SEGUNDA PARTE.

TEORÍA GENERAL DE LAS ECUACIONES.

CAPÍTULO I.

TEORÍAS GENERALES, PROPIEDADES Y COMPOSICIÓN DE LAS ECUACIONES.

349. En los párrafos 133, 278, Primera Parte, hemos definido lo que se entiende por *funciones enteras* de una variable real ó imaginaria, hemos visto también que cuando la ecuación encierra tan sólo funciones algebraicas es *algebraica y trascendente* en caso contrario. Toda ecuación algebraica con una incógnita ó de una variable puede traerse á la forma:

$$A_0 z^m + A_1 z^{m-1} + \ldots\ldots + A_{m-1} z + A_m = 0 \qquad (578)$$

que simbólicamente podremos escribir así:

$$\varphi(z) = 0 \text{ ó } Z = 0$$

En la ecuación (578), z es la *incógnita* ó la *variable*, m es un número *entero que marca el grado* de la ecuación.

Los coeficientes de la ecuación:

$$A_0, A_1, A_2, \ldots\ldots, A_{m-1}, A_m$$

son cantidades reales ó imaginarias de la forma $a + bi$ que entraña ambos casos (párrafos 249, 272, etc.) según el valor de sus elementos.

Estos coeficientes pueden ser símbolos algebraicos ó números; en el primer caso las ecuaciones son *algebraicas* propiamente, en el segundo son *numéricas*.

La resolución de una ecuación general de grado m consiste en hallar las expresiones que siendo funciones de los coeficientes de la ecuación, sustituídas en ésta en lugar de la incógnita, identifican ambos miembros. Estas expresiones son los *valores generales de las raíces* de la ecuación de grado m. La resolución algebraica de las ecuaciones es posible y conocida ya por Álgebra Elemental para los dos primeros grados; en la segunda parte de esta obra que vamos á comenzar, veremos que la resolución algebraica de las ecuaciones de tercero y de cuarto grado también es posible; de quinto grado en adelante la resolución algebraica de las ecuaciones generales es imposible. ABEL [1] y posteriormente WANTZEL [2] han demostrado la imposibilidad.

En cuanto á la resolución de las ecuaciones *numéricas* es posible para todos los grados aunque creciendo ciertamente las dificultades, como es lógico, cuando el grado aumenta; el problema entonces se reduce á encontrar *números-raíces* que sustituídos en lugar de la incógnita verifiquen la ecuación, nulificándola cuando sea cero el segundo miembro.

350. Si para mayor sencillez dividimos todos los términos de la ecuación (578) entre A_0, llamando P, Q, R, ..., T, U, los cocientes:

$$\frac{A_1}{A_0}, \frac{A_2}{A_0}, \ldots\ldots, \frac{A_m}{A_0}$$

y tomamos á x por variable, resultará la ecuación algebraica completa de grado m con una incógnita:

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + Rx^{m-3} + Sx^{m-4} + \ldots\ldots + Tx + U = 0 \qquad (579)$$

Esta ecuación tiene la propiedad de que hay siempre una cantidad imaginaria (ó real, pues que también entraña á las cantidades reales el símbolo $a+bi$) que sustituída en lugar de x hace el primer miembro idénticamente nulo. Esta proposición, debida á *D'Alembert*, presenta serias dificultades en su demostración para el que comienza; así, pues, la daremos por demostrada [3] y basándonos en ella pasaremos á exponer las principales propiedades de las ecuaciones.

351. I. *Si* a *es una raíz de la ecuación general* (579), *esta ecuación será divisible exactamente por el binomio* x — a [4].

Por ser a una raíz de la ecuación (579) debe verificarse dicha ecuación si en ella sustituimos a por x; luego debe tenerse:

$$a^m + Pa^{m-1} + Qa^{m-2} + \ldots\ldots + Ta + U = 0 \qquad (580)$$

que produce:

$$U = -a^m - Pa^{m-1} - Qa^{m-2} - \ldots\ldots \qquad (581)$$

Sustituyendo en (579) el valor de U, tendremos:

$$x^m + Px^{m-1} + \ldots\ldots - a^m - Pa^{m-1} \ldots\ldots = 0$$

que puede escribirse así:

$$x^m - a^m + P(x^{m-1} - a^{m-1}) + \ldots\ldots + T(x-a) = 0 \qquad (582)$$

y como según un teorema de Álgebra Elemental (Contreras, 4ª edición, pág. 36) los binomios encerrados entre paréntesis son divisibles por $x-a$; luego la ecuación (582) lo será, y como equivale á la (579), queda demostrada la proposición y la ecuación $x^m + Px^{m-1}$...... será divisible por $x-a$.

[1] ABEL. *Œuvres complétes.*

[2] WANTZEL. "*Journal de l'École Polytechnique.*"

[3] En una nota de las que van al final de la obra hemos expuesto la demostración que del principio que aquí omitimos ha dado *Cauchy* en sus "*Exercices de Mathématiques.*"

[4] Teorema sólo aplicable á las funciones algebraicas enteras y racionales respecto de x. Así $x=64$ es raíz de $x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{6}} - 2 = 0$, y sin embargo, el primer miembro de esta ecuación no es divisible entre $x-64$.

352. **Demostración de D'Alembert.** Si dividimos la ecuación (579) por $x-a$, hasta obtener un resto independiente de x, tendremos: representando por Q el cociente, por R la resta y por X el dividendo que es la ecuación (579):

$$X = Q(x-a) + R \qquad (583)$$

Si ponemos por x la raíz a, el primer miembro se nulificará por el hecho de ser a raíz de él; el término $Q(x-a)$ también será nulo para el valor $x=a$, puesto que $x-a$ se anula y Q conserva un valor finito, por ser una función entera de x; luego la ecuación anterior se reduce á:

$$0 = 0 + R \quad \text{ó bien} \quad R = 0$$

Como cuando la resta es nula, la división es exacta, deduciremos que la ecuación (579) es divisible exactamente por $x-a$.

COROLARIO. Si sustituimos a en lugar de x en la ecuación (578), suponiendo que *no* es raíz, se tendrá:

$$a^m + Pa^{m-1} + Qa^{m-2} + \ldots\ldots = R$$

luego: *si se divide un polinomio de la forma* $x^m + Px^{m+1} +$ etc., *entre el binomio:* x — a, *el valor de la resta no es sino el resultado final que se obtiene de sustituir en la ecuación, por* x *la cantidad* a.

Por ejemplo, la resta 149 que queda de dividir:

$$x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 4x + 5 \div x - 4$$

es justamente el resultado que se obtiene de sustituir en el polinomio dividendo 4 en lugar de x.

353. II. Dividiendo la ecuación (582) por $x-a$, resulta:

$$\frac{x^m - a^m}{x-a} + P\frac{x^{m-1} - a^{m-1}}{x-a} + \ldots\ldots + T\frac{x-a}{x-a} = 0 \qquad (584)$$

Ejecutando la división y ordenando el resultado respecto á las potencias de x, se encuentra:

$$\left.\begin{array}{l} x^{m-1} + x^{m-2}(a+P) + x^{m-3}(a^2 + aP + Q) + x^{m-4}(a^3 + a^2P + aQ + R) + \ldots\ldots \\ \qquad + x^0(a^{m-1} + a^{m-2}P + a^{m-3}Q + \ldots\ldots + T) = 0 \end{array}\right\} \qquad (585)$$

y representando por P′, Q′...... los coeficientes de las diversas potencias de x, tendremos:

$$x^{m-1} + P'x^{m-2} + Q'x^{m-3} + \ldots\ldots + T' = 0 \qquad (586)$$

ecuación de la misma forma que la general (579).

354. III. *Toda ecuación de cualquier grado es igual al producto de tantas diferencias entre la incógnita y las raíces como unidades tiene su grado.*

Tenemos según el párrafo anterior:

$$x^m + Px^{m-1} + \ldots\ldots = (x-a)(x^{m-1} + P'x^{m-2} + \ldots\ldots)$$

Para que el primer miembro sea nulo, uno de los factores del segundo debe serlo; así pues, debemos tener:

$$x-a=0 \quad \text{ó} \quad x^{m-1} + P'x^{m-2} + \ldots\ldots = 0$$

Si b es una raíz de $x^{m-1}+\mathrm{P}'x^{m-2}+\ldots\ldots$, tendremos:

$$x^{m-1}+\mathrm{P}'x^{m-2}+\ldots\ldots=(x-b)(x^{m-2}+\mathrm{P}''x^{m-3}+\ldots\ldots)$$

Sustituyendo en la ecuación primera, tendremos:

$$x^m+\mathrm{P}x^{m-1}+\ldots\ldots=(x-a)(x-b)(x^{m-2}+\mathrm{P}''x^{m-3}+\ldots\ldots)$$

que para que el primer miembro sea nulo, como debe serlo, uno de los factores del segundo nos da las condiciones:

$$x-a=0,\quad x-b=0,\quad x^{m-2}+\mathrm{P}''x^{m-3}+\ldots\ldots=0$$

Pero como si llamamos c una raíz de $x^{m-2}+\mathrm{P}''x^{m-3}\ldots\ldots$, tenemos:

$$x^{m-2}+\mathrm{P}''x^{m-3}+\ldots\ldots=(x-c)(x^{m-3}+\mathrm{P}'''x^{m-4}+\ldots\ldots)$$

Sustituyendo en la ecuación correspondiente:

$$x^m+\mathrm{P}x^{m-1}+\ldots\ldots=(x-a)(x-b)(x-c)(x^{m-3}+\mathrm{P}'''x^{m-4}+\ldots\ldots)$$

Repitiendo el razonamiento, cada operación pondrá en evidencia un nuevo factor de primer grado y al mismo tiempo disminuirá una unidad el grado del último cociente.

Debemos, pues, llegar á un cociente de primer grado con el primer término en x, designándolo, por consiguiente, por $x-l$; el polinomio dado se habrá descompuesto en m factores, del modo siguiente:

$$x^m+\mathrm{P}x^{m-1}+\ldots\ldots=(x-a)(x-b)(x-c)\ldots\ldots(x-l) \qquad (587)$$

Así pues, vemos que *el polinomio se ha descompuesto en tantos factores y por consiguiente tiene tantas raíces como unidades el exponente que marca su grado.*

Corolario I. *No admite más raíces una ecuación algebraica que las que indican las unidades del exponente que marca su grado.*

Sabemos que:

$$x^m+\mathrm{P}x^{m-1}+\ldots\ldots=(x-a)(x^{m-1}+\mathrm{P}'x^{m-2}+\ldots\ldots)$$

Si suponemos que h es raíz de la ecuación, deduciremos que al ser divisible por $x-h$ el primer miembro de la ecuación, debe serlo el segundo.

Pero $x-a$ sólo es divisible por $x-h$ si $a=h$; luego el otro factor $x^{m-1}+\mathrm{P}'x^{m-2}\ldots\ldots$ debe ser el divisible por $x-h$.

Como $x^{m-1}+\mathrm{P}'x^{m-2}+\ldots\ldots=(x-b)(x^{m-2}+\mathrm{P}''x^{m-3}+\ldots\ldots)$ para que el segundo miembro sea divisible por $x-h$, como $x-b$ sólo lo es cuando $b=h$, debe serlo el segundo factor $x^{m-2}+\mathrm{P}''x^{m-3}+\ldots\ldots$

Si seguimos nuestro razonamiento, al llegar al último factor que es de la forma $x-l=0$ (párrafo 354), decimos que debe ser divisible por $x-h$, y para ello es preciso tener $l=h$; luego la nueva raíz supuesta h se confunde con una de las m raíces anteriores, y se deduce el corolario.

Corolario II. Vemos que $a, b, c, \ldots\ldots, l$ son raíces efectivamente de la ecuación (587), pues las hipótesis $x=a$, $x=b$, ..., $x=l$ la nulifican, mientras que otra hipótesis nueva $x=\alpha$ (corolario I) no produce dicho efecto.

Corolario III. Si el polinomio tiene la forma:

$$x^m+\mathrm{P}x^{m-1}+\ldots\ldots=(x-a)^p(x-b)^q\ldots\ldots(x-l)$$

no se modifican los anteriores raciocinios y siempre habrá m raíces, aunque en este caso son p iguales á a, q iguales á b, etc.

355. **Relaciones entre los coeficientes y las raíces de una ecuación algebraica.** Si representamos por $a, b, c, \ldots\ldots l$ las raíces de la ecuación general (579), tendremos llamando X al polinomio $x^m+\mathrm{P}x^{m-1}+\ldots\ldots$ (párrafo 354):

$$\mathrm{X}=(x-a)(x-b)(x-c)\ldots\ldots(x-l)$$

Ejecutando la multiplicación y ordenando el producto respecto á las potencias decrecientes de x, se encuentra una expresión de la forma:

$$x^m-(a+b+\ldots\ldots+l)x^{m-1}+(ab+ac+ad+\ldots\ldots+bc+bd+\ldots\ldots+cd\ldots\ldots)x^{m-2}$$
$$-(abc+abd+\ldots\ldots)x^{m-3}+\ldots\ldots\pm(abcd\ldots\ldots l)x^0$$

En este producto vemos:

1º Que el coeficiente de x^m es 1; el de x^{m-1} se obtiene sumando las raíces y cambiando el signo de la suma, el de x^{m-2} sumando las combinaciones binarias de las raíces, el de x^{m-3} sumando las ternarias y afectando la suma del signo menos, etc.

2º Que los coeficientes de orden par cambian el signo de la suma que representan.

3º Que el último término independiente ó coeficiente de x^0 es igual al producto de las raíces tomado positivamente si la ecuación es de grado *par* y negativamente si es *impar* el grado.

De manera que podemos poner de una manera abreviada:

$$\begin{array}{lll} \text{Coeficiente de } & x^m & =1 \\ \text{,,} \qquad \text{,,} & x^{m-1} & =-\Sigma a \\ \text{,,} \qquad \text{,,} & x^{m-2} & =\Sigma ab \\ \text{,,} \qquad \text{,,} & x^{m-3} & =-\Sigma abc, \text{ etc.} \end{array}$$

Término independiente:

$$\mathrm{U}=(-1)^m abcd\ldots\ldots l$$

Supongamos que nuestros binomios son cuatro:

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$$

tendremos:

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)=\begin{array}{r|r|r|l} x^4-a & x^3+ab & x^2-abc & x+abcd \\ -b & +ac & -abd & \\ -c & +ad & -acd & \\ -d & +bc & -bcd & \\ & +bd & & \\ & +cd & & \end{array}$$

que tiene la forma:

$$x^4-(a+b+c+d)x^3+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2-(abc+abd+acd+bcd)x$$
$$+abcd$$