como *no es nulo*, lo elegiremos como determinante principal. Tendremos tres determinantes característicos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 3 & -1 & 2 & 10 \\ 2 & 7 & -3 & 8 \\ a & -b & c & 20 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 3 & -1 & 2 & 10 \\ 2 & 7 & -3 & 8 \\ a & b & c & 44 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 3 & -1 & 2 & 10 \\ 2 & 7 & -3 & 8 \\ 10a & 3b & -c & 26 \end{vmatrix}$$

que necesitan ser todos nulos para que las ecuaciones propuestas sean compatibles; habrá, pues, que determinar el valor de cada uno de ellos é igualarlos á cero, con lo que resultarán tres ecuaciones con tres incógnitas: a, b, c; la *compatibilidad ó incompatibilidad* de estas ecuaciones hará concluir la *compatibilidad ó incompatibilidad* de las propuestas.

Tomemos, pues, el primer determinante que se irá modificando sucesivamente como á continuación se expresa:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 3 & -1 & 2 & 10 \\ 2 & 7 & -3 & 8 \\ a & -b & c & 20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 10 \\ 2 & 7 & -3 & 8 \\ a & -b & c & 20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 8 \\ 9 & 7 & -3 & 11 \\ a-b & -b & c & 20-c \end{vmatrix}$$

$$= \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 8 \\ 9 & 7 & 1 & 11 \\ a-b & -b & 2c-b & 20-c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 9 & 1 & 11 \\ a-b & 2c-b & 20-c \end{vmatrix}$$

$$= \tfrac{1}{4}\begin{vmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 18 & 2 & 11 \\ 2a-2b & 4c-2b & 20-c \end{vmatrix} = \tfrac{1}{4}\begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 18 & -16 & 9 \\ 2a-2b & 4c-2a & 20+2b-5c \end{vmatrix}$$

$$= \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 9 & -16 & 9 \\ a-b & 4c-2a & 20+2b-5c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 9 & -16 & 9 \\ a-b & 4c-2a & 20+2b-5c \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 9 & -25 & 0 \\ a-b & 4c-3a+b & 20+3b-5c+a \end{vmatrix} = -25(20-a+3b-5c)$$

valor que debe igualarse á cero, como dijimos, y produce la ecuación:

$$a-3b+5c=20$$

Operando análogamente, los otros dos determinantes producen:

$$a+3b+5c=44, \quad 10a+9b-5c=26$$

Para resolver este sistema aplicaremos nuevamente el teorema formando la matriz correspondiente que es precisamente el determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 1 & 3 & 5 \\ 10 & 9 & -5 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 10 & 9 & -1 \end{vmatrix} = -330$$

que *no es nulo* y elegiremos como determinante principal del sistema.

Como *no hay determinantes característicos*, las ecuaciones consideradas son *compatibles*, y siendo *principales todas* las incógnitas, se tendrá:

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 20 & -3 & 5 \\ 44 & 3 & 5 \\ 26 & 9 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 1 & 3 & 5 \\ 10 & 9 & -5 \end{vmatrix}} = \frac{-660}{-330} = 2, \quad b = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 20 & 5 \\ 1 & 44 & 5 \\ 10 & 26 & -5 \end{vmatrix}}{-330} = 4, \quad c = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 20 \\ 1 & 3 & 44 \\ 10 & 9 & 26 \end{vmatrix}}{-330} = 6$$

Puesto que estos valores de a, b, c hacen compatibles las seis ecuaciones propuestas, bastará considerar las tres primeras para conocer finalmente á x, y, z.

La matriz que en este caso hay que considerar no es sino el determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 7 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & -1 \\ 2 & 5 & -5 \end{vmatrix} = 25$$

Como no hay *determinantes característicos*, las ecuaciones consideradas son compatibles indefectiblemente, y para determinar las incógnitas se tendrá:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 10 & -1 & 2 \\ 8 & 7 & -3 \end{vmatrix}}{25} = \frac{25}{25} = 1, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 9 & 1 \\ 3 & 10 & 2 \\ 2 & 8 & -3 \end{vmatrix}}{25} = 3, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 3 & -1 & 10 \\ 2 & 7 & 8 \end{vmatrix}}{25} = 5$$

*343. **Ecuaciones y relaciones lineales y homogéneas.** Toda expresión de la forma:

$$ax_1+bx_2+cx_3+\ldots\ldots+lx_m \tag{572}$$

en la que a, b, c, ..., l son coeficientes numéricos ó algebraicos independientes de las incógnitas x_1, x_2, ..., x_m de primer grado, es una *forma lineal* y *homogénea* de estas incógnitas.

Igualada á cero la expresión (572) representa una *ecuación lineal* y homogénea con m incógnitas.

Vemos, pues, 1.º que en toda ecuación de esta especie el término conocido es cero; 2.º, las ecuaciones á que nos hemos estado refiriendo han sido, generalmente hablando, lineales y no homogéneas.

*344. El teorema de Rouché lo hemos establecido partiendo de ecuaciones *lineales no homogéneas*, pero inmediatamente es aplicable á los sistemas de *ecuaciones lineales* y *homogéneas*.

En efecto, todos los determinantes característicos del sistema propuesto de ecuaciones lineales homogéneas son *nulos* constando todos de la última columna compuesta de elementos nulos; de consiguiente las ecuaciones propuestas son siempre *compatibles* [1] (párrafo 338-1.º). Respecto á la segunda parte del enunciado (párrafo 338-2.º): *todo sistema de* n *ecuaciones lineales y homogéneas con* m *incógnitas, admitirá la solución única:*

$$x_1=x_2=x_3=\ldots\ldots=0$$

ó será indeterminado según que sean ó no principales todas las incógnitas.

(1) Esta conclusión es *a priori* evidente, pues admiten siempre la solución:

$$x_1=x_2=x_3=\ldots\ldots=0$$

*345. Suponiendo $m=n$, es decir, tantas ecuaciones como incógnitas, tendremos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 x_1 + b_1 x_2 + \ldots\ldots + l_1 x_n = 0 \\ a_2 x_1 + b_2 x_2 + \ldots\ldots + l_2 x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n x_1 + b_n x_2 + \ldots\ldots + l_n x_n = 0 \end{array}\right\} \qquad (573)$$

que será *ó no será indeterminado según que el determinante de los coeficientes de las incógnitas sea ó no sea nulo.*

Supongamos que sea *indeterminado*, con lo que se tendrá:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \ldots\ldots & l_1 \\ a_2 & b_2 \ldots\ldots & l_2 \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ a_n & b_n \ldots\ldots & l_n \end{vmatrix} = 0 \qquad (574)$$

no podrá ser, pues, este determinante principal y las incógnitas no serán todas principales (párrafo 339); *las* n *incógnitas serán indeterminadas, pero las relaciones de* $n-1$ *de ellas á la* n^a *restante son determinadas por lo general.*

Si dividimos las n ecuaciones (573) entre la incógnita x_n y tomamos por nuevas incógnitas las $n-1$ relaciones que se originan:

$$\frac{x_1}{x_n},\ \frac{x_2}{x_n}, \ldots\ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n}$$

se formará el sistema siguiente de n ecuaciones lineales no homogéneas con $n-1$ incógnitas:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 \dfrac{x_1}{x_n} + b_1 \dfrac{x_2}{x_n} + \ldots\ldots = -l_1 \\ a_2 \dfrac{x_1}{x_n} + b_2 \dfrac{x_2}{x_n} + \ldots\ldots = -l_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n \dfrac{x_1}{x_n} + b_n \dfrac{x_2}{x_n} + \ldots\ldots = -l_n \end{array}\right\} \qquad (575)$$

Tomemos de la matriz de los coeficientes de las anteriores incógnitas las $n-1$ primeras hileras y las $n-1$ primeras columnas; si *no es nulo* el determinante así formado, será el determinante principal del sistema y el único determinante característico será:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \ldots\ldots - l_1 \\ a_2 & b_2 & \ldots\ldots - l_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-1} & b_{n-1} & \ldots\ldots - l_{n-1} \\ a_n & b_n & \ldots\ldots - l_n \end{vmatrix} \qquad (576)$$

Para que sean *compatibles* las n ecuaciones con $n-1$ incógnitas, el determinante (576) debe ser *nulo*. Si es nulo, todas las incógnitas serán principales y el sistema admitirá *una solución única y determinada* (párrafo 339).

*346. Teorema. *Si se tiene un sistema de* n *ecuaciones de primer grado con* $n-1$ *incógnitas, el resultado de la eliminación de estas* $n-1$ *incógnitas se obtiene en general inmediatamente igualando á cero el determinante de orden* n *formado por los* n^2 *coeficientes de las ecuaciones dadas, comprendidos los términos conocidos.*

Si se iguala á cero el determinante de que habla el enunciado, se expresa (párrafo anterior) que las ecuaciones son *compatibles*, es decir, se plantea la ecuación de condición que debe ligar á los coeficientes para que haya *compatibilidad*, y esta ecuación llamada resultante es justamente la que re-

sulta de eliminar las $n-1$ incógnitas entre las n ecuaciones. Este teorema es de importancia en Geometría Analítica.

*347. Si desarrollamos (574) por los elementos de la primera hilera, se tendrá:

$$A_1 a_1 + B_1 b_1 + \ldots\ldots + L_1 l_1 = 0$$

y (propiedad IV, párrafo 317) también:

$$\begin{array}{l} A_1 a_2 + B_1 b_2 + \ldots\ldots + L_1 l_2 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_1 a_n + B_1 b_n + \ldots\ldots + L_1 l_n = 0 \end{array}$$

Comparando estos valores con las ecuaciones (573) se ve que los valores:

$$x_1 = A_1,\quad x_2 = B_1,\ \ldots\ldots,\ x_n = L_1$$

constituyen una solución del sistema siempre que (573) esté satisfecha; por consiguiente si alguno de los complementos: A_1, B_1, ..., L_1 es diverso de cero, toda solución del sistema (573) satisface á las ecuaciones:

$$\frac{x_1}{A_1} = \frac{x_2}{B_1} = \ldots\ldots = \frac{x_n}{L_1} \qquad (577)$$

y recíprocamente.

Como se deduciría análoga consecuencia para los complementos algebraicos de otra línea cualquiera de (573), en general:

Teorema. *Si el determinante de los coeficientes de un sistema de* n *ecuaciones homogéneas de primer grado con* n *incógnitas es nulo, los valores de las incógnitas son proporcionales á los complementos algebraicos de sus respectivos coeficientes en una cualquiera de las ecuaciones.*

348. Para terminar este Capítulo y con él la Primera Parte de esta obra, á ejemplo de Comberousse cuyo método é ideas hemos seguido casi únicamente en esta última parte relativa á las ecuaciones lineales y homogéneas, diremos con *Mr. Sylvester:*

"La théorie des déterminants peut être regardée comme une algèbre *au-dessus* de l'algèbre, comme un calcul qui permit de combiner et de prédire les résultats des opérations algébriques, de la même manière que l'algèbre elle-même dispense de l'éxécution des opérations particulières de l'arithmétique." (1)

(1) *Leibnitz* (1693) puede considerarse como el primer inventor de los determinantes y *Cramer* (1750) como el segundo; entre los matemáticos que les han concedido grande predilección hay que mencionar necesariamente á *Sylvester.*