El desarrollo de Δ puede efectuarse según los elementos de las diversas columnas bajo n formas indicadas ya en el párrafo 317-IV; eligiendo la primera de estas n formas se tendrá la expresión siguiente:

$$\Delta = A_1 a_1 + A_2 a_2 + A_3 a_3 + \ldots\ldots + A_n a_n$$

si en este desarrollo se reemplaza a por las $n-1$ letras restantes: $b, c, d, \ldots\ldots, l$ sin alterar los índices, cada sustitución hará que el determinante conste de dos columnas *idénticas* y por consiguiente que sea nulo; en consecuencia podremos escribir las ecuaciones siguientes que se originan por la operación indicada:

$$\left.\begin{array}{l} A_1 b_1 + A_2 b_2 + A_3 b_3 + \ldots\ldots + A_n b_n = 0 \\ A_1 c_1 + A_2 c_2 + A_3 c_3 + \ldots\ldots + A_n c_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_1 l_1 + A_2 l_2 + A_3 l_3 + \ldots\ldots + A_n l_n = 0 \end{array}\right\} \qquad (550)$$

Multiplicando respectivamente las n ecuaciones (548) por $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n$, sumándolas ordenadamente y atendiendo á las ecuaciones (550) resultará, después de hacer reducciones, la siguiente ecuación:

$$(A_1 a_1 + A_2 a_2 + A_3 a_3 + \ldots\ldots + A_n a_n)\, x = A_1 p_1 + A_2 p_2 + \ldots\ldots + A_n p_n$$

de donde se obtiene:

$$x = \frac{A_1 p_1 + A_2 p_2 + \ldots\ldots + A_n p_n}{A_1 a_1 + A_2 p_2 + \ldots\ldots + A_n a_n} = \frac{\begin{vmatrix} p_1 & b_1 & c_1 \ldots\ldots & l_1 \\ p_2 & b_2 & c_2 \ldots\ldots & l_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ p_n & b_n & c_n \ldots\ldots & l_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \ldots\ldots & l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \ldots\ldots & l_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ a_n & b_n & c_n \ldots\ldots & l_n \end{vmatrix}} \qquad (551)$$

valor de la incógnita x que también puede escribirse *simbólicamente:*

$$x = \frac{\sum\limits_{n=1}^{n=n} A_n p_n}{\sum\limits_{n=1}^{n=n} A_n a_n}$$

Análogamente, apelando sucesivamente á las $n-1$ formas restantes que puede afectar el desarrollo de Δ, se irán obteniendo los valores de las demás incógnitas:

$$y = \frac{B_1 p_1 + B_2 p_2 + \ldots\ldots + B_n p_n}{B_1 b_1 + B_2 b_2 + \ldots\ldots + B_n b_n} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & p_1 & c_1 \ldots\ldots & l_1 \\ a_2 & p_2 & c_2 \ldots\ldots & l_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ a_n & p_n & c_n \ldots\ldots & l_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \ldots\ldots & l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \ldots\ldots & l_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ a_n & b_n & c_n \ldots\ldots & l_n \end{vmatrix}} \qquad (552)$$

....

Finalmente:

$$t = \frac{L_1 p_1 + L_2 p_2 + \ldots\ldots + L_n p_n}{L_1 l_1 + L_2 l_2 + \ldots\ldots + L_n l_n} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \ldots\ldots & p_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \ldots\ldots & p_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ a_n & b_n & c_n \ldots\ldots & p_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \ldots\ldots & l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \ldots\ldots & l_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ a_n & b_n & c_n \ldots\ldots & l_n \end{vmatrix}} \qquad (553)$$

que también pueden escribirse *simbólicamente* como lo hicimos con x.

Vemos pues: *que los valores de todas las incógnitas tienen un denominador común que es justamente el determinante Δ de los coeficientes de ellas en el sistema de ecuaciones, y que para formar el numerador sólo hay que reemplazar en el denominador común, sin alterar los índices, el coeficiente de la incógnita cuyo valor se va á determinar por el término* p *conocido, que constituye el segundo miembro de las ecuaciones del sistema propuesto.*

332. La regla anterior constituye las *reglas de Cramer* mencionadas en el (párrafo 314) que dió á conocer en su "*Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques.*"

OBSERVACIÓN.

333. 1º *Para que subsista la precedente demostración es preciso que los determinantes menores de primera clase por los cuales hay que multiplicar respectivamente las ecuaciones propuestas, no sean todos nulos.*

Si esta condición se llena, cada ecuación análoga á:

$$\Delta x = A_1 p_1 + A_2 p_2 + \ldots\ldots + A_n p_n$$

es consecuencia necesaria de las ecuaciones (548) y puede reemplazar á una cualquiera de ellas; hay pues equivalencia entre el sistema propuesto y el obtenido por las fórmulas de Cramer.

2º Recíprocamente es fácil verificar que: *en tanto que Δ es diverso de cero, los valores dados por estas fórmulas satisfacen á las ecuaciones propuestas que de consiguiente admiten en este caso una solución única y determinada.*

3º Vemos, pues, atendiendo á las reglas de Cramer, que simplifican en extremo la resolución de los sistemas determinados de primer grado.

Sustituyendo en la primera fórmula (548) los valores de $x, y, \ldots\ldots, t$, resulta:

$$a_1(A_1 p_1 + A_2 p_2 + \ldots\ldots + A_n p_n) + b_1(B_1 p_1 + B_2 p_2 + \ldots\ldots + B_n p_n) + \ldots\ldots$$
$$+ l_1(L_1 p_1 + L_2 p_2 + \ldots\ldots + L_n p_n = \Delta p_1$$

ordenando respecto á $p_1, p_2, \ldots\ldots, p_n$, resulta:

$$p_1(A_1 a_1 + B_1 b_1 + \ldots\ldots + L_1 l_1) + p_2(A_2 a_1 + B_2 b_1 + \ldots\ldots + L_2 l_1) + \ldots\ldots$$
$$+ p_n(A_n a_1 + B_n b_1 + \ldots\ldots + L_n l_1) = \Delta p_1$$

el coeficiente de p_1 es el determinante Δ ordenado según los elementos de la primera hilera, los coeficientes de $p_2, p_3, \ldots\ldots, p_n$ son el mismo determinante ordenado según los elementos de la 2ª, 3ª, ..., nª en el cual se han ido reemplazando sucesivamente estas hileras por la primera.

Como esto va produciendo en el determinante á cada operación dos hileras idénticas, va siendo nulo dicho determinante y resultará:

$$\Delta p_1 = \Delta p_1$$

De consiguiente los valores puestos en lugar de las incógnitas satisfacen la ecuación antes escrita y el mismo raciocinio se aplicaría á las $n-1$ ecuaciones restantes del sistema (548).

4º No siendo nulos todos los determinantes menores: *cuando el determinante Δ es por el contrario nulo, el sistema de las ecuaciones propuestas es imposible ó indeterminado.*

En efecto, si se sustituye á la primera de las ecuaciones (548) multiplicados sus dos miembros por A_1 (diverso de cero) la primera de las ecuaciones deducidas de las reglas de Cramer:

$$\Delta x = A_1 p_1 + A_2 p_2 + \dots\dots + A_n p_n \tag{554}$$

se forma un sistema equivalente al (548).

Ahora bien, si siendo $\Delta = 0$ el segundo miembro de (554) es diverso de cero, la ecuación (554) es *imposible* lo mismo que el sistema de que forma parte.

Si el segundo miembro de (554) es también nulo, la ecuación (554) es una *identidad* y el sistema del que forma parte se reduce á un sistema de $n-1$ ecuaciones con n incógnitas y es de consiguiente *indeterminado.*

APLICACIONES.

334. I. Sea el sistema:

$$\begin{cases} 3x + 2y + 4z = 19 \\ 2x + 5y + 3z = 21 \\ 3x - y + z = 4 \end{cases}$$

Resultará:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 19 & 2 & 4 \\ 21 & 5 & 3 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-30}{-30} = 1, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 19 & 4 \\ 2 & 21 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-60}{-30} = 2$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 19 \\ 2 & 5 & 21 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-90}{-30} = 3$$

II. Sea el sistema:

$$\begin{cases} y + z = a \\ z + x = b \\ x + y = c \end{cases}$$

Resultará:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ b & 0 & 1 \\ c & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{-a+b+c}{2} = \frac{b+c-a}{2}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{a+c-b}{2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & b \\ 1 & 1 & c \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{a+b-c}{2}$$

III. Sea el sistema:

$$\begin{cases} x + y - z = m_1 \\ x - y + z = m_2 \\ -x + y + z = m_3 \end{cases}$$

Resultará:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m_1 & 1 & -1 \\ m_2 & -1 & 1 \\ m_3 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{m_1 + m_2}{2}, \qquad y = \frac{m_1 + m_3}{2}, \qquad z = \frac{m_2 + m_3}{2}$$

IV. Sea el sistema:

$$\begin{cases} x - ay + a^2 z = a^3 \\ x - by + b^2 z = b^3 \\ x - cy + c^2 z = c^3 \end{cases}$$

El denominador común Δ tiene por valor:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -a & +a^2 \\ 1 & -b & +b^2 \\ 1 & -c & +c^2 \end{vmatrix} = -(a-b)(a-c)(b-c)$$

de consiguiente:

$$x = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} a^3 - a & a^2 \\ b^3 - b & b^2 \\ c^3 - c & c^2 \end{vmatrix} = \frac{abc}{\Delta} \begin{vmatrix} a^2 - 1 & a \\ b^2 - 1 & b \\ c^2 - 1 & c \end{vmatrix} = abc$$

$$y = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 1 & a^3 & a^2 \\ 1 & b^3 & b^2 \\ 1 & c^3 & c^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 0 & a^3 - b^3 & a^2 - b^2 \\ 1 & b^3 & b^2 \\ 0 & a^3 - c^3 & a^2 - c^2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} a^3 - b^3 & a^2 - b^2 \\ a^3 - c^3 & a^2 - c^2 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{(a-b)(a-c)}{\Delta} \begin{vmatrix} a^2 + ab + b^2 & a+b \\ a^2 + ac + c^2 & a+c \end{vmatrix} = -\frac{(a-b)(a-c)}{\Delta} \begin{vmatrix} b^2 & a+b \\ c^2 & a+c \end{vmatrix}$$

Sucesivamente se seguirá obteniendo:

$$y=-\frac{(a-b)(a-c)}{\Delta}\begin{vmatrix} b^2-c^2 & b-c \\ c^2 & c+c \end{vmatrix}=-\frac{(a-b)(a-c)(b-c)}{\Delta}\begin{vmatrix} b+c & 1 \\ c^2 & a+c \end{vmatrix}$$

$$=ab+ac+bc$$

$$z=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 1 & -a & a^3 \\ 1 & -b & b^3 \\ 1 & -c & c^3 \end{vmatrix}=-\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix}=-\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 0 & a-b & a^3-b^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 0 & a-c & a^3-c^3 \end{vmatrix}=+\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} a-b & a^3-b^3 \\ a-c & a^3-c^3 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{(a-b)(a-c)}{\Delta}\begin{vmatrix} 1 & a^2+ab+b^2 \\ 1 & a^2+ac+c^2 \end{vmatrix}=-\frac{(a-b)(a-c)(b-c)}{\Delta}(a+b+c)$$

$$=a+b+c$$

V. Sea el sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=a \\ u+x+y=b \\ z+u+x=c \\ y+z+u=d \end{cases}$$

Debe obtenerse:

$$x=\frac{a+b+c-2d}{3},\quad y=\frac{a+b+d-2c}{3},\quad z=\frac{a+c+d-2b}{3},\quad u=\frac{b+c+d-2a}{3}$$

VI. Sea el sistema:

$$\begin{cases} 4x-3y+2u=9 \\ x+3z=14 \\ 2u-y=7 \\ 3x+4u=26 \end{cases}$$

Debe obtenerse:

$$x=2,\quad y=3,\quad z=4,\quad u=5$$

335. **Método de Bezout de los factores indeterminados.** Según lo anunciamos (párrafo 330) vamos á ocuparnos del método de *Bezout* llamado de los *factores indeterminados* para la resolución de las ecuaciones determinadas de primer grado con varias incógnitas.

Sea el sistema de n ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} a_1x+b_1y+\ldots\ldots+l_1t=p_1 \\ a_2x+b_2y+\ldots\ldots+l_2t=p_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_nx+b_ny+\ldots\ldots+l_nt=p_n \end{array}\right\} \qquad (555)$$

Multiplicándolas por $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\ldots, \alpha_{n-1}$, 1, y sumándolas, resulta:

$$(a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+a_3\alpha_3+\ldots.+a_{n-1}\alpha_{n-1}+a_n)x+(b_1\alpha_1+b_2\alpha_2+b_3\alpha_3+\ldots.+b_{n-1}\alpha_{n-1}+b_n)y$$
$$+\ldots\ldots+(l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+l_3\alpha_3+\ldots\ldots+l_{n-1}\alpha_{n-1}+l_n)t=p_1\alpha_1+p_2\alpha_2+p_3\alpha_3+\ldots\ldots$$
$$+p_{n-1}\alpha_{n-1}+p_n$$

ecuación que *simbólicamente* puede escribirse conviniendo en que $\alpha_n=1$:

$$x\sum_{n=1}^{n=n}a_n\alpha_n+y\sum_{n=1}^{n=n}b_n\alpha_n+z\sum_{n=1}^{n=n}c_n\alpha_n+\ldots\ldots+t\sum_{n=1}^{n=n}l_n\alpha_n=\sum_{n=1}^{n=n}p_n\alpha_n$$

Para que desaparezcan los coeficientes de todas las incógnitas, excepto x, deben subsistir las $n-1$ ecuaciones con $n-1$ incógnitas:

$$\sum_{n=1}^{n=n}b_n\alpha_n=0,\ \sum_{n=1}^{n=n}c_n\alpha_n=0,\ \ldots\ldots,\ \sum_{n=1}^{n=n}l_n\alpha_n=0 \qquad (556)$$

de consiguiente resultará:

$$x\sum_{n=1}^{n=n}a_n\alpha_n=\sum_{n=1}^{n=n}p_n\alpha_n \text{ ó bien } x=\frac{\sum_{n=1}^{n=n}p_n\alpha_n}{\sum_{n=1}^{n=n}a_n\alpha_n} \qquad (557)$$

valor de x que desarrollado es:

$$x=\frac{p_1\alpha_1+p_2\alpha_2+\ldots\ldots+p_{n-1}\alpha_{n-1}+p_n}{a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\ldots\ldots+a_{n-1}\alpha_{n-1}+a_n} \qquad (558)$$

sólo restará sustituir en este valor (558) los que las $n-1$ ecuaciones (556) dan para las $n-1$ incógnitas: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_{n-1}$.

Procediendo de un modo análogo, se obtendrán los valores de: $y, z, \ldots\ldots, t$.

Como se ve: 1º, para la determinación de: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_n$ por medio de las ecuaciones (556) hay que apelar, generalmente hablando, á las reglas de Cramer, pues el número de ecuaciones puede ser grande; 2º, claramente se ve la apropiada denominación con que se ha bautizado al método expuesto.

APLICACIONES.

336. I. Sea el sistema:

$$\begin{cases} 3x-2y+6z=3'06 \\ 5x+\ \ y-2z=0'81 \\ 7x-\ \ y+4z=3'64 \end{cases}$$

Para la determinación de x las ecuaciones (556) son:

$$\alpha_2-2\alpha_1-1=0,\quad 6\alpha_1-2\alpha_2+4=0$$

para resolverlas aplicando las reglas de Cramer resulta:

$$\alpha_1=\frac{\begin{vmatrix} 1 & +1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & +1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix}}=\frac{2}{-2}=-1,\quad \alpha_2=\frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 6 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & +1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix}}=\frac{2}{-2}=-1$$

de consiguiente sustituyendo en (558) resultará para x:

$$x=\frac{p_1\alpha_1+p_2\alpha_2+p_3}{a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+a_3}=\frac{-3'06-0'81+3'64}{-3-5+7}=0'23$$

Para determinar á y tendremos:

$$3\alpha_1+5\alpha_2+7=0,\quad 6\alpha_1-2\alpha_2+4=0,\quad y=\frac{3'06\alpha_1+0'81\alpha_2+3'64}{\alpha_2-2\alpha_1-1}$$

Las dos primeras ecuaciones conducen á:

$$\alpha_1 = \frac{\begin{vmatrix} -7 & 5 \\ -4 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -2 \end{vmatrix}} = -\frac{17}{18}, \quad \alpha_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 6 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -2 \end{vmatrix}} = -\frac{5}{6}$$

de consiguiente: $y = 1'35$.

Análogamente resultaría para z:

$$3\alpha_1 + 5\alpha_2 + 7 = 0, \quad \alpha_2 - 2\alpha_1 - 1 = 0, \quad z = \frac{3'06\,\alpha_1 + 0'81\,\alpha_2 + 3'64}{6\alpha_1 - 2\alpha_2 + 4}$$

Las ecuaciones que determinan á α_1 y α_2 dan para estas cantidades los valores:

$$\alpha_1 = \frac{\begin{vmatrix} -7 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-12}{13}, \quad \alpha_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{11}{13}$$

de consiguiente $z = 0'845$.

*337. **Teorema de E. Rouché.** El ilustre matemático Mr. E. Rouché ha dado á conocer un notable teorema que al principio consistió en una Nota insertada en los "*Comptes rendus de l'Académie de Sciences*" (29 Noviembre 1875), y en seguida lo amplió en el "*Journal de l'École Polytechnique*" (XLVIII Cahier, 1880) bajo el título de "*Note sur les équations linéaires.*" Dicho teorema viene á ser la *síntesis* de la teoría de las ecuaciones lineales.

Es oportuno advertir que el sabio matemático que nos ocupa se ha distinguido por otros muchos trabajos dignos de mencionarse, entre los que hay que citar: los "*Elementos de Geometría*" y el "*Tratado de Geometría,*" obras escritas en colaboración con su colega *Ch. de Comberousse* un notable estudio sobre la *eliminación* ("Nuevos Anales de Matemáticas, 1877, 2ª serie, tomo XVI) y los "*Elementos de Estática Gráfica,*" obra de gran mérito, que es actualmente texto en nuestra Escuela Nacional de Ingenieros.

*338. Representando las incógnitas por la misma letra afectada de distintos índices, sea el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{l} a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + a_1^3 x_3 + \ldots\ldots + a_1^m x_m = k_1 \\ a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + a_2^3 x_3 + \ldots\ldots + a_2^m x_m = k_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n^1 x_1 + a_n^2 x_2 + a_n^3 x_3 + \ldots\ldots + a_n^m x_m = k_n \end{array}\right\} \qquad (559)$$

este sistema está formado por n ecuaciones con m incógnitas, y como puede tenerse: $m > n$, $m = n$, $m < n$, encierra todos los casos posibles.

Consideremos la matriz rectangular formada por los coeficientes del sistema (559):

$$\left\|\begin{array}{l} a_1^1\ a_1^2\ a_1^3 \ldots\ldots a_1^m \\ a_2^1\ a_2^2\ a_2^3 \ldots\ldots a_2^m \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n^1\ a_n^2\ a_n^3 \ldots\ldots a_n^m \end{array}\right\| \qquad (560)$$

de la que se podrán deducir determinantes, considerando los elementos comunes á un cierto número de hileras y al mismo número de columnas y supondremos que en esta matriz *no todos los elementos son nulos ó que al menos hay uno que no es nulo.* En este supuesto, entre los determinantes

que se deduzcan de (560) habrá *cuando menos uno no nulo* de cierto orden; si hay varios *no nulos* se elegirá el de orden superior, y si hay varios de este orden superior, se elegirá cualquiera de ellos, supongamos de orden p, y que se denominará *determinante principal* del sistema (559). Su orden p no puede sobrepasar ni aun al más pequeño de los números m y n.

Sin restringir nada las ecuaciones (559) siempre podemos suponer que este determinante principal, que llamaremos δ, sea el formado por las p primeras hileras y las p primeras columnas de (560) y se tendrá:

$$\delta = \begin{vmatrix} a_1^1\ a_1^2 \ldots\ldots a_1^p \\ a_2^1\ a_2^2 \ldots\ldots a_2^p \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_p^1\ a_p^2 \ldots\ldots a_p^p \end{vmatrix} \qquad (561)$$

Llamaremos *incógnitas principales* á las p primeras incógnitas: $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_p$, cuyos coeficientes figuran como elementos de (561). *Orlando* ahora este determinante (561) en su parte inferior por los primeros coeficientes de una cualquiera de las $n-p$ ecuaciones no empleadas en su formación y *orlándolo* á la derecha por los términos conocidos correspondientes á cada una de las hileras, se tendrá el determinante de orden $p+1$ que designaremos por $\delta_{p+\alpha}$:

$$\delta_{p+\alpha} = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \ldots\ldots a_1^p & k_1 \\ a_2^1 & a_2^2 & \ldots\ldots a_2^p & k_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ a_p^1 & a_p^2 & \ldots\ldots a_p^p & k_p \\ a_{p+\alpha}^1 & a_{p+\alpha}^2 & \ldots\ldots a_{p+\alpha}^p & k_{p+\alpha} \end{vmatrix} \qquad (562)$$

$$[\alpha = 1, 2, 3, \ldots\ldots, (n-p)]$$

que llamaremos *determinante característico* del sistema (559).

Se podrá, pues, deducir del determinante δ, $n-p$ determinantes característicos de orden $p+1$, haciendo variar α desde 1 hasta $n-p$, puesto que $n-p$ hileras de (560) no han sido empleadas para formar á δ. Si p fuese igual á n, el sistema (559) no admite determinante característico.

Pongamos:

$$X_r = a_r^1 x_1 + a_r^2 x_2 + a_r^3 x_3 + \ldots\ldots + a_r^p x_p$$
$$V_r = k_r - a_r^{p+1} x_{p+1} - a_r^{p+2} x_{p+2} - \ldots\ldots - a_r^m x_m$$

lo que equivale á escribir las ecuaciones (559) bajo la forma:

$$X_r = V_r, \quad (r = 1, 2, 3, \ldots\ldots, n) \qquad (562')$$

y consideraremos las expresiones: $V_1, V_2, \ldots\ldots, V_n$ como los *segundos miembros* de las n ecuaciones (562') lo que no cambia en nada el sistema propuesto.

*339. Establecidos estos preliminares formularemos el enunciado general del teorema:

1º *Para que* n *ecuaciones lineales con* m *incógnitas sean compatibles, es necesario y suficiente que todos los determinantes característicos del sistema sean nulos ó que éste no admita ninguno.*

2º *Cuando el sistema es compatible, si todas las incógnitas son principales (en cuyo caso* m = n = p) *admite* UNA SOLUCIÓN ÚNICA Y DETERMINADA; *si no son principales todas las incógnitas, el sistema es* INDETERMINADO.

*340. Probemos ante todo que el sistema (562') es equivalente al formado por las p ecuaciones:

$$\begin{vmatrix} a_1^1 \ldots\ldots a_1^{\beta-1}\ a_1^{\beta}\ a_1^{\beta+1} \ldots\ldots a_1^p & X_1 - V_1 \\ a_2^1 \ldots\ldots a_2^{\beta-1}\ a_2^{\beta}\ a_2^{\beta+1} \ldots\ldots a_2^p & X_2 - V_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ a_p^1 \ldots\ldots a_p^{\beta-1}\ a_p^{\beta}\ a_p^{\beta+1} \ldots\ldots a_p^p & X_p - V_p \\ 0 \ldots\ldots\ 0 \quad 1 \quad 0 \ \ldots\ldots 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (563)$$

$$(\beta = 1, 2, \ldots\ldots, p)$$