beta}\, a_3^{\gamma} \ldots\ldots a_n^{\lambda}) = M'M$$

expresión que demuestra: *que el producto de dos determinantes de orden* n *es otro del mismo grado que se forma tomando por elementos las sumas de los productos de los términos que se corresponden verticalmente en cada hilera del primer determinante comparada con cada hilera del segundo.*

Segundo caso: $m > n$. En este caso el término principal de N es:

$$c_1^1\, c_2^2\, c_3^3 \ldots\ldots c_m^m = \Sigma(a_1^{\alpha}\, a_2^{\beta}\, a_3^{\gamma} \ldots\ldots a_m^{\mu}\, b_1^{\alpha}\, b_2^{\beta}\, b_3^{\gamma} \ldots\ldots b_m^{\mu})$$

y repitiendo el anterior raciocinio, vemos que debiendo variar de 1 á n los m índices superiores: $\alpha, \beta, \gamma, \ldots\ldots, \mu$ *siempre habrá cuando menos dos* que reciban valores iguales y por consiguiente resultará:

$$N = 0$$

Tercer caso: $m < n$. En este caso los m índices superiores: $\alpha, \beta, \gamma, \ldots\ldots \mu$ podrán recibir *siempre* valores desiguales elegidos en la serie: 1, 2, 3, ..., n tantas veces cuantas combinaciones pueden formarse con n objetos m á m, es decir (párrafo 49):

$$\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-m+1)}{1.2.3\ldots\ldots m}$$

Para cada sistema de valores atribuídos así á los índices: $\alpha, \beta, \gamma, \ldots\ldots, \mu$ habrá que considerar m columnas de la matriz M y m columnas correspondientes de la matriz M′ que formarán dos determinantes M″, M‴, se tendrá pues:

$$N = \Sigma(M''M''')$$

en cuya expresión el segundo miembro será la suma de los productos M″M‴ que corresponden á los sistemas de valores que pueden atribuirse á los índices: $\alpha, \beta, \gamma, \ldots\ldots, \mu$.

Corolario. Si las matrices M y M′ fuesen idénticas, se tendría:

$$c_i^k = a_i^1\, a_k^1 + a_i^2\, a_k^2 + \ldots\ldots + a_i^n\, a_k^n = c_k^i$$

el determinante N sería *simétrico* y como se tiene $M = M'$, para $m > n$, $m < n$ ó $m = n$, resultaría:

$$N = \Sigma M^2$$

en donde M debe ser reemplazado sucesivamente por los determinantes obtenidos combinando m á m las n verticales de la matriz expresada con la letra a.

Vemos, pues: *que el cuadrado de un determinante es otro del mismo grado* y lo mismo sucederá con todas las potencias enteras de un determinante.

*325. **Fórmula ó identidad de Legendre.** Consideremos dos matrices regulares iguales:

$$\left\| \begin{matrix} a & b & c \ldots\ldots & l \\ \alpha & \beta & \gamma \ldots\ldots & \lambda \end{matrix} \right\|, \quad \left\| \begin{matrix} a & b & c \ldots\ldots & l \\ \alpha & \beta & \gamma \ldots\ldots & \lambda \end{matrix} \right\|$$

á las que vamos á aplicar el teorema de Binet y Cauchy.

Tenemos $m = 2$ siendo $m < n$, y para formar el determinante N observaremos que se tiene:

$$\begin{aligned} c_1^1 &= a_i^1\, b_k^1 + a_i^2\, b_k^2 + \ldots\ldots + a_i^n\, b_k^n = a_1^1\, b_1^1 + a_1^2\, b_1^2 + \ldots\ldots + a_1^n\, b_1^n \\ c_1^2 &= a_1^1\, b_2^1 + a_1^2\, b_2^2 + \ldots\ldots + a_1^n\, b_2^n \\ c_2^1 &= a_2^1\, b_1^1 + a_2^2\, b_1^2 + \ldots\ldots + a_2^n\, b_1^n \\ c_2^2 &= a_2^1\, b_2^1 + a_2^2\, b_2^2 + \ldots\ldots + a_2^n\, b_2^n \end{aligned}$$

De consiguiente:

$$N=\begin{vmatrix} a^2+b^2+c^2+\ldots\ldots+l^2 & a\alpha+b\beta+\ldots\ldots+l\lambda \\ a\alpha+b\beta+c\gamma+\ldots\ldots+l\lambda & \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\ldots\ldots+\lambda^2 \end{vmatrix}$$

pero este valor de N debe ser igual á la suma de tantos productos de determinantes de segundo orden como combinaciones puede haber tomando n columnas dos á dos, es decir: $\frac{n(n-1)}{1.2}$. Tendremos de consiguiente:

$$\begin{vmatrix} a^2+b^2+c^2+\ldots\ldots+l^2 & a\alpha+b\beta+\ldots\ldots+l\lambda \\ a\alpha+b\beta+c\gamma+\ldots\ldots+l\lambda & \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\ldots\ldots+\lambda^2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix}.\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & c \\ \alpha & \gamma \end{vmatrix}.\begin{vmatrix} a & c \\ \alpha & \gamma \end{vmatrix}+\ldots\ldots$$
$$=\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} a & c \\ \alpha & \gamma \end{vmatrix}^2+\ldots\ldots$$

es decir:

$$(a^2+b^2+c^2+\ldots\ldots+l^2)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\ldots\ldots+\lambda^2)-(a\alpha+b\beta+c\gamma+\ldots\ldots+l\lambda)^2$$
$$=(a\beta-\alpha b)^2+(a\gamma-\alpha c)^2+\ldots\ldots$$

que es la fórmula buscada que manifiesta *que el producto de dos sumas de* n *cuadrados menos el cuadrado de la suma de* n *cantidades es la suma de* n *cuadrados.*

* 326. Como el valor de un determinante no se altera cuando se cambian en él las horizontales en verticales y vice versa, el producto de dos determinantes podrá efectuarse de cuatro modos distintos multiplicando:

1º Horizontales por horizontales.
2º Horizontales por verticales.
3º Verticales por horizontales.
4º Verticales por verticales.

Como se comprende, el segundo y el tercer modo pueden reducirse en esencia á uno solo. Se tiene, por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}.\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a\alpha+b\beta & a\alpha'+b\beta' \\ a'\alpha+b'\beta & a'\alpha'+b'\beta' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a\alpha+b\alpha' & a\beta+b\beta' \\ a'\alpha+b'\alpha' & a'\beta+b'\beta' \end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix} a\alpha+a'\beta & a\alpha'+a'\beta' \\ b\alpha+b'\beta & b\alpha'+b'\beta' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a\alpha+a'\alpha' & a\beta+a'\beta' \\ b\alpha+b'\alpha' & b\beta+b'\beta' \end{vmatrix}$$

Si los factores no fuesen del mismo orden se elevaría el del menor al orden del mayor como á continuación se expresa.

Sean, por ejemplo, los dos determinantes:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ y } \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}$$

se tendrá sin que haya alteración:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & 0 \\ \alpha_3 & \beta_3 & 1 \end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix} a_1\alpha_1+b_1\beta_1 & a_1\alpha_2+b_1\beta_2 & a_1\alpha_3+b_1\beta_3+c_1 \\ a_2\alpha_1+b_2\beta_1 & a_2\alpha_2+b_2\beta_2 & a_2\alpha_3+b_2\beta_3+c_2 \\ a_3\alpha_1+b_3\beta_1 & a_3\alpha_2+b_3\beta_2 & a_3\alpha_3+b_3\beta_3+c_3 \end{vmatrix}$$

Si en fin se tratase de elevar al cuadrado el determinante:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

se tendría efectuando la operación de las diversas maneras explicadas y cuidando de no confundir los índices con los exponentes que origina la operación:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1^2+b_1^2 & a_1a_2+b_1b_2 \\ a_2a_1+b_2b_1 & a_2^2+b_2^2 \end{vmatrix}$$
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1^2+b_1a_2 & a_1b_1+b_1b_2 \\ a_2a_1+b_2a_2 & a_2b_1+b_2^2 \end{vmatrix}$$
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1^2+a_2b_1 & a_1a_2+a_2b_2 \\ b_1a_1+b_2b_1 & b_1a_2+b_2^2 \end{vmatrix}$$
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1^2+a_2^2 & a_1b_1+a_2b_2 \\ b_1a_1+b_2a_2 & b_1^2+b_2^2 \end{vmatrix}$$

Vemos que la primera y cuarta forma dan el cuadrado en forma de un determinante *simétrico;* esta propiedad es general.

* 327. **División de determinantes.** Sean

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

el dividendo, el divisor y el cociente.

Se tiene:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}.\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \alpha_1x_1+\beta_1y_1 & \alpha_1x_2+\beta_1y_2 \\ \alpha_2x_1+\beta_2y_1 & \alpha_2x_2+\beta_2y_2 \end{vmatrix}$$

Identificando los elementos de este producto con los del dividendo, resulta:

$$\alpha_1x_1+\beta_1y_1=a_1, \quad \alpha_1x_2+\beta_1y_2=b_1$$
$$\alpha_2x_1+\beta_2y_1=a_2, \quad \alpha_2x_2+\beta_2y_2=b_2$$

ecuaciones de primer grado con las cuatro incógnitas: x_1, y_1, x_2, y_2 y que resueltas darán los elementos del cociente.

APLICACIONES.

* 328. I. Sean las dos matrices rectangulares:

$$\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{Vmatrix} \text{ y } \begin{Vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{Vmatrix}$$

en las que como se tiene $m=3$ y $n=2$, es decir, $m>n$, el determinante N (párrafo 324) cuyo valor es en este caso:

$$N=\begin{vmatrix} a_1\alpha_1+b_1\beta_1 & a_1\alpha_2+b_1\beta_2 & a_1\alpha_3+b_1\beta_3 \\ a_2\alpha_1+b_2\beta_1 & a_2\alpha_2+b_2\beta_2 & a_2\alpha_3+b_2\beta_3 \\ a_3\alpha_1+b_3\beta_1 & a_3\alpha_2+b_3\beta_2 & a_3\alpha_3+b_3\beta_3 \end{vmatrix}$$

debe ser nulo.

En efecto, N puede descomponerse en ocho determinantes sencillos. Dos son de la forma:

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1 & a_1\alpha_2 & a_1\alpha_3 \\ a_2\alpha_1 & a_2\alpha_2 & a_2\alpha_3 \\ a_3\alpha_1 & a_3\alpha_2 & a_3\alpha_3 \end{vmatrix} = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 & a_2 \\ a_3 & a_3 & a_3 \end{vmatrix} = 0$$

Tres de la forma:

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1 & a_1\alpha_2 & b_1\beta_3 \\ a_2\alpha_1 & a_2\alpha_2 & b_2\beta_3 \\ a_3\alpha_1 & a_3\alpha_3 & b_3\beta_3 \end{vmatrix} = \alpha_1\alpha_2\beta_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 & a_2 \\ a_3 & a_3 & a_3 \end{vmatrix} = 0$$

En fin, tres de la forma:

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1 & b_1\beta_2 & b_1\beta_3 \\ a_2\alpha_1 & b_2\beta_2 & b_2\beta_3 \\ a_3\alpha_1 & b_2\beta_3 & b_3\beta_2 \end{vmatrix} = \alpha_1\beta_2\beta_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 & a_2 \\ a_3 & a_3 & a_3 \end{vmatrix} = 0$$

II. Sean las dos matrices rectangulares:

$$\left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{matrix} \right\| \text{ y } \left\| \begin{matrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{matrix} \right\|$$

Se tiene $m=2$, $n=3$ y el determinante N tendrá por expresión:

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1+b_1\beta_1+c_1\gamma_1 & a_1\alpha_2+b_1\beta_2+c_1\gamma_2 \\ a_2\alpha_1+b_2\beta_1+c_2\gamma_1 & a_2\alpha_2+b_2\beta_2+c_2\gamma_2 \end{vmatrix} \qquad (546)$$

Además, N debe ser igual (párrafo 324) á tantos productos de determinantes de segundo orden como combinaciones pueden hacerse con tres columnas tomadas dos á dos, es decir, tres combinaciones:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} \qquad (547)$$

luego se tendrá igualando (546) y (547) y desarrollando:

$$(a_1\alpha_1+b_1\beta_1+c_1\gamma_1)(a_2\alpha_2+b_2\beta_2+c_2\gamma_2)-(a_1\alpha_2+b_1\beta_2+c_1\gamma_2)^2=$$
$$=(a_1b_2-a_2b_1)(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)+(a_1c_2-a_2c_1)(\alpha_1\gamma_2-\alpha_2\gamma_1)+(b_1c_2-b_2c_1)(\beta_1\gamma_2-\gamma_1\beta_2)$$

Suponiendo:

$$a_1=\alpha_1=a,\quad b_1=\beta_1=b,\quad c_1=\gamma_1=c,\quad a_2=\alpha_2=\alpha,\quad b_2=\beta_2=\beta,\quad c_2=\gamma_2=\gamma$$

se tendrá:

$$(a^2+b^2+c^2)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-(a\alpha+b\beta+c\gamma)=(a\beta-\alpha b)^2+(a\gamma-\alpha c)^2+(b\gamma-\beta c)^2$$

que es la identidad de Legendre en el caso particular considerado.

III. Efectuar los productos indicados á continuación:

$$(1)\ \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Ax+By+C & A'x+B'y+C' & A''x+B''y+C'' \\ Ax'+By'+C & A'x'+B'y'+C' & A''x'+B''y'+C'' \\ Ax''+By''+C & A'x''+B'y''+C' & A''x''+B''y''+C'' \end{vmatrix}$$

$$(2)\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & \alpha \\ 0 & 1 & b & \beta \\ 0 & 1 & c & \gamma \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a & \alpha \\ 1 & 0 & b & \beta \\ 1 & 0 & c & \gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2+\alpha^2 & ab+\alpha\beta & ac+\alpha\gamma \\ 1 & ab+\alpha\beta & b^2+\beta^2 & bc+\beta\gamma \\ 1 & ac+\alpha\gamma & bc+\beta\gamma & c^2+\gamma^2 \end{vmatrix}$$

IV. Efectuar como ejercicio el cociente:

$$\begin{vmatrix} 100 & -2 \\ 218 & 3 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -3 & 7 \end{vmatrix}$$

las ecuaciones del (párrafo 327) serán en este caso:

$$x_1=-19,\quad y_1=23,\quad x_2=-1,\quad y_2=0$$

luego se tendrá:

$$\begin{vmatrix} 100 & -2 \\ 218 & 3 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -19 & 23 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 23$$

como era de esperarse.

*329. Los teoremas particulares relativos á los determinantes *recíprocos*, *simétricos*, *hemisimétricos* y *pseudosimétricos* y cuestiones especiales anexas las omitimos como propias de tratarse sólo en un curso *especial* de determinantes.

RESOLUCIÓN GENERAL DE LAS ECUACIONES DE PRIMER GRADO.

330. El empleo de los determinantes simplifica en extremo la resolución de las ecuaciones de primer grado; ante todo expondremos las llamadas *reglas de Cramer*, después el *método de Bezout de los factores indeterminados* y finalmente el *teorema general de E. Rouché* que zanja la cuestión.

331. **Reglas de Cramer.** Sea el sistema de n ecuaciones de primer grado con n incógnitas:

$$\left.\begin{array}{l} a_1x+b_1y+c_1z+\ldots\ldots+l_1t=p_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z+\ldots\ldots+l_2t=p_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_nx+b_ny+c_nz+\ldots\ldots+l_nt=p_n \end{array}\right\} \qquad (548)$$

y designando por Δ el determinante formado por los n^2 coeficientes de las n incógnitas, se tendrá:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \ldots\ldots & l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \ldots\ldots & l_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & \ldots\ldots & l_3 \\ \ldots & & & & \\ a_n & b_n & c_n & \ldots\ldots & l_n \end{vmatrix} \qquad (549)$$